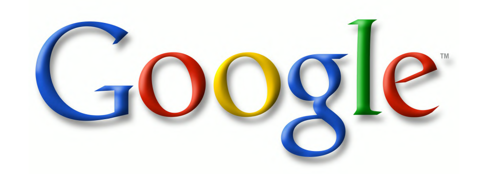


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

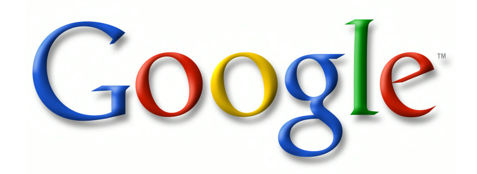
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

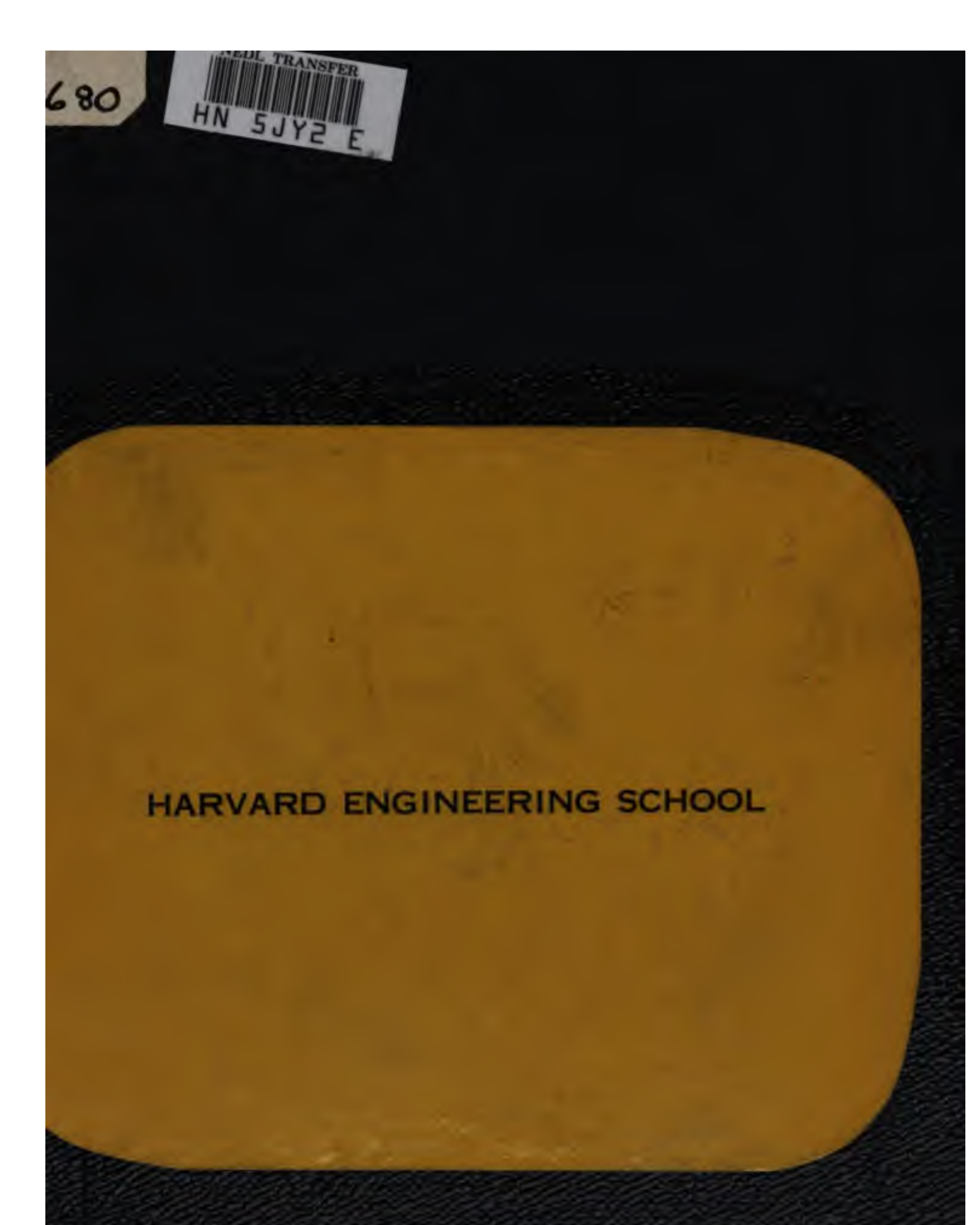
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

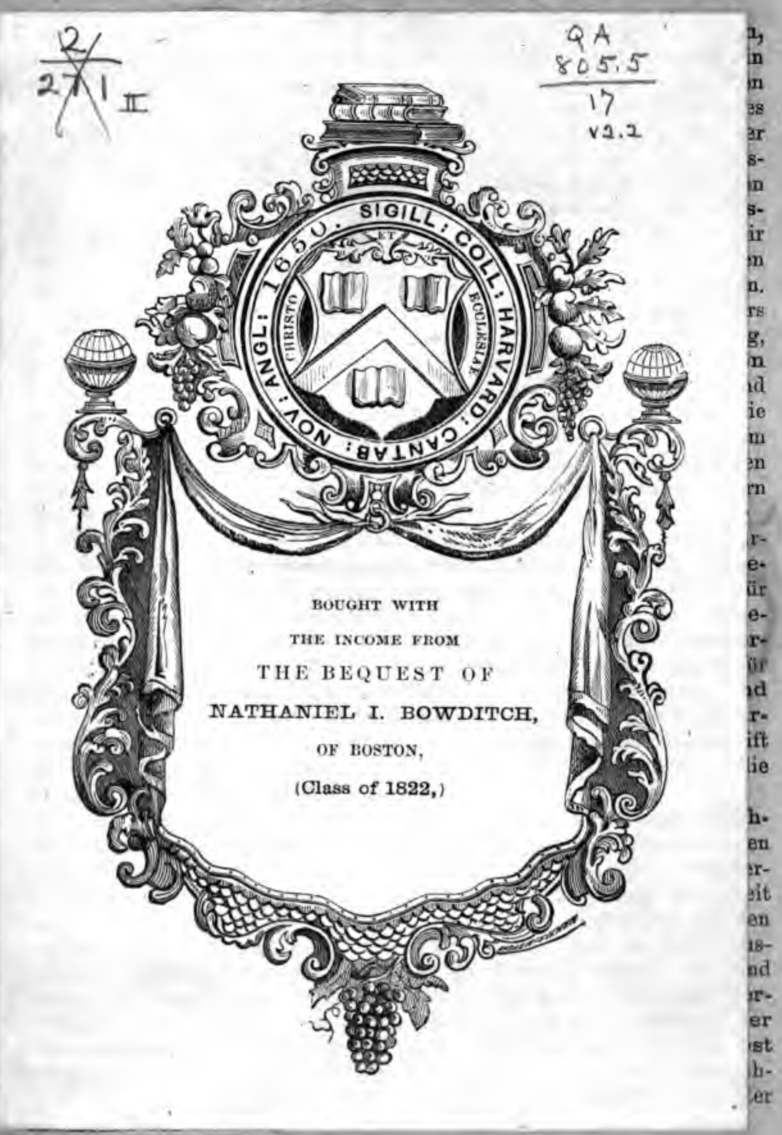
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com durchsuchen.

680
HNEDL TRANSFER
HN 5JY2 E



KF/6690

P. P.



QA 805.5 17 v2.2

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUG. FÖPPL
PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

ZWEITER BAND

GRAPHISCHE STATIK

MIT 176 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903

KF 16680
~~Eng 259.05~~
~~2 / 27.1~~ II
QA 805.5 / 17 v2.2
Bowditch fund (II, V)

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort zur ersten Auflage.

Mit diesem Bande gelangt das ganze Werk, das vor drei Jahren mit der Veröffentlichung des dritten Bandes begonnen wurde, zum Abschlusse. Über die Beweggründe, durch die ich mich bei der Auswahl des Stoffes und bei der Darstellungsweise leiten ließ, habe ich mich in den Vorreden zu den früher erschienenen Bänden schon so ausführlich ausgesprochen, daß mir jetzt nicht mehr viel hinzuzufügen bleibt.

Man darf bei der Beurteilung des Werkes nach dieser Richtung hin nicht vergessen, daß es sich um Vorlesungen über technische Mechanik handelt, die nur in etwas erweiterter Form veröffentlicht wurden. Weitergehende Ausführungen, die zur Theorie der Brücken, zur Statik der Baukonstruktionen überhaupt, zur theoretischen Maschinenlehre u. s. f. gehören, darf man in Vorlesungen, die für Studierende der ersten vier Semester gehalten werden, nicht erwarten. Der Vortrag über Mechanik hat nach dieser Richtung hin nur die Grundlage zu bieten, auf der in den einzelnen Fachvorlesungen weiter gebaut werden kann. Andererseits muß freilich Wert darauf gelegt werden, daß nicht alles nur auf den unmittelbaren praktischen Gebrauch zugeschnitten wird, sondern daß auch solche Untersuchungen zu ihrem Rechte gelangen, auf die man bei den Anwendungen zwar nur ausnahmsweise stößt, die aber zum genaueren Verständnisse der üblichen Methoden wesentlich beitragen.

Bei der Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Bände haben übrigens neben andern auch manche Erwägungen bei-

getragen, die in dem besonderen Unterrichtsbetriebe an der hiesigen Hochschule begründet sind. So ist z. B. zu beachten, daß die in diesem Bande behandelte Vorlesung über graphische Statik in demselben Semester mit der Vorlesung über Festigkeitslehre abgehalten wird und daß beide im wesentlichen von denselben Hörern besucht werden, abgesehen von den Studierenden der Architektur, die nur die graphische Statik hören. Hieraus erklären sich manche Hinweise in diesem Bande auf die Lehren des dritten Bandes. Auch für das Privatstudium empfiehlt es sich daher, diese beiden Bände gleichzeitig nebeneinander zu gebrauchen.

Von den beiden zuerst erschienenen Bänden (dem dritten und dem ersten) haben sich inzwischen schon neue Auflagen nötig gemacht, die ebenso wie der hier vorliegende Band in doppelter Anzahl gedruckt wurden, so daß sich annehmen läßt, daß der Vorrat nun für eine längere Zeit ausreichen wird.

Bei der Ausarbeitung und der Herstellung dieses Bandes hat mich Herr Ingenieur Julius Schenk, z. Z. Assistent für technische Mechanik an unserer Hochschule, wesentlich unterstützt. Er hat nicht nur die dazu gehörigen Figuren gezeichnet und die Korrekturabzüge durchgesehen, sondern mir auch manche Aufgaben vorgeschlagen, die ich hier aufgenommen habe. Für seine eifrige und nützliche Beihilfe spreche ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus. Auch der Verlagshandlung bin ich für die treffliche Ausführung des Druckes zu großem Danke verbunden.

Möge auch diesem Bande eine ebenso wohlwollende Aufnahme beschieden sein, wie sie den andern zuteil wurde.

München, im Juli 1900.

A. Föppl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Auch von diesem Bande ist die erste Auflage schnell vergriffen worden, obschon sie in einer gegenüber den andern Bänden verdoppelten Anzahl gedruckt worden war. In der kurzen Zwischenzeit hat sich kein Bedürfnis nach umfangreicheren Änderungen herausgestellt. An einer Stelle ist zwar ein neuer Paragraph eingefügt, der sich auf die Zimmermannschen Kuppeln bezieht; sonst kommen aber nur noch Verbesserungen und Zusätze kleineren Umfanges an verschiedenen Stellen vor.

Zum Teile sind diese kleineren Änderungen durch Ratschläge und Auskünfte veranlaßt worden, mit denen ich von einigen meiner Herren Kollegen von den andern Hochschulen freundlichst unterstützt wurde. Es sei mir gestattet, meinem Danke für diese wertvolle Beihilfe auch an dieser Stelle Ausdruck zu geben. Auch meinem ehemaligen Assistenten, Herrn Dr. Ing. Jul. Schenk, der wieder die in der Neuauflage hinzugekommenen Figuren gezeichnet hat, spreche ich dafür den gebührenden Dank aus.

Da die vorliegende Neuauflage in abermals stark vergrößerter Auflagehöhe gedruckt worden ist, dürfte der Bedarf nun wohl ohne Zweifel für eine längere Zeit gedeckt sein.

München, im November 1902.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte am materiellen Punkte und in der Ebene.

§ 1. Zeichnung und Rechnung in der Mechanik.

Die Kräfte sind gerichtete Größen, die sich in einer Zeichnung durch Strecken darstellen lassen. Es liegt daher nahe, die zwischen verschiedenen Kräften bestehenden Beziehungen mit Hülfe einer Zeichnung oder überhaupt auf geometrischem Wege zu verfolgen. In der Tat ist auch schon bei der Entwickelung der heutigen Mechanik mit Vorliebe Gebrauch von geometrischen Betrachtungen gemacht worden. In dem berühmten Galileischen Werke, von dem unsere Mechanik ihren Ursprung ableitet und das durch die in der Ostwaldschen Klassiker-Ausgabe erschienene Übersetzung jedermann leicht zugänglich gemacht wurde, steht die geometrische Behandlung überall im Vordergrunde, wenn auch von einer graphischen Darstellung der Kräfte im heutigen Sinne damals noch nicht die Rede war. Von Newton und Varignon wurde dann später das Kräfteparallelogramm eingeführt, jenes einfache und sinnfällige Hülfsmittel zur Ermittelung der Resultierenden von zwei an demselben Punkte angreifenden Kräften.

Inzwischen war jedoch von Descartes die Coordinatenmethode in die Geometrie eingeführt worden. Die Lösung geometrischer Probleme wurde hierdurch der Rechnung in weit höherem Maße zugänglich gemacht, als dies früher möglich war. Die großen Erfolge, die auf diesem Wege in

der Geometrie gewonnen wurden, konnten ihre Rückwirkung auf die Mechanik nicht verfehlen. So kam es, daß man nun mit Vorliebe alle in der Mechanik vorkommenden Vectoren in ihre Componenten nach den Achsenrichtungen eines Coordinatensystems zerlegte und mit diesen rechnete. Wie alle großen Bewegungen in der Wissenschaft schoß auch diese schließlich für längere Zeit über ein verständig gestecktes Ziel hinaus. Man verschmähte sowohl die im Maßstabe ausgeführte Zeichnung als auch die sich an das geometrische Bild auf Grund geometrischer Sätze anschließende Untersuchungsmethode. Unmittelbar nach Newton und von da ab während eines mehr als ein Jahrhundert umfassenden Zeitraumes wurde die Mechanik vorwiegend und zuletzt fast ausschließlich nach der analytischen Methode, also auf Grund der Rechnung mit Coordinaten und Componenten betrieben. Auch daran, mit den gerichteten Größen selbst, anstatt mit ihren Componenten zu rechnen, wie man es heute in vielen Fällen mit so großem Vorteile tut, dachte zu jener Zeit niemand.

Zwar vermochte sich selbst in jener Zeit wenigstens die Konstruktion des Kräfteparallelogramms zu behaupten. Selten genug mag es freilich wirklich im Maßstabe gezeichnet und zur unmittelbaren Ableitung eines fertigen Resultats gebraucht worden sein. Es diente mehr zur Veranschaulichung und als Grundlage für eine sich daran schließende Rechnung, wie als Werkzeug für die endgültige Durchführung einer Untersuchung. Bis weit über den Anfang des neunzehnten Jahrhunderts hinaus behielt diese rein arithmetische Richtung in der Mechanik die Oberhand und in Lagrange, dem Meister der analytischen Mechanik, erreichte sie ihren Höhepunkt.

Erst die Techniker, die mit dem neunzehnten Jahrhundert als ein wesentlich mitbestimmendes Element in den Kreis der wissenschaftlich Tätigen einzutreten begannen, haben hierin — wie in so vielen anderen Dingen — Wandel geschaffen und sowohl die zeichnerische wie die geometrische Behandlung der Mechanik wieder zu Ehren gebracht. Beides ist nämlich deshalb nicht genau dasselbe, weil man die Geometrie und

hiermit auch die Mechanik rein synthetisch betreiben kann, ohne darum die im Geiste entworfenen und durchgeführten Konstruktionen auf dem Papiere im Maßstabe verwirklichen zu müssen. Von den großen Meistern hat wohl Poncelet, der berühmte Militär-Ingenieur, der auch die synthetische Geometrie zu neuem Leben erweckte, der Befestiger von Metz, diesen Weg zuerst wieder eingeschlagen. Andere folgten ihm. Vor allen war es aber Culmann, der durch sein 1864 erschienenes bahnbrechendes Werk „Die graphische Statik" die graphische Methode namentlich für die Theorie der Baukonstruktionen zur allgemeinen Anerkennung und Einführung brachte.

Als Hülfsmittel für die Durchführung allgemeiner Betrachtungen benutzte Culmann in erster Linie die synthetische Geometrie. In diesem Punkte freilich folgte man ihm anderwärts, wenigstens nachdem sich der erste Eifer etwas gelegt hatte, minder bereitwillig, so rasch und freudig man auch im übrigen die zeichnerische Behandlung der Mechanik der Baukonstruktionen allenthalben aufnahm. Man fand bald heraus, daß der große praktische Wert der graphischen Methode von einer ausgedehnten Anwendung der projektivischen Geometrie ziemlich unabhängig ist. Der richtige Weg liegt indessen hier wohl in der Mitte. Übrigens hat Culmann selbst in der zweiten Auflage seines Werkes, von der der erste Band im Jahre 1875 erschien — der in Aussicht gestellte zweite Band blieb leider aus — neben der Geometrie auch von der Rechnung sehr ausgiebigen Gebrauch gemacht.

Heute pflegt man — verständigerweise — ohne besondere Bevorzugung des einen oder des anderen Verfahrens, bald die Zeichnung, bald die Rechnung anzuwenden, jenachdem sich diese oder jene im Einzelfalle besser eignet. Hierdurch ist die Bezeichnung „graphische Statik" ihres ursprünglichen Sinnes mehr oder weniger entkleidet worden. Die Techniker verstehen darunter gewöhnlich die Statik der Tragkonstruktionen überhaupt, ohne jene Teile, die besser auf dem Wege der Rechnung behandelt werden, davon auszuschließen. Abgesehen von manchen allgemeiner gehaltenen Untersuchungen, die in

der graphischen Statik am besten ihren Platz finden, habe ich mich auch selbst in meinen Vorlesungen diesem Gebrauche angeschlossen. Freilich darf man dabei nicht erwarten, die gesamte spezielle Theorie der Tragkonstruktionen in diesem Werke auseinandergesetzt zu finden. Nur die Erörterung der grundlegenden Untersuchungen und Methoden gehört in eine Vorlesung über technische Mechanik, während die weitere Ausführung und die Anwendung dieser Lehren beim Konstruieren von Bauwerken oder Maschinen den betreffenden Fachvorlesungen zu überlassen ist. — Die ihrem ursprünglichen Sinne nach nicht völlig zutreffende, mit dem heutigen Sprachgebrauche jedoch ganz gut in Übereinstimmung stehende Bezeichnung dieses Bandes erklärt sich hiernach aus dem historisch Gewordenen.

Im allgemeinen kann man sagen, daß sich die zeichnerische Behandlung vorwiegend für die Untersuchung eines bestimmt gegebenen Einzelfalles eignet. Für die Ableitung allgemein gültiger Sätze ist dagegen die Rechnung gewöhnlich im Vorteile, — obschon es in beiden Fällen nicht an Ausnahmen fehlt. Bei den Anwendungen der Statik auf die in der Praxis des Ingenieurs oder Architekten vorkommenden Aufgaben hat man es aber meistens mit genau umschriebenen Spezialfällen zu tun und hieraus erklärt sich der große praktische Nutzen des graphischen Verfahrens.

Zuweilen könnte wohl als ein Vorzug des rechnerischen Verfahrens der Umstand in Betracht kommen, daß die Rechnung eine beliebig genaue Annäherung gestattet, während diese bei der Zeichnung durch die unvermeidlichen Zeichenfehler von vornherein beschränkt ist. Tatsächlich reicht indessen die in der Zeichnung bei gewöhnlicher Sorgfalt zu erreichende Genauigkeit so ziemlich bei allen in der technischen Praxis vorkommenden Aufgaben vollständig aus, so daß sich der genannte Unterschied kaum jemals als ein wirklicher Nachteil des graphischen Verfahrens bemerkbar machen kann. Vielmehr kann umgekehrt die Leichtigkeit, mit der man gröbere Versehen in der Zeichnung herauszufinden vermag, während ein

gröberer Fehler in der Zahlenrechnung weit eher unbemerkt bleibt, als ein Vorzug des graphischen Verfahrens bezeichnet werden, der ganz anders ins Gewicht fällt, als jener geringe oder auch nur vermeintliche Nachteil.

Von den Lehren des ersten Bandes, die ich als bekannt voraussetze, kommen hier namentlich zwei einfache Sätze in Betracht. Zunächst der Satz, daß die Resultierende von Kräften, die an demselben Punkte angreifen, durch geometrische Summierung der Kräfte gefunden wird, oder daß sich im Falle des Gleichgewichts die zur Darstellung der Kräfte benutzten Strecken zu einem geschlossenen Vielecke aneinander reihen lassen müssen. Und dann der Satz, daß sich der Angriffspunkt einer an einem starren Körper angreifenden Kraft, so lange es auf die Verteilung der inneren Kräfte in dem Körper nicht ankommt, längs der Richtungslinie verlegen läßt, so daß in solchen Fällen die Angabe eines Angriffspunktes auf der Richtungslinie auch ganz entbehrt werden kann. Hieran schließt sich die Bemerkung, daß Gleichgewicht jedenfalls immer dann besteht, wenn die äußeren Kräfte entweder so an dem Körper verteilt sind, daß sie sich an jedem Angriffspunkte einzeln im Gleichgewichte halten oder auch dann, wenn sich das gegebene Kräftesystem (durch Anwendung des Satzes von der Verschiebung des Angriffspunktes, nötigenfalls unter Zufügung von neuen Kräften, die unter sich selbst im Gleichgewichte stehen) auf ein solches zurückführen läßt, das dieser Bedingung genügt.

Wenn die Richtungslinien der Kräfte, deren Resultierende gesucht wird, nicht alle in einer einzigen Ebene enthalten sind, wird der Linienzug, mit dessen Hülfe man ihre geometrische Summe bildet, windschief. Solche Fälle kommen nicht selten vor. Ihre Erledigung macht aber keine Schwierigkeiten: man braucht dazu nur die Projektionen des Linienzuges in mehreren Rissen zu zeichnen. Von den Methoden der darstellenden Geometrie muß man ohnehin schon Gebrauch machen, um die Richtungslinien der Kräfte in die Zeichnung des Körpers, an dem sie angreifen, einzutragen und es macht dann gar keine

weiteren Umstände, im Anschluß hieran auch das Kräftepolygon oder das Krafteck, wie es neuerdings von vielen lieber genannt wird, durch seine Risse darzustellen.

In Abb. 1 ist dies ausgeführt. An dem mit A in Abb. 1[a] bezeichneten Angriffspunkte, der durch Aufriß und Grundriß gegeben ist, greifen die mit 1, 2, 3 bezeichneten Kräfte an, die ebenfalls durch ihre Projektionen dargestellt sind. Man wähle nebenan in Abb. 1[b] einen Punkt O bezw. seine Projektionen in beiden Tafeln beliebig aus und setze von ihm aus die Strecken 1, 2, 3 im Sinne ihrer Pfeile aneinander. Dies geschieht, indem man die Projektionen der Kräfte in beiden Rissen aneinander reiht. Die von O aus nach dem Endpunkte des Linienzuges gehende Schlußlinie R des Kraftecks gibt die Resultierende an. Die Reihenfolge der Zusammensetzung ist, wie von früher her bekannt ist, ohne Einfluß auf das Resultat. Jedenfalls muß man aber darauf achten, daß die Pfeile der Kräfte 1, 2, 3 u. s. f. im gleichen Umlaufssinne aufeinanderfolgen, während der Pfeil von R diesem Umlaufssinne entgegengesetzt ist. Die absolute Größe der Resultierenden findet man durch Ermittelung der wahren Länge der durch die Projektionen dargestellten Strecke R, die nach demselben Maßstabe auszumessen ist, der schon beim Auftragen der gegebenen Kräfte 1, 2, 3 zugrunde gelegt wurde.

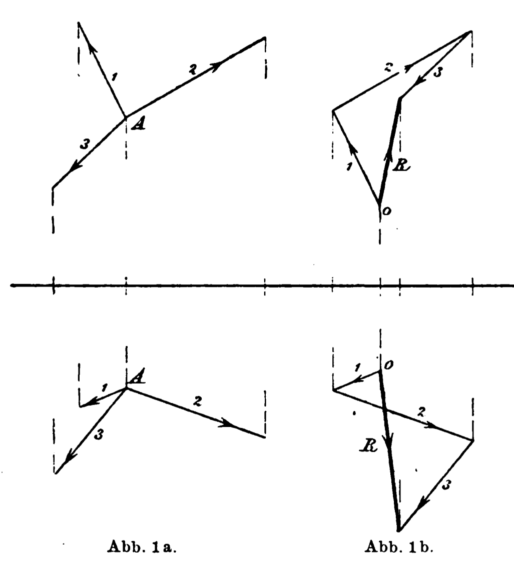


Abb. 1a. Abb. 1b.

Dieses Verfahren bleibt für eine beliebige Anzahl gegebener

Kräfte anwendbar. Hat man, wie in dem gewählten Beispiele, nur drei Kräfte zusammenzusetzen, so kann dies auch durch Konstruktion eines Parallelepipeds geschehen, wovon *A* eine Ecke ist, von der die drei Strecken 1, 2, 3 als Kanten ausgehen. Die von *A* aus gezogene Hauptdiagonale des Parallelepipeds gibt die Resultierende der drei Kräfte an. Dies folgt leicht daraus, daß die Hauptdiagonale eines Parallelepipeds als geometrische Summe der drei Kanten angesehen werden kann. Man stellt diesen Satz vom Kräfteparallelepipede gern dem Satze vom Kräfteparallelogramme gegenüber. Für die wirkliche Ermittelung von *R* ist aber die in Abb. 1 benutzte Konstruktion gewöhnlich weit einfacher und bequemer als die Konstruktion des Parallelepipeds.

Um die gleiche Aufgabe analytisch zu lösen, ermittelt man zunächst die Projektionen der Kräfte 1, 2, 3 auf drei zu einander rechtwinkligen Achsen. Die Componenten von *R* in den Richtungen dieser Achsen sind dann gleich den algebraischen Summen der Componenten der gegebenen Kräfte in denselben Achsenrichtungen. Hiermit ist auch die Größe von *R* als Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Componenten bekannt und die Richtung von *R* läßt sich durch die Cosinus der Winkel zwischen *R* und den Achsenrichtungen hinreichend beschreiben. Aus den Lehren von Band I geht dies bereits hinreichend hervor.

§ 2. Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$, die am Punkte *A* angreift (Abb. 2[a]), soll nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden. Diese Ebene möge als Zeichenebene gewählt sein. Unter der Zerlegung ist ein Ersatz von $\mathfrak{P}$ durch zwei in den bezeichneten Richtungslinien wirkende Kräfte zu verstehen. Die Zerlegung erfolgt mit Hülfe des in Abb. 2[b]

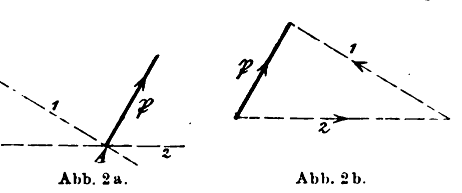


Abb. 2a. Abb. 2b.

gezeichneten Kräftedreiecks $\mathfrak{P}$, 1, 2, von dem die eine Seite $\mathfrak{P}$ vollständig gegeben ist, während von den beiden anderen Seiten die Richtungen bekannt sind. Bei der Festsetzung der den Seiten des Kräftedreiecks zugehörigen Pfeile hat man darauf zu achten, daß $\mathfrak{P}$ die Resultierende von 1 und 2 sein soll. — Auch mit Hülfe eines Kräfteparallelogramms, das unmittelbar vom Punkte A aus in den gegebenen Richtungen, mit $\mathfrak{P}$ als Diagonale, gezeichnet wird, läßt sich die verlangte Zerlegung ausführen. In der Regel ist aber die Benutzung eines nebenan besonders herausgezeichneten Kräftedreiecks für die Lösung der Aufgabe mehr zu empfehlen. Man sieht dies vielleicht zuerst nicht recht ein, wenn man nur einer so einfachen Zeichnung wie in Abb. 2 gegenübersteht; sobald dieselbe Konstruktion aber sehr oft wiederholt auf kleinem Raume in derselben Zeichnung durchgeführt werden muß, ist der Vorteil, den man durch Trennen des Kraftecks von der Zeichnung, in der die Kräfte gegeben sind, erlangt, sehr erheblich.

Die Zerlegungsaufgabe steht im engsten Zusammenhange mit einer Gleichgewichtsaufgabe. Weiß man nämlich, daß die vollständig gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ mit zwei andern Kräften, deren Richtungslinien 1, 2 bekannt sind, im Gleichgewichte stehen muß, so findet man aus der Konstruktion des Kräftedreiecks $\mathfrak{P}$, 1, 2 auch die Größen von 1 und 2. Der einzige Unterschied gegenüber dem vorigen Falle besteht darin, daß jetzt die Pfeile der Kräfte 1 und 2 umzukehren sind, weil die geometrische Summe aller drei Kräfte zu Null werden muß. Dasselbe trifft auch bei den andern Zerlegungsaufgaben zu, mit denen wir uns in der Folge noch zu beschäftigen haben werden und man kann daher jede Zerlegungsaufgabe als gleichbedeutend mit einer ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe betrachten.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ kann ferner auch in eindeutiger Weise nach drei durch ihren Angriffspunkt gehenden Richtungslinien zerlegt werden, wenn diese nicht in derselben Ebene liegen. Am einfachsten gestaltet sich hier die Lösung, oder wenigstens die zu einer Lösung führende Überlegung auf

Grund des Satzes vom Kräfteparallelepipede. Von diesem ist die Hauptdiagonale 𝔓 vollständig gegeben, während man zugleich die Richtungen der drei vom Angriffspunkte ausgehenden Kanten kennt. Man lege drei Ebenen durch diese drei Kanten und ziehe zu jeder durch den Endpunkt von 𝔓 eine parallele Ebene. Damit hat man die 6 Seitenflächen des Parallelepipeds, dessen Kanten und Eckpunkte nun leicht aufgesucht werden können.

In Abb. 3 ist dies für den Fall ausgeführt, daß zwei der gegebenen Richtungslinien, nämlich 1 und 2, in einer horizontalen Ebene liegen. Vereinfachungen dieser Art kommen nämlich bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion bei der praktischen Anwendung sehr häufig vor und es schien nützlich, um bei dem ersten Beispiele zu einer möglichst einfachen Figur zu gelangen, den einfacheren Fall von vornherein vorauszusetzen. Das Verfahren selbst bleibt sich ohnehin in allen Fällen gleich. Die Kraft 𝔓 ist durch die Strecken AB in Aufriß und Grundriß dargestellt. Man lege durch den Endpunkt B eine horizontale (d. h. zu 1, 2 parallele) Ebene und suche deren Schnittpunkt C mit der Richtungslinie 3 auf. Die Strecke AC gibt dann schon Größe, Richtung und Pfeil der Kraft 3 an. Die beiden andern Kräfte findet man hierauf am einfachsten durch Zerlegung der durch die Strecke CB dargestellten Kraft nach den Richtungen von 1 und 2, also durch Konstruktion eines Kräftedreiecks, von dem CB die vollständig gegebene Seite bildet. Im Grundrisse ist dies nebenan ausgeführt.

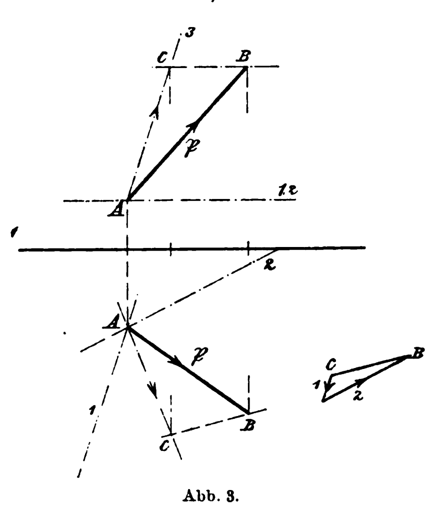


Abb. 3.

Gewöhnlich bedient man sich aber anderer Verfahren zur

Ausführung der Kräftezerlegung oder zur Lösung der ihr entsprechenden Gleichgewichtsaufgabe. Sehr häufig wird namentlich ein von Culmann angegebenes Verfahren benutzt, das in Anlehnung an eine öfters vorkommende Aufgabe näher erläutert werden mag. In Abb. 4[a] seien 1, 2, 3 die im Aufriß und Grundriß gezeichneten Stäbe eines sogenannten Bockgerüstes, die man sich oben gelenkförmig mit einander verbunden denken mag, während die unteren Endpunkte festgehalten sind. $\mathfrak{P}$ sei eine äußere Kraft, die an dem oberen Knotenpunkte angreift; es handele sich um die Bestimmung der drei Stabspannungen, die durch $\mathfrak{P}$ in den drei Stäben hervorgerufen werden.

Wenn die Stäbe an den unteren Endpunkten festgehalten sind, genügen sie, um eine Verschiebung des oberen Knotenpunktes zu verhindern, abgesehen von den kleinen Bewegungen, die durch die elastischen Längenänderungen der Stäbe unter dem Einfluß der in ihnen auftretenden Spannungen ermöglicht sind. Sieht man aber von diesen geringfügigen Längenänderungen ab, so ist die Lage des oberen Knotenpunktes durch die gegebenen Stablängen aus rein geometrischen Gründen, wie man leicht einsieht, fest vorgeschrieben. Daraus folgt, daß der Knotenpunkt unter dem Einfluß der auf ihn wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}$, 1, 2, 3 im Gleichgewichte bleiben muß. Aus der hiermit festgestellten Gleichgewichtsbedingung lassen sich die drei Stabspannungen ableiten.

Hierzu denke man sich die vier Kräfte in zwei Gruppen eingeteilt, von denen die eine aus den Stabspannungen 1 und 2, die andere aus $\mathfrak{P}$ und 3 gebildet wird. Jede dieser beiden Gruppen kann man sich durch eine Resultierende ersetzt denken. Die Resultierende aus 1 und 2 muß jedenfalls in der durch die Richtungslinien beider Stäbe bestimmten Ebene enthalten sein und ebenso die andere Resultierende in der durch $\mathfrak{P}$ und 3 gelegten Ebene. Da die vier Kräfte im Gleichgewichte standen, müssen auch die beiden Resultierenden Gleichgewicht mit einander halten. Dazu gehört aber, daß sie in die gleiche Richtungslinie fallen. Hiernach muß die gemeinsame Richtungs-

linie von beiden mit der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 𝔓, 3 zusammenfallen. Sobald man aber die Richtungslinie der Resultierenden aus 𝔓 und 3 kennt, steht nichts mehr im Wege, ein Kräftedreieck aus diesen drei Kräften zu zeichnen, das zunächt die Spannung im Stabe 3 und zugleich die Resultierende aus den beiden andern Stabspannungen kennen lehrt. Diese selbst ergeben sich schließlich durch Zeichnen eines zweiten Kräftedreiecks.

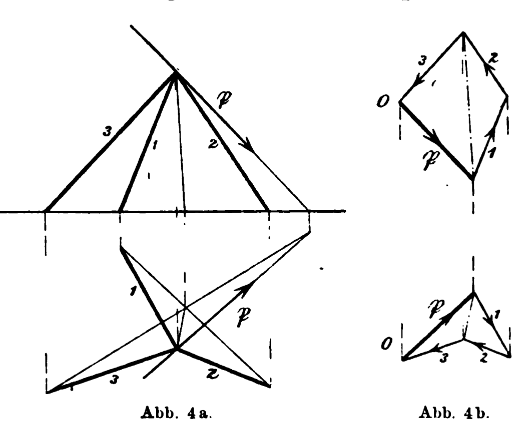


Abb. 4a. Abb. 4b.

In Abb. 4 sind alle diese Konstruktionen ausgeführt. Zuerst wurde in Abb. 4^{a} die horizontale Spur der Richtungslinie von 𝔓 aufgesucht. Die Verbindungslinie mit dem Fußpunkte des Stabes 3 liefert die horizontale Spur der Ebene 𝔓, 3. Die Spur der Ebene 1, 2 wird durch Verbinden der Fußpunkte beider Stäbe erhalten. Der Schnittpunkt der Spuren beider Ebenen liefert einen Punkt der gesuchten Schnittlinie und die Schnittlinie selbst wird durch Ziehen der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem oberen Knotenpunkte erhalten. Sie kann dann auch noch in den Aufriß eingetragen werden. Nach diesen Vorbereitungen kann man zur Konstruktion des in Abb. 4^{b} gezeichneten Kraftecks übergehen. Man trägt zunächst, von einem beliebigen Punkte O beginnend, die gegebene Last 𝔓 in Aufriß und Grundriß auf. Parallelen von den Endpunkten zu 3 und der Schnittlinie beider Ebenen in beiden Projektionstafeln liefern die Risse des ersten Kräftedreiecks. Zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient die Bemerkung, daß die Projektionen des dritten Dreieckspunktes in beiden Tafeln senkrecht übereinander

liegen müssen. Dann reiht man Parallelen zu 1 und 2 an, deren Schnittpunkte in beiden Projektionsebenen wiederum von selbst senkrecht übereinander liegen müssen. Man hat nun den ganzen windschiefen Kräftezug 𝔓, 1, 2, 3 vor sich und trägt nachträglich die Pfeile so ein, daß sie alle stetig aufeinander folgen.

Die Größe der Stabspannungen erhält man hierauf durch Ermittelung der wahren Längen der Krafteckseiten. In der Abbildung ist dies nicht weiter ausgeführt. Ferner ergibt sich aus den Pfeilen, ob die Stäbe gezogen oder gedrückt sind. Hierzu beachte man, daß sich die Pfeile auf jene Kräfte beziehen, die von den Stäben auf den als materiellen Punkt aufgefaßten Knotenpunkt übertragen werden. Die rückwärts von dem Knotenpunkte auf die Stäbe übertragenen Kräfte haben nach dem Wechselwirkungsgesetze entgegengesetzte Richtung. Man muß sich dies genau klar machen, weil sonst leicht Fehler in der Bestimmung des Vorzeichens der Stabspannungen vorkommen. Ein Stab, der gezogen ist (für welchen Fall wir der Stabspannung das positive Vorzeichen geben wollen), sucht sich wieder zu verkürzen; er äußert daher an jedem seiner beiden Endpunkte eine Kraft, die diesen Endpunkt nach der Stabmitte hin zu bewegen sucht. Umgekehrt sucht ein gedrückter Stab die Endpunkte (oder die Körper, die ihn an diesen Endpunkten fassen) auseinander zu schieben. Ein Pfeil im Kraftecke der Abb. 4, der an den Knotenpunkt übertragen von der Stabmitte abgewendet ist, zeigt daher eine Druckspannung im Stabe an. Auf Grund dieser Überlegung findet man aus der Zeichnung, daß die Stäbe 1 und 2 bei der angenommenen Belastung des Bockgerüstes gedrückt sind, während 3 gezogen ist.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe, die sich auf eine auch sonst in der graphischen Statik sehr häufig benutzte Überlegung stützt, rührt von Müller-Breslau her. Man beginnt bei ihr sofort mit der Konstruktion des windschiefen Kräftevierecks der Kräfte 𝔓, 1, 2, 3. Die Seite 𝔓 kann im Aufrisse und Grundrisse ohne weiteres aufgetragen

werden. An beiden Enden dieser Seite zieht man Parallelen zu den Richtungen der Stabkräfte 1 und 3 (oder überhaupt zu irgend zwei der drei Stabrichtungen). Es handelt sich dann nur noch darum, zwischen diese beiden Linien die ihrer Richtung nach gegebene Seite 2 so einzuschieben, daß ihre Endpunkte auf die Linien 1 und 3 fallen.

Zu diesem Zwecke beginnt man damit (vgl. Abb. 5[b]), irgendwo eine Strecke 2′ im Grundrisse in der vorgeschriebenen Richtung zwischen die Linien 1 und 3 zu legen. Im Aufrisse

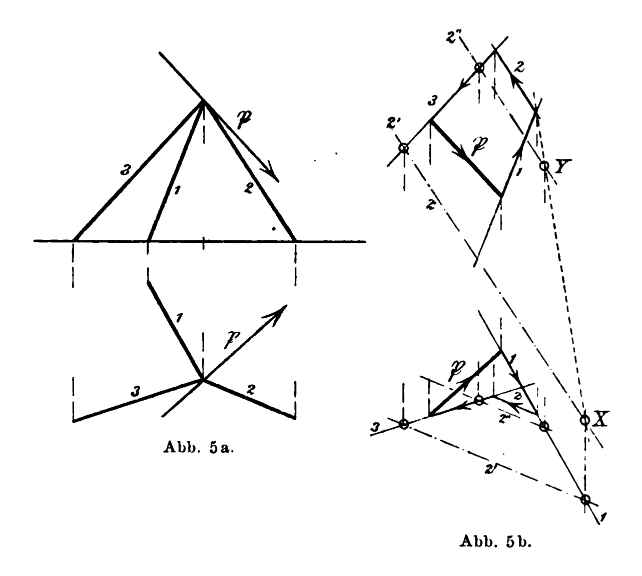


Abb. 5a. Abb. 5b.

nehme man etwa den linken Eckpunkt auf der Projektion von 3 an und ziehe die Linie 2′ dort ebenfalls in der ihr vorgeschriebenen Richtung. Der rechte Eckpunkt X ist damit bestimmt. Sollte nun die Strecke 2′ zufällig richtig gewählt gewesen sein, so müßte der Punkt X auf der Vertikalprojektion von 1 enthalten sein. Im allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man verwirft daher die getroffene Wahl und wiederholt die Konstruktion unter einer andern beliebigen Annahme 2″ für 2, womit man auf einen Eckpunkt Y an Stelle von X gelangt, der aber im allgemeinen wieder nicht auf der

Vertikalprojektion von 1 enthalten ist. Es könnte nun scheinen, als wenn man die gleiche Konstruktion noch sehr oft wiederholen müßte, bis man die richtige Lage von 2 ausprobiert hätte. Hier kommt uns aber ein Satz der projektivischen Geometrie zur Hülfe, der nun schnell zu der gesuchten Lösung führt.

Dieser Satz, der auch bei vielen andern Konstruktionen der graphischen Statik mit großem Nutzen verwendet wird, lautet:

„Drehen sich die Seiten eines veränderlichen n-Ecks um feste Punkte, die auf einer Geraden liegen, und verschieben sich hierbei zugleich $n-1$ Ecken längs beliebig gegebener Geraden, so beschreibt auch die letzte Ecke eine Gerade.“

In Abb. 6 sei $ABCD$ die Anfangsgestalt des veränderlichen n-Ecks, das wir etwa als Viereck voraussetzen wollen. Die Seiten mögen sich um die auf einer Geraden liegenden Punkte E, F, G, H drehen, während drei Ecken A, B, C auf den beliebig gewählten Geraden α, β, γ fortschreiten. Eine neue Lage erhält man, indem man B' auf β beliebig annimmt, hierauf die Seitenrichtungen $B'D'$ durch E und $B'A'$ durch F zieht, im Punkte A' die Seite $A'C'$ durch Punkt G anträgt und von C' aus die Richtung der Seite $C'D'$ durch Punkt H führt. Der vierte Eckpunkt D' ergibt sich dann als Schnittpunkt der Linien EB' und HC'. Um zu erkennen, daß auch D auf einer geraden Linie nach D' hin fortwandert, beachte man, daß die Seiten des veränderlichen Vielecks projektivische Strahlenbüschel um die Strahlencentren $EFGH$ beschreiben, indem je zwei aufeinander folgende perspektivisch zueinander liegen. Jedenfalls ist also auch Strahlenbüschel E projektivisch

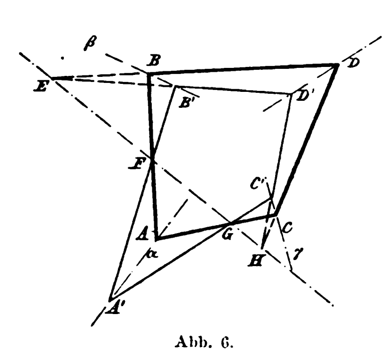


Abb. 6.

zum Büschel H. Der Schnitt von zwei projektivischen Strahlenbüscheln ist nun zwar im allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung. Hier sind aber die Büschel E und H nicht nur projektivisch, sondern zugleich perspektivisch zu einander, da sie den die beiden Centren E und H verbindenden Strahl entsprechend gemeinsam haben. Eine besondere Lage des veränderlichen Vielecks ist nämlich auch jene, bei der alle Seiten und alle Eckpunkte auf die Gerade EH fallen. Der Punkt D beschreibt hiernach als Schnitt von zwei perspektivischen Strahlenbüscheln in der Tat eine Gerade. — Auch ein stereometrischer Beweis des Satzes läßt sich leicht geben, wovon aber hier abgesehen werden kann.

Kehrt man nun zur Betrachtung von Abb. 5^b zurück, so erkennt man, daß jeder beliebig getroffenen Wahl $2'$ oder $2''$ von 2 im Grundrisse ein Viereck (nämlich ein Trapez) in der Figur entspricht, das aus dieser Strecke, den sich beiderseits anschließenden Projektionsstrahlen und dem zugehörigen Aufrisse gebildet wird. Die entsprechenden Seiten aller dieser Vierecke sind parallel zu einander, d. h. sie drehen sich, wenn man von einem zu einem andern Vierecke übergeht, wie wir sagen können, um unendlich ferne Punkte, die auf der unendlich fernen Geraden der Ebene enthalten sind. Zugleich schreiten drei Eckpunkte auf den Geraden 1 und 3 des Grundrisses und 3 des Aufrisses weiter. Die Voraussetzungen des zuvor bewiesenen geometrischen Satzes sind hiernach erfüllt und wir schließen, daß auch die vierte Ecke auf einer Geraden fortschreiten muß, von der zwei Punkte, nämlich X und Y, bereits bekannt sind. Verbinden wir daher X und Y durch eine Gerade, so muß auf dieser auch der vierte Eckpunkt des Vierecks enthalten sein, das wir suchen. Der Schnittpunkt der Geraden XY mit 1 im Aufrisse liefert diesen Eckpunkt und von ihm aus können wir 2 im Aufriß richtig eintragen, worauf auch der zugehörige Grundriß folgt. Man hat hierbei noch eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der zu 2 im Aufrisse konstruierte Grundriß von selbst in die vorgeschriebene Richtung fallen muß. — Die Beschreibung

und Begründung des Verfahrens machte zwar eine längere Auseinandersetzung nötig: die wirkliche Ausführung der Zeichnung erfordert aber nur das Ziehen weniger Linien und gestaltet sich ganz einfach.

Dieselbe Aufgabe kann schließlich auch noch analytisch gelöst werden. Man zieht zu diesem Zwecke drei rechtwinklig aufeinander stehende Coordinatenachsen und ermittelt die Winkel zwischen den Stabrichtungen und den Coordinatenrichtungen sowie die Projektionen $P_1 P_2 P_3$ von $\mathfrak{P}$ auf die Coordinatenachsen. Bezeichnet man dann die Spannung des Stabes 1 mit S_1 und die Richtungswinkel dieses Stabes mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und ähnlich bei den übrigen Stäben, so findet man die Unbekannten $S_1 S_2 S_3$ durch Auflösen der drei Componentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 + S_3 \cos\alpha_3 = P_1, \\ S_1 \cos\beta_1 + S_2 \cos\beta_2 + S_3 \cos\beta_3 = P_2, \\ S_1 \cos\gamma_1 + S_2 \cos\gamma_2 + S_3 \cos\gamma_3 = P_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die alle vom ersten Grade sind. Die Ermittelung der Winkel und die Auflösung der Gleichungen verursacht aber in der Regel weit mehr Mühe, als irgend eine der vorher besprochenen graphischen Lösungen.

Schließlich muß noch darauf hingewiesen werden, daß die Aufgabe keine Lösung mehr zuläßt, sobald die drei Stäbe in derselben Ebene enthalten sind. Dieser Ausnahmefall, der in ähnlicher Weise auch noch bei manchen andern Untersuchungen wiederkehren wird, erfordert noch eine aufmerksame Betrachtung. Er läßt sich in zwei Unterfälle spalten, die durch die Abb. 7 und 8 in achsonometrischer Zeichnung wiedergegeben sind. Im Falle der Abb. 7 liegen zugleich die Fußpunkte A, B, C der drei Stäbe auf einer Geraden. Man sieht hier sofort ein, daß der obere Knotenpunkt durch die drei Stäbe nicht mehr in seiner Lage festgehalten werden kann:

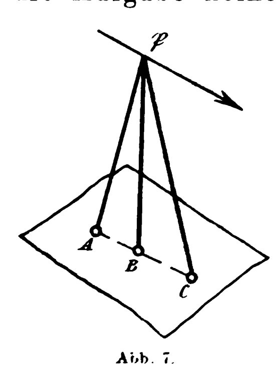


Abb. 7.

er vermag sich vielmehr um die Gerade ABC ohne Widerstand zu drehen. Schon aus dieser geometrischen Betrachtung erkennt man, daß durch die Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am oberen Knotenpunkte hergestellt werden kann; es sei denn, daß die Kraft $\mathfrak{P}$ zufällig auch in der Stabebene liegt. Auch mechanisch geht dies daraus hervor, daß die Resultierende der drei Stabspannungen notwendig wieder in der Stabebene liegen muß und daher mit einer Kraft, die zu dieser Ebene unter irgend einem Winkel geneigt ist, nicht im Gleichgewichte stehen kann. Liegt aber $\mathfrak{P}$ selbst in der Stabebene, so bleibt die Aufgabe statisch unbestimmt, da man einer Stabspannung einen beliebigen Wert beilegen und durch geeignete Wahl der beiden andern Gleichgewicht herstellen könnte.

In dem durch Abb. 8 dargestellten Falle liegen die Fußpunkte A, B, C der drei Stäbe nicht mehr in einer Geraden, die Stäbe selbst aber immer noch in einer Ebene. Man nehme etwa an, daß zwei der Stäbe unmittelbar am Fußboden befestigt sind, während der Fußpunkt B des dritten Stabes auf irgend einer Erhöhung liegt, die um BB' über den Fußboden emporragt. In diesem Falle ist zwar eine endliche Verschiebung des oberen Knotenpunktes ohne Änderung der Stablängen nicht mehr möglich, wohl aber, wie man zu sagen pflegt, eine unendlich kleine. Der obere Knotenpunkt vermag sich nämlich um eine unendlich kleine Strecke senkrecht zur Stabebene zu verschieben, ohne daß sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung zu ändern brauchten, d. h. der Knotenpunktsweg ist ungemein groß gegenüber den sehr kleinen Änderungen der Stablängen, die wegen der Elastizität der Stäbe zu erwarten sind. Man erkennt dies leicht daraus, daß sich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von

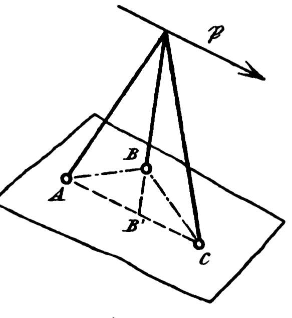


Abb. 8.

dem eine Kathete unendlich klein ist, nur um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung von der andern Kathete unterscheidet. — Sobald eine solche Verschiebung des Knotenpunktes eingetreten ist, liegen die drei Stäbe nachher nicht mehr genau in derselben Ebene, so daß schließlich doch wieder Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und der Belastung $\mathfrak{P}$ zustande kommen kann.

Hierbei ist aber noch zu beachten, daß die Stabspannungen sehr groß im Verhältnisse zur Last $\mathfrak{P}$ gefunden werden, wenn die Stäbe zwar nicht genau, aber nahezu in einer Ebene liegen. Man pflegt daher auch zu sagen, daß die Stabspannungen im Ausnahmefalle unendlich groß werden müßten, womit nur ausgedrückt werden soll, daß selbst durch noch so große Stabspannungen kein Gleichgewicht mehr am Knotenpunkte — im Falle der Abb. 8 wenigstens nicht ohne eine vorausgehende Verschiebung des Knotenpunktes — hergestellt werden könnte.

Im Ausnahmefalle wird die Determinante der Koeffizienten aller S in den Gleichungen (1) zu Null; die Auflösung dieser Gleichungen führt daher beim analytischen Verfahren unmittelbar zu den Werten ∞ für die Stabspannungen.

§ 3. Kräftepläne für einfache Dachbinder.

Zu den einfachsten und häufigsten Anwendungen der graphischen Statik gehört die Ermittelung der Stabspannungen in einfachen Dachbindern oder ihnen ähnlich gestalteten Brückenträgern. Sie beruht auf einer mehrfachen Wiederholung der im Anschlusse an Abb. 2 besprochenen Lösung der Aufgabe, eine gegebene Kraft nach zwei mit ihr in derselben Ebene liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Freilich knüpfen sich daran alsbald noch weitergehende Überlegungen, die eine eingehende Besprechung erfordern.

Zur Erläuterung bemerke ich zunächst, daß man zur Errichtung von Brücken oder ähnlichen Tragkonstruktionen vor allem zwei, oder bei freitragenden Dächern eine größere Zahl von „Hauptträgern“ oder „Bindern“ in parallelen, lotrechten Ebenen aufzustellen pflegt, die die ganze Spannweite über-

decken. Auf diese Binder stützen sich bei den Dächern die „Pfetten“, die „Sparren“ und die „Haut“ des Daches, bei den Brücken die Konstruktionen der „Fahrbahn“. Die Last aller dieser „Sekundärkonstruktionen“ wird auf die Binder an den „Knotenpunkten“ übertragen. Die Binder bestehen — wenigstens in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, der uns hier beschäftigen soll — aus ebenen Stabverbänden, deren geometrische Figur eine Aneinanderreihung von Dreiecken bildet, so daß sich vom einen Ende anfangend, jedes folgende Dreieck mit einer Seite und zwei Eckpunkten an das vorausgehende anschließt. Diese Eckpunkte werden die Knotenpunkte des Binders genannt. Da die Gestalt eines Dreiecks unveränderlich ist, so lange die Seiten ihre Längen behalten, ist unter der gleichen Voraussetzung auch die aus allen diesen Dreiecken zusammengesetzte Binderfigur von unveränderlicher Gestalt. Das ist es aber, was man von einer Tragkonstruktion verlangen muß.

Man erkennt aus dieser einfachen geometrischen Betrachtung, daß es möglich ist, aus Stäben, die nur gegen Längenänderungen, also gegen Zug- oder Druckbeanspruchung hinreichend widerstandsfähig sein müssen, während sie gegen Biegungen nur wenig widerstandsfähig zu sein brauchen, einen tragfähigen Stabverband nach dem besprochenen Plane herzustellen. Der Vorteil, den man hiermit erreicht, liegt darin, daß die Zug- oder Druckfestigkeit eines langen Stabes von verhältnismäßig kleinem Querschnitte weit größer ist, als die Biegungsfestigkeit gegenüber gleichen Lasten. — Wegen des geringen Biegungswiderstandes der Stäbe sieht man von diesem bei der Berechnung der Stabspannungen gewöhnlich ganz ab, achtet also nur auf die Kräfte, die in der Richtung der Stabmittellinien von einem Endpunkte zum andern übertragen werden. Es genügt dann, jeden Stab durch eine Strecke zu veranschaulichen, die man sich längs der Mittellinie des Stabes gezogen zu denken hat. Die von der Sekundärkonstruktion auf die Knotenpunkte des Binders übertragenen Lasten sind als gegeben anzusehen; es handelt sich dann um die Berechnung der von ihnen hervorgerufenen Stabspannungen.

Dies sei zunächst an dem Beispiele des viel angewendeten einfachen Polonçeau- oder Wiegmannbinders in Abb. 9ª erläutert. Die Binderfigur entsteht durch Aneinanderreihung von 5 Dreiecken und hat eine lotrechte Symmetrieachse. Der Stab 6 liegt gewöhnlich etwas höher als die Verbindungslinie beider Auflagerknotenpunkte; doch ist dies nicht wesentlich, die Stäbe

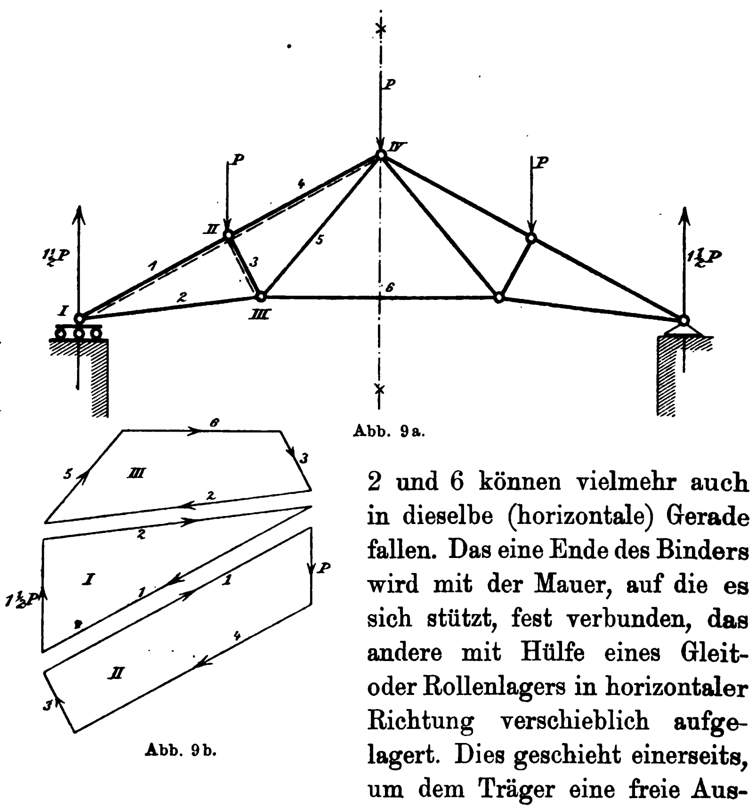


Abb. 9a.

Abb. 9b.

2 und 6 können vielmehr auch in dieselbe (horizontale) Gerade fallen. Das eine Ende des Binders wird mit der Mauer, auf die es sich stützt, fest verbunden, das andere mit Hülfe eines Gleit- oder Rollenlagers in horizontaler Richtung verschieblich aufgelagert. Dies geschieht einerseits, um dem Träger eine freie Ausdehnung oder Zusammenziehung bei Temperaturänderungen zu gestatten, andererseits um einen Seitenschub auf die Mauern, solange nur senkrecht gerichtete Lasten vorkommen, zu vermeiden. Das Rollenlager ist in der Zeichnung am linken Ende angenommen und durch einige kleine Kreise angedeutet. Da die rollende Reibung nur sehr gering ist, kann der Auflager-

druck auf dieser Seite unter allen Umständen als lotrecht gerichtet angesehen werden. Falls nur lotrechte Lasten auf den Binder wirken, muß aber auch der Auflagerdruck am festen Auflager lotrecht gerichtet sein, weil die geometrische Summe aller äußeren Kräfte, also der Lasten und der beiden Auflagerdrücke, zu Null werden muß. In der Abbildung ist ferner angenommen, daß auf die drei mittleren Knotenpunkte der oberen „Gurtung" (so nennt man den Zug der aufeinanderfolgenden Stäbe 1, 4 u. s. f., die die Binderfigur nach oben hin begrenzen) gleich große Lasten P einwirken. Der Symmetrie wegen ist dann der Auflagerdruck auf jeder Seite gleich der Hälfte dieser Lasten, also gleich $1^1/_2\,P$. Eine Last, die etwa außerdem noch auf einen Auflagerknotenpunkt wirkt, kommt für den Binder nicht in Betracht, da sie unmittelbar auf die Mauer übertragen wird, ohne Stabspannungen hervorzurufen.

Aus der Symmetrie der Gestalt und der Belastung folgt auch, daß die spiegelbildlich zueinander liegenden Stäbe gleiche Spannungen erfahren. Es genügt daher, die zur linken Hälfte der Figur gehörigen Stabspannungen zu berechnen. Diese sind daher auch allein mit arabischen Ordnungsnummern bezeichnet, während den Knotenpunkten römische Ziffern beigeschrieben sind.

Man beginnt mit der Betrachtung des Gleichgewichts der Kräfte am Knotenpunkte I. Hier müssen die von den Stäben 1 und 2 übertragenen Spannungen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen in die Richtungen der Stäbe fallen, mit dem Auflagerdrucke $1^1/_2\,P$ im Gleichgewichte stehen. Man kann also sofort das ebenfalls mit I bezeichnete Kräftedreieck in Abb. 9^b zeichnen. Der Pfeil des Auflagerdrucks geht nach oben und damit folgen auch die beiden andern in die Abbildung eingetragenen Pfeile, da alle drei im selben Umlaufssinne aufeinander folgen müssen. Denkt man sich den Pfeil von 1 in die Binderfigur nach dem Knotenpunkte I übertragen, so erkennt man, daß die Stabspannung 1 den Knotenpunkt I vom Stabe fort zu bewegen sucht. Der Stab 1 ist daher gedrückt.

Ebenso erkennt man, daß Stab 2 gezogen ist. Es ist üblich, die gedrückten Stäbe in der Binderfigur durch Beisetzen von Schattenstrichen zu kennzeichnen. Dies ist in der Abbildung durch gestrichelte Linien geschehen, die neben den Stäben her laufen.

Hierauf geht man zu einem andern Knotenpunkte weiter, an dem nur noch zwei der Größe nach unbekannte Kräfte angreifen. Dies ist in unserem Falle Knotenpunkt II. Die Stabspannung 1 ist nämlich aus der vorhergehenden Untersuchung bereits bekannt; wir müssen nur beachten, daß sie am Knotenpunkte II mit dem entgegengesetzten Pfeile angreift, als am Knotenpunkte I. Wir zeichnen hiernach das ebenfalls mit II bezeichnete Kräfteviereck, indem wir zuerst 1 und die Last P mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander reihen und dann durch die Endpunkte Parallelen zu den Richtungen der Stäbe 3 und 4 ziehen. Die Pfeile sind wieder einzutragen und nach ihnen festzustellen, daß die Stäbe 3 und 4 beide gedrückt sind, genau wie dies vorher geschehen war. Da die gleiche Seite 1 im Kraftecke II wie in I vorkommt, wurden, um dies hervorzuheben, beide Kraftecke unmittelbar untereinander gezeichnet.

Dann geht man zu Knotenpunkt III über und verfährt ebenso. Die Stabspannungen 2 und 3 kennt man schon aus den vorausgehenden Kraftecken und man hat nur zu beachten, daß beide entgegengesetzte Pfeile erhalten müssen, als in den früheren Fällen. Man reiht also im Kraftecke III die nach Größe und Pfeil bekannten Strecken 3 und 2 mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander und zieht die Parallelen zu 5 und 6. Dann kennt man bereits alle Stabspannungen; die Stäbe 5 und 6 sind beide gezogen.

Die Aufgabe ist hiermit gelöst; aber noch nicht auf dem einfachsten Wege. Zunächst erkennt man sofort, daß die Zeichnung vereinfacht wird, wenn man die übereinander liegenden Kraftecke mit den gleich bezeichneten Seiten 1 und 2 zu einer einzigen Figur zusammenrückt. Man spart dadurch nicht nur einige Linien und etwas Platz, sondern die Zeichnung kann

auch genauer ausgeführt werden, je weniger Linien sie im ganzen enthält. Bei den Anwendungen in der Praxis zieht man daher alle Kraftecke stets zu einer einzigen Figur zusammen, die man den Kräfteplan nennt. In Abb. 10, die sich von Abb. 9^b im übrigen gar nicht unterscheidet, ist dies ausgeführt. Nur die eine kleine Unbequemlichkeit muß man dabei mit in den Kauf nehmen, daß man die Pfeile auf die gemeinsamen Seiten von zwei aneinander grenzenden Kraftecken nicht mehr unmittelbar eintragen kann, da im einen Krafteck der eine, im andern der entgegengesetzte Pfeil gilt. Hat man, wie in Abb. 10, die einzelnen Kraftecke so eingerichtet, daß sie alle einfache Polygone bilden, die sich nicht überschlagen und die nebeneinander liegen, ohne sich zu überdecken, so kann man sich allerdings, wie es auch in der Figur geschehen ist, leicht dadurch helfen, daß man nicht mehr auf den Linien 1 und 2 selbst, aber zu beiden Seiten davon zwei Pfeile angibt, von denen jeder zu jenem Polygone gehört, in dessen Fläche er hinein fällt.

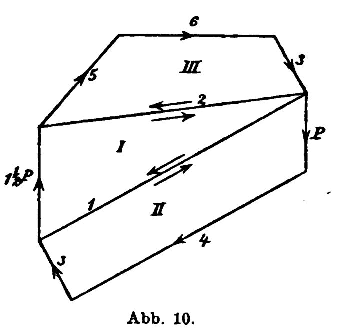


Abb. 10.

Aber auch hiermit sind wir noch nicht zu dem einfachsten, d. h. aus der Mindestzahl von Linien gebildeten Kräfteplane gelangt. In den Kraftecken II und III kommt noch dieselbe Stabspannung 3 vor und man muß diese Strecke aus dem einen entnehmen und sie in das andere eintragen, was nicht nur unbequem, sondern auch mit unvermeidlichen kleinen Zeichenfehlern verbunden ist. Bei einem so einfachen Beispiele, wie wir es im Augenblicke behandeln, macht dies freilich nicht viel aus; wir wollen aber das Verfahren schon hier so ausbilden, wie es in verwickelteren Fällen am besten verwendet wird. Daß man den Kräfteplan auch so einrichten kann, daß jede Stabspannung nur einmal in ihm als Seite vorkommt, erkennt man sofort aus Abb. 11, die in allen Strecken vollkommen mit

Abb. 10 übereinstimmt und sich nur durch die verschiedene Anordnung der Kraftecke von ihr unterscheidet. Um die Entstehungsart dieser Figur deutlich hervorzuheben — und nur aus diesem Grunde, der späterhin, wenn man sich mit diesen Dingen erst vertraut gemacht hat, wegfällt — ist das Krafteck I, das mit dem in Abb. 10 übereinstimmt, durch starke Striche hervorgehoben. Das Krafteck II (diese Bezeichnungen sind in der Figur weggelassen), oder wenigstens die Seiten, die hinzutreten müssen, um dieses Krafteck zu bilden, sind mit schwächeren Strichen ausgezogen, während die beim Kraftecke III neu hinzukommenden Seiten durch gestrichelte Linien angegeben sind. Das Krafteck II ist mit dem ihm in Abb. 10 entsprechenden immer noch kongruent; es ist nur um 180° dagegen gedreht und überdeckt sich mit dem Kraftecke I. Auf ein Beisetzen von Pfeilen muß man hier freilich verzichten, da z. B. bei der Seite 1 nicht ersichtlich gemacht werden könnte, welcher von beiden Pfeilen zum Kraftecke I oder zu II gehören soll. Auf diesen kleinen Nachteil legt man aber nicht viel Gewicht, da man sich bei einiger Übung sehr leicht daran gewöhnt, die Pfeile jedesmal in Gedanken richtig beizufügen, sobald man auf irgend eins der in dem Kräfteplan enthaltenen Kraftecke sein Augenmerk richtet.

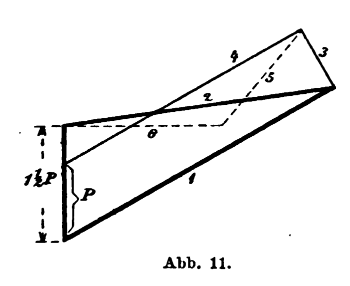


Abb. 11.

Das Krafteck III ist in Abb. 11 überschlagen. Man hätte es auch so wie in Abb. 10 zeichnen können, da man das Aneinanderschließen der Seiten 3 und 2, wodurch ein wiederholtes Auftragen von 3 entbehrlich gemacht werden sollte, schon durch die passende Übereinanderlagerung der Kraftecke I und II erreicht hat. Daß es so wie geschehen gezeichnet wurde, hat nur den Zweck, einer Fortsetzung des Kräfteplanes auf die übrigen Knotenpunkte den Weg vorzubereiten. Hier kommt eine solche Fortsetzung freilich nicht in Betracht; falls aber die Lasten nicht symmetrisch verteilt sind, wie sie hier

angenommen wurden, muß man den Kräfteplan auch für die rechte Hälfte des Binders weiter zeichnen. Man kommt dann zum Kraftecke IV und findet hierfür die Zeichnung in Abb. 11 schon vorbereitet, da sich die am Knotenpunkte IV angreifenden bekannten Stabspannungen 4 und 5 schon in richtiger Aufeinanderfolge in der Figur vorfinden. Hätte man das Krafteck III so wie in Abb. 10 gewählt, so würde dies nicht zutreffen.

Neuerdings verwendet man überall, wo es angeht, fast nur noch die nach dem Muster der Abb. 11 angeordneten Kräftepläne. Sie werden aus einem Grunde, der bald hervortreten wird, als reciproke Kräftepläne oder auch als Cremonasche Kräftepläne bezeichnet, weil Cremona sie, wenn auch nicht selbst zuerst einführte, so doch eingehend in bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften untersuchte und dadurch ihrer Anwendung in der graphischen Statik den Weg ebnete. Gerechter wäre es eigentlich, sie als Bowsche Kräftepläne zu bezeichnen, da von dem Engländer Bow zuerst eine leicht befolgbare Anweisung dafür gegeben wurde, wie sie in den gewöhnlich vorliegenden einfachen Fällen konstruiert werden können.

§ 4. **Die reciproken Kräftepläne.**

Wir wollen uns jetzt genauer überlegen, wie man den Kräfteplan einrichten muß, um zu erreichen, daß jede Stabspannung in ihm nur einmal als Seite vorkommt, oder so, mit andern Worten, daß man beim Übergange zum folgenden Kraftecke die dazu gehörigen bekannten Stabspannungen schon in richtiger Lage zu einander vorfindet. Dabei sollen sich aber unsere Betrachtungen, wie es an dieser Stelle auch nicht anders sein kann, immer noch in erster Linie auf einfache Binderfiguren beziehen, d. h. auf solche, die in der vorher beschriebenen Weise durch Nebeneinanderlegen von Dreiecken, von denen sich jedes folgende mit einer Seite an das vorhergehende anschließt, erhalten werden können. Im übrigen können indessen Zahl und Gestalt dieser Dreiecke beliebig sein.

Zu diesem Zwecke müssen wir uns zunächst die geometrischen Beziehungen zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane klar machen. Zur Binderfigur wollen wir hierbei auch die Richtungslinien der äußeren Kräfte (der Lasten und der Auflagerkräfte) rechnen. Dann ist zunächst klar, daß jeder Linie in der einen Figur eine zu ihr parallele Linie in der andern Figur entsprechen muß, wenn der Kräfteplan so gezeichnet ist, wie wir ihn wünschen. Ferner entspricht auch jedem Punkte in der Binderfigur ein Polygon im Kräfteplane, nämlich das diesem Knotenpunkte zugehörige Krafteck.

Man kann aber leicht zeigen, daß auch umgekehrt jedem Punkte im Kräfteplane, an dem mehrere Stabspannungen aneinander stoßen, ein Polygon in der Binderfigur entsprechen muß. Dies soll zunächst an dem bereits in Abb. 11 vorliegenden Kräfteplane nachgewiesen werden. Man betrachte etwa den Punkt, in dem die Seiten 1, 2, 3 zusammen stoßen. Dieser Punkt wird (ebenso wie jeder andere, von dem keine der äußeren Kräfte ausgeht) während der Konstruktion des Kräfteplanes zuerst durch Schnitt von zwei Linien (hier der Linien 1 und 2) gefunden. Diese beiden Linien gehören zu einem Kraftecke, das sich auf einen der Knotenpunkte (hier I) des Binders bezieht. Hiernach gehen die Seiten 1 und 2 im Binder jedenfalls von einem Punkte (nämlich hier von I) aus und sie schließen sich daher schon so aneinander, wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone. Man wird zugleich bemerken, daß dieser Schluß ganz allgemein und nicht nur für das hier zur Erleichterung der Vorstellung gewählte Beispiel zutrifft; wenn man dieses entbehren zu können glaubt, möge man den Betrachtungen nur ohne Beachtung des Beispiels folgen und man wird sie dann unter allen Umständen zutreffend finden.

Nun bedenke man, daß jeder Stab zwei Knotenpunkte verbindet und daß daher in dem für die ganze Binderfigur bis zu Ende durchgeführten Kräfteplane auch jede Seite, die eine Stabspannung angibt, zu zwei Kraftecken gehört. Bisher haben wir nur eines der Kraftecke ins Auge gefaßt, die im

Punkte 1, 2, 3 zusammenstoßen. Die Seite 1 gehört aber jedenfalls noch zu einem zweiten Kraftecke (hier II) und im Punkte 1, 2, 3 muß sich daher an 1 noch eine andere Stabspannung anreihen, da wir angenommen haben, daß im Punkte 1, 2, 3 keine äußeren Kräfte anstoßen sollen. Diese andere Stabspannung (hier 3) greift aber in der Binderfigur mit 1 an demselben Knotenpunkte an und demnach schließen sich im Binder auch 1 und 3 aneinander an wie zwei aufeinander folgende Seiten in einem Polygone.

Aber auch die Stabspannung 3 kommt jedenfalls noch in einem andern Kraftecke vor. Am Punkte 1, 2, 3 muß sich daher außer 1 auch noch eine andere Stabspannung (hier 2) an sie anschließen und wir schließen wieder wie vorher, daß sich beide (nämlich 3 und 2) in der Binderfigur an dem betreffenden Knotenpunkte (III) aufeinander folgen müssen. Im vorliegenden Falle sind wir damit schon zur ersten Stabspannung zurückgelangt, von der wir bei dieser Betrachtung ausgingen. In der Binderfigur schließen sich alle, wie bewiesen, aneinander an und wenn wir zur ersten zurückkehren, so bilden sie dort ein geschlossenes Polygon. Zugleich erkennt man aber, daß dieselbe Schlußweise, wenn mehr als drei Stabspannungen an einem Punkte des Kräftepolygons zusammenstoßen sollten, in der gleichen Art fortgesetzt werden könnte, bis man schließlich wieder, nachdem alle andern Seiten erschöpft sind, zur ersten zurückkommen müßte. Hiernach ist ganz allgemein bewiesen, daß jedem Eckpunkte eines reciproken Kräfteplanes, von dem keine äußeren Kräfte ausgehen, ein geschlossenes Polygon in der Binderfigur entsprechen muß, dessen Ecken durch Knotenpunkte gebildet werden. So gehört auch zur Ecke 3, 4, 5 in Abb. 11 das Dreieck 3, 4, 5 in der Binderfigur, Abb. 9.

Es bleibt uns noch übrig, jene Ecken im Kräfteplane zu betrachten, don denen auch äußere Kräfte ausgehen. Eine äußere Kraft kommt im Gegensatze zu den Stabspannungen immer nur in einem Kraftecke vor, nämlich in jenem, das zu dem Knotenpunkte gehört, an dem sie angreift. Daraus folgt,

daß im vollständigen reciproken Kräfteplane von einer Ecke niemals bloß eine einzige äußere Kraft ausgehen kann, sondern entweder gar keine oder zwei oder auch vier oder überhaupt eine gerade Anzahl. Um dies zu beweisen nehme man an, es gehe nur eine einzige äußere Kraft von der Ecke aus. Diese gehört zu einem Kraftecke, in dem außer ihr noch eine Stabspannung vorkommt, die wir (ohne Bezugnahme auf das vorige Beispiel) mit 1 bezeichnen wollen. Die Spannung 1 kommt dann noch in einem zweiten Kraftecke vor, in dem sich eine andere Spannung 2 an sie in der betrachteten Ecke anschließt. Auch 2 gehört noch zu einem zweiten Kraftecke, von dem wieder eine neue Stabspannung 3 an der Ecke vertreten ist und so fort. Haben wir in dieser Weise alle Stabspannungen erschöpft, so bleibt schließlich eine übrig, die nur noch in einem Kraftecke vorkäme. Bei einem Kräfteplane, wie wir ihn voraussetzen, ist dies aber nicht möglich, da in ihm jede Seite zu zwei Kraftecken gehören soll. In der Tat kann also nicht eine einzige äußere Kraft von der Ecke ausgehen, sondern es muß noch eine zweite hinzukommen, die sich mit der vorher übrig gebliebenen Stabspannung zum letzten Kraftecke zusammenschließt. Ebenso kann man beweisen, daß die Zahl der äußeren Kräfte an der Ecke jedenfalls gerade sein muß, wenn mehr als zwei vorkommen sollten. Im übrigen kommt dieser Fall bei den einfacheren Aufgaben, die wir jetzt im Auge haben, überhaupt nicht vor.

Gehen von jeder Ecke des Kräfteplanes entweder gar keine oder zwei, aber nicht mehr als zwei Strecken aus, die äußere Kräfte darstellen, so folgt, daß alle Ecken, an denen sie vertreten sind, durch diese Strecken zu einem geschlossenen Polygone verbunden werden. Unter Umständen kann dieses Polygon auch in eine Gerade übergehen, nämlich immer dann, wenn die äußeren Kräfte alle parallel zu einander sind. Damit überhaupt Gleichgewicht möglich sei, muß selbstverständlich die geometrische Summe der äußeren Kräfte gleich Null sein. Wir sehen nun, daß das geschlossene Polygon der äußeren Kräfte, das die Erfüllung dieser Bedingung vor Augen führt,

ebenfalls in dem Kräfteplane mit enthalten sein muß. Dies gibt uns einen weiteren Fingerzeig dafür ab, wie man den Kräfteplan einrichten muß, damit er unseren Wünschen entspricht: jede äußere Kraft, die neu hinzukommt, muß an einem Endpunkte der vorigen angesetzt werden. Darin unterschied sich auch in der Tat die Anordnung der Abb. 10 von der in Abb. 11. Während bei der früheren Figur die äußere Kraft P im Kraftecke II so angetragen wurde, daß beide Kraftecke auseinander fielen, ließ man diese in Abb. 11 sich überdecken und reihte P an den Endpunkt des Auflagerdrucks $1\frac{1}{2}P$ an, der im vorigen Kraftecke I vorkam und zwar so, daß sich die Pfeile beider äußeren Kräfte an dem gemeinsamen Punkte aufeinander folgen.

Kämen schließlich an einer Ecke des Kräfteplanes vier äußere Kräfte vor, so fielen an dieser Stelle zwei Ecken des Kraftecks der äußeren Kräfte zusammen, oder mit andern Worten, das Krafteck zerfiele in zwei geschlossene Polygone mit einer gemeinsamen Ecke und ähnlich wäre es in noch verwickelteren Fällen, die hier keine weitere Besprechung erfordern. Dagegen sei noch darauf hingewiesen, daß an einer Ecke des Kräfteplanes auch nur zwei äußere Kräfte und gar keine Stabspannung vorkommen könnten. Dann würden aber in der Binderfigur beide äußeren Kräfte zu demselben Knotenpunkte gehören. Man kann diese Ecke aus dem Kräfteplane abschneiden, indem man die andern Endpunkte beider Kräfte miteinander verbindet. Diese Verbindungslinie stellt dann die Resultierende der beiden äußeren Kräfte an dem Knotenpunkte dar.

Ferner folgt noch aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß jedem Punkte des Kräfteplanes, von dem zwei äußere Kräfte und eine beliebige Zahl Stabspannungen ausgehen, in der Binderfigur ein Linienzug entspricht, der mit der Richtungslinie von einer der äußeren Kräfte beginnt, sich den Stäben entlang fortsetzt und mit der Richtungslinie der andern äußeren Kraft aufhört. Dieser Linienzug stellt zwar nicht gerade ein Polygon im Sinne der Planimetrie dar; wir können aber diese

Bezeichnung im erweiterten Sinne darauf übertragen. Dann läßt sich aussagen, daß die Binderfigur in ebensoviele Polygone zerlegt werden kann, als Ecken im Kräfteplane vorkommen, und daß ferner auch jede Seite in der Binderfigur zweien dieser Polygone gemeinsam ist. Hiermit zeigt sich aber, daß zwischen der Binderfigur und dem Kräfteplane eine wechselseitige Beziehung besteht, die für beide in der gleichen Art gilt. Jeder Ecke in der einen Figur entspricht ein Polygon in der andern und jeder Seite eine zu ihr parallele Seite. Rein geometrisch betrachtet, könnten daher beide Figuren auch die Rollen miteinander vertauschen, d. h. man kann ebensogut die Aufgabe stellen und lösen, zu dem gegebenen Kräfteplane eine zugehörige Binderfigur zu konstruieren, als umgekehrt. Zwei Figuren, die in dem näher bezeichneten Verhältnisse zu einander stehen, bezeichnet man als reciprok. Dabei ist noch darauf hinzuweisen, daß dasselbe Wort in der Geometrie freilich noch (und zwar gewöhnlich) zur Bezeichnung einer andern Art der geometrischen Verwandtschaft verwendet wird; in der graphischen Statik wird es aber immer in dem zuvor durch gesperrten Druck näher angegebenen Sinne gebraucht.

§ 5. Konstruktion des reciproken Kräfteplanes nach dem Verfahren von Bow.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind, obschon darin auch auf ein einfaches Beispiel Bezug genommen wurde, doch immer noch ziemlich abstrakt gehalten. Es empfiehlt sich, zunächst im allgemeinen Kenntnis von ihnen zu nehmen und dabei das, was dem Verständnisse Schwierigkeiten bereitet haben sollte, bis auf weiteres zu übergehen, dafür aber später, nachdem man zuvor eine Anzahl reciproker Kräftepläne selbst gezeichnet hat, wieder darauf zurückzukommen. Bei Betrachtungen solcher Art besteht nämlich die Hauptschwierigkeit darin, daß dem Neulinge zugemutet wird, eine Anzahl Vorstellungen, mit denen er noch nicht vertraut ist, auf einmal zu erfassen. Dazu gehört eine große Anstrengung, die jenem

vollständig oder doch zum größten Teile erspart bleibt, der sich mit jeder dieser Vorstellungen zuvor im einzelnen näher vertraut gemacht hat. Zu einer solchen Übung wird sich in der Folge und namentlich auch schon in diesem Paragraphen Gelegenheit bieten. Immerhin mußten die allgemeinen Betrachtungen (die ich übrigens in der Vorlesung etwas kürzer zu halten pflege) vorausgehen, damit der Studierende, wenn er später, nachdem ihm diese Dinge schon mehr geläufig geworden sind, darauf zurückkommt, ein in sich geschlossenes, lückenloses System vor sich hat, das jeden Zweifel auszuschließen vermag.

Wir sind ursprünglich von der Absicht ausgegangen, einen Kräfteplan zu konstruieren, dem wir die Stabspannungen des Binders entnehmen können, und sind dann zu dem Schlusse gelangt, daß der möglichst einfache Kräfteplan in einer gewissen geometrischen Verwandtschaft zur Binderfigur stehen müsse. Dadurch sind wir jetzt in den Stand gesetzt, die Aufgabe von einer ganz andern Seite her anzugreifen. Wir brauchen gar nicht mehr von dem Kräfteplane zu reden, sondern nur noch von der dem Binder reciproken Figur, die wir rein geometrisch, ohne auf ihre mechanische Bedeutung zu achten, konstruieren können. Nur beim Anfange der Zeichnung nehmen wir darauf Rücksicht, daß die Figur nachher als Kräfteplan angesehen werden soll, indem wir mit dem Kraftecke der äußeren Kräfte, die hierbei im Maßstabe aufgetragen werden müssen, beginnen. Nachher denken wir aber bei der Fortsetzung der Zeichnung nur noch an die reciproke Figur, die konstruiert werden soll. Dabei leistet die von Bow eingeführte Bezeichnung, bei der nicht die Stäbe und Knotenpunkte des Binders, sondern die Polygone der Binderfigur einzeln aufgeführt werden, sehr gute Dienste. Ein einfaches Beispiel wird dies am besten zeigen.

Abb. 12ª gibt einen Binder an, der etwa als Brückenträger angesehen werden kann, und an dem in einem Knotenpunkte der unteren Gurtung die einzige Belastung P angreift. Kommen mehr Lasten vor, so ändert sich zwar nicht viel; wir wollen

uns aber zunächst auf den einfachsten Fall beschränken. Der Untergurt ist geradlinig angenommen; der Obergurt bilde einen beliebigen Linienzug, der nicht symmetrisch zu sein braucht. Die Einzellast P bringt beiderseits Auflagerkräfte von den Größen $\frac{4}{7}P$ und $\frac{3}{7}P$ hervor. Den Kräfteplan in Abb. 12^b beginnen wir mit dem Polygone für die drei äußeren Kräfte. Die Seiten und Ecken des Kraftecks fallen hier freilich auf eine Gerade, da die Kräfte alle gleich gerichtet sind. Wir

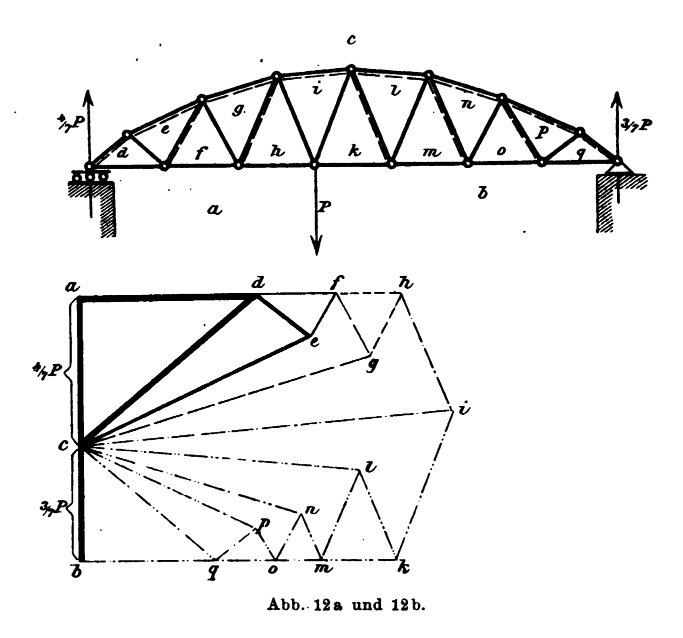


Abb. 12a und 12b.

wollen uns aber dadurch nicht stören lassen, in der durch die drei Ecken und ihre Verbindungsstrecken gebildeten geradlinigen Figur ein Dreieck zu erblicken. In der Abbildung ist dieses Dreieck abc durch einen starken, in lotrechter Richtung gehenden Strich angegeben. Die Seite ab stellt die Belastung P, ac den linken und cb den rechten Auflagerdruck dar. Die Pfeile sind in der Figur weggelassen, weil sich die Strecken überdecken; man hat sie sich aber entsprechend hinzu zu denken.

Nun suchen wir in der Binderfigur die Polygone auf, die den Ecken *a*, *b*, *c* des Polygons der äußeren Kräfte im Kräfteplane entsprechen. Im Punkte *a* stoßen im Kräfteplane die Last *P* und der linke Auflagerdruck zusammen. Daher muß nach den Betrachtungen im vorigen Paragraphen dem Punkte *a* ein Linienzug im Binder entsprechen, der mit der Richtungslinie des linken Auflagerdrucks beginnt und mit der Richtungslinie von *P* schließt, während die zwischenliegenden Seiten jedenfalls aus Stäben gebildet werden. Dieser Überlegung entsprechend sind die Buchstaben *a*, *b*, *c* in die Binderfigur eingeschrieben; sie bedeuten alle drei offene Polygone, d. h. solche, die mit der Richtungslinie einer äußeren Kraft anfangen und mit einer andern endigen.

Allen andern Punkten des Kräfteplanes, die zu *a*, *b*, *c* noch hinzukommen, können in der Binderfigur nur geschlossene Polygone entsprechen, deren Seiten aus Stäben gebildet werden. Bei den einfachen Bindern sind diese Polygone stets die Dreiecke, durch deren Aufeinanderfolge die geometrische Figur des Bildes entstanden gedacht werden kann. Wir schreiben demnach die Zeichen *d*, *e*, *f* u. s. f. in die Stabdreiecke ein. Unsere Aufgabe besteht dann, geometrisch gesprochen, darin, die diesen Polygonen *d*, *e*, *f* . . . im Kräfteplane entsprechenden Punkte aufzusuchen.

Punkt *d* kann leicht gefunden werden. Das Dreieck *d* in der Binderfigur grenzt nämlich zu beiden Seiten an die Polygone *a* und *c* an, die im Kräfteplane bereits durch Punkte vertreten sind. Unter *ad* sei der Stab verstanden, der den Polygonen *a* und *d* gemeinsam ist, also der erste Stab des Untergurts. In derselben Weise können auch alle andern Stäbe durch Angabe der in ihnen aneinander grenzenden Polygone angegeben werden. Wir brauchen jetzt nur die Linien *ad* und *cd* im Kräfteplane von den bekannten Punkten *a* und *e* aus parallel zu den gleichbezeichneten Stäben der Binderfigur zu ziehen; der Schnittpunkt liefert den Punkt *d*.

Dann folgt Punkt *e*. Das Dreieck *e* in der Binderfigur grenzt an *c* und *d* an; wir ziehen also von den bereits be-

kannten Punkten *c* und *d* im Kräfteplane Parallelen zu den Richtungen der Stäbe *ce* und *de*. Der Schnitt gibt den Punkt *e*. Ebenso grenzt nachher *f* an *a* und *e* an und Punkt *f* wird daher von *a* und *e* aus mit Hülfe der Parallelen zu den Stäben *af* und *ef* gefunden. In dieser Weise fährt man fort bis zum rechten Ende des Binders hin, also bis zur Konstruktion des Punktes *q* im Kräfteplane. Man muß nur nach Überschreitung des Knotenpunktes, an dem die Last *P* angebracht ist, beachten, daß die Dreiecke *k*, *m* u. s. f. nicht mehr an *a*, sondern an *b* angrenzen. Die Punkte *k*, *m*, *o*, *q* liegen daher auf der durch *b* gezogenen Horizontalen.

Eine besondere Bemerkung ist nur noch hinsichtlich des letzten Punktes *q* zu machen. Das Dreieck *q* in der Binderfigur grenzt nämlich an die Polygone *b*, *c* und *p* an, die alle drei schon durch Punkte im Kräfteplane vertreten sind. Hiernach müssen sich die drei durch diese Punkte zu den Stäben *bq*, *cq* und *pq* gezogenen Parallelen in demselben Punkte *q* schneiden. Zieht man also die Linie *pq* parallel zum Stabe *pq*, und sucht deren Schnitt *q* mit der durch *b* gelegten Horizontalen auf, so muß die Verbindungslinie *cq* von selbst parallel zum Stabe *cq* gehen. Hiermit erhält man eine sehr willkommene Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Hätte man z. B. die Auflagerkräfte nicht richtig gewählt, würde also Punkt *c* auf der Geraden *ab* nicht an der richtigen Stelle sitzen, so könnte man die ganze Figur zunächst genau so wie vorher konstruieren; die Verbindungslinie *cq* würde aber dann nicht parallel zum Stabe *cq* laufen und wir würden dadurch auf den begangenen Fehler aufmerksam gemacht.

Auch in Abb. 12^b sind, wie schon in Abb. 11, die zuerst zu ziehenden Linien stark ausgezogen, die folgenden schwächer, dann gestrichelt, mit Strichpunkten u. s. f. Dem Anfänger soll hierdurch der Überblick über die Entstehungsart der Figur erleichtert werden.

Nachdem die reciproke Figur konstruiert ist, überzeuge man sich davon, daß sie in der Tat als der Kräfteplan des Binders aufgefaßt werden kann. Zu diesem Zwecke greife

man irgend einen Knotenpunkt des Binders heraus und suche das ihm zugehörige Krafteck im Kräfteplane auf. In jenem Punkte z. B., an dem die Last P angreift, stoßen die Polygone a, h, i, k, b in der Binderfigur zusammen; wir können ihn geradezu als den Knotenpunkt $ahikb$ bezeichnen. Ihm entspricht im Kräfteplane das gleich bezeichnete Krafteck $ahikb$ und in derselben Weise kann zu jedem Knotenpunkte das zugehörige Krafteck angegeben werden. — Wir haben ferner noch die Vorzeichen der Stabspannungen festzustellen. Am einfachsten geschieht dies für jene Stäbe, die von einem Knotenpunkte ausgehen, an dem zugleich eine äußere Kraft angreift, weil deren Pfeil von vornherein bekannt ist. Im Kraftecke $ahikb$ stellt die Seite ab die Last P mit dem Pfeile nach abwärts dar. Daraus folgt z. B. der Pfeil von bk, sofern er auf den Knotenpunkt $ahikb$ bezogen wird, nach rechts hin u. s. f. Trägt man diese Pfeile an dem Knotenpunkte in der Binderfigur ab, so überzeugt man sich, daß alle vier von diesem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe gezogen sind. Um die Pfeile der Stabspannungen für einen Knotenpunkt, an dem keine äußere Kraft angreift, ermitteln zu können, muß man von einem Stabe das Vorzeichen der Stabspannung bereits kennen. So wirken z. B. am Knotenpunkte $bklm$ vier Stabspannungen, die im Kräfteplane das Krafteck $bklm$ bilden. Aus der vorhergehenden Betrachtung wissen wir bereits, daß Stab bk gezogen ist. Für den jetzt betrachteten Knotenpunkt geht also der Pfeil von bk nach links; hieraus folgt der Pfeil von bm nach rechts, von ml nach rechts oben und von lk nach rechts unten. Die Stäbe bm und ml sind daher gezogen und lk ist gedrückt. Daß in dem Vierecke $bklm$ drei Punkte und zwei Seiten auf eine Gerade fallen, rührt nur von dem zufälligen Umstande her, daß der Untergurt des Binders geradlinig angenommen war. Darum hört aber dieses Krafteck (ebenso wie die übrigen, bei denen dasselbe zutrifft) nicht auf, als Viereck zu gelten.

Es kann dem Anfänger nicht eindringlich genug empfohlen werden, der Reihe nach sämtliche Kraftecke im Kräfteplane aufzusuchen und die Vorzeichen aller Stabspannungen festzu-

stellen. Die gedrückten Stäbe sind in der Binderfigur wieder durch beigesetzte Schattenstriche gekennzeichnet.

§ 6. Die Aufeinanderfolge der Pfeile an einer Ecke des reciproken Kräfteplanes.

Die früheren Betrachtungen lehren wohl, daß ein Kräfteplan, in dem jede Stabspannung nur einmal als Seite auftritt, eine zur Binderfigur reciproke Figur bilden muß. Ob aber die reciproke Figur, die wir zur Binderfigur auf Grund rein geometrischer Überlegungen konstruiert haben, auch wirklich einen Kräfteplan bildet, geht daraus noch nicht deutlich genug hervor. Man könnte sich zwar, um diesen Zweifel zu heben, damit begnügen, nach Aufzeichnung der Figur nachträglich jedes Krafteck in ihr aufzusuchen und sich davon zu überzeugen, daß in ihm nicht nur die richtigen Seiten vorkommen (woran auf Grund der früheren Überlegungen kein Zweifel möglich ist), sondern daß auch die Pfeile der Stabspannungen in ihm richtig aufeinanderfolgen. Für den Praktiker genügt dies in der Tat und für den Anfänger ist es auf alle Fälle entschieden zu empfehlen, daß er sich zunächst einmal auf diese empirische Weise Rechenschaft darüber gibt, ob die genannte Bedingung erfüllt ist. Darauf war auch schon hingewiesen. Wünschenswert bleibt aber immerhin eine allgemein gültige Entscheidung der Frage, die uns der Sorge überhebt, in jedem Einzelfalle von neuem zu prüfen, ob die richtige Aufeinanderfolge der Pfeile gewahrt ist.

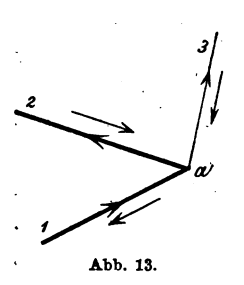


Abb. 13.

Dies lehrt die folgende Überlegung. Man betrachte zunächst irgend eine Ecke a des Kräfteplanes (Abb. 13) von der nur drei Stabspannungen ausgehen mögen. Während der Konstruktion des Kräfteplanes erhält man diesen Punkt zuerst als Schnitt von zwei Stabspannungen, die in Abb. 13 mit 1 und 2 bezeichnet seien. In dem zugehörigen Kraftecke müssen die Pfeile von 1 und 2 aufeinanderfolgen; der eine Pfeil muß

also auf die Ecke zu, der andere von ihr ab gerichtet sein. In der Abbildung sind diese Pfeile auf die Linien 1 und 2 selbst eingetragen und zwar ist jene Stabspannung, deren Pfeil auf die Ecke zu gerichtet ist, mit 1, die andere mit 2 bezeichnet. Offenbar steht es uns nämlich frei, diese Bezeichnungen so zu verteilen, wie es uns beliebt, ohne dadurch die Allgemeingültigkeit der Betrachtung einzuschränken. Späterhin kommt dann die Stabspannung 3 hinzu. Während wir sie ziehen, sind wir im Begriffe, ein Krafteck zu zeichnen, in dem außer 3 noch eine der beiden andern Stabspannungen — sagen wir 2 — vorkommt. In diesem zweiten Kraftecke, das zu dem andern der durch den Stab 2 in der Binderfigur verbundenen Knotenpunkte gehört, hat aber die Stabspannung 2 den entgegengesetzten Pfeil wie vorher; dieser zweite Pfeil ist neben der Linie 2 in die Abbildung eingetragen. Der Pfeil von 3 im zweiten Kraftecke folgt dann aus der Bedingung, daß er in diesem auf den Pfeil von 2 folgen muß. Er ist vom Knotenpunkte ab gerichtet und so auf die Linie 3 selbst eingetragen. Bei der weiteren Konstruktion des Kräfteplanes kommt man aber noch zu einem dritten Kraftecke, in dem die Spannungen 1 und 3 an der betrachteten Ecke aufeinanderfolgen. Die Frage, um deren Entscheidung es sich handelt, besteht nun darin, ob auch in diesem dritten Kraftecke die Pfeile von 1 und 3, die durch die vorhergehenden Überlegungen bereits festgelegt sind, unter allen Umständen richtig aufeinanderfolgen. Man sieht bereits, daß die Frage zu bejahen ist. Im dritten Kraftecke sind nämlich an Stelle der auf die Linien selbst eingetragenen die daneben angegebenen umgekehrten Pfeilrichtungen zu nehmen und diese folgen in der Tat richtig aufeinander.

Dies bleibt auch noch gültig, wenn beliebig viele Stabspannungen in derselben Ecke a des Kräfteplanes zusammentreffen. Es wird genügen, wenn ich es für 4 Stabspannungen nachweise, da die Betrachtung in andern Fällen ebenso durchgeführt werden kann. Die Spannungen, durch deren Schnitt die Ecke zuerst gefunden wird, seien wieder mit 1, 2, die bei

der weiteren Konstruktion zunächst hinzutretende mit 3 und die letzte mit 4 bezeichnet. Dabei sollen die Bezeichnungen überdies noch so verteilt sein, daß 2 mit 3 zum zweiten Kraftecke und — wie dies dann nicht anders sein kann — 3 mit 4 zum dritten und 1 mit 4 zum letzten Kraftecke gehören. Angenommen, der Pfeil von 1 gehe im Kraftecke 1, 2 (wie es der Kürze halber genannt werden kann) auf die Ecke *a* zu; der von 2 ist dann von *a* ab gerichtet. Im Kraftecke 2, 3 hat dann 2 den entgegengesetzten Pfeil, der in Abb. 14 wieder neben die Linie eingetragen ist. Überhaupt sollen die auf die Linien selbst eingetragenen Pfeile immer jene sein, die beim ersten Auftreten dieser Linien gültig sind, während sie bei zweiten Auftreten entgegengesetzt sind und mit dieser Richtung daneben eingetragen wurden. Man sieht jetzt, daß der auf Linie 3 einzutragende Pfeil von *a* ab gerichtet ist. Da sich der Pfeil von 3 beim zweiten Auftreten wieder umkehrt, ist auch der auf 4 selbst einzutragende Pfeil von *a* ab gerichtet. Beim letzten Kraftecke sind sowohl von 4 als von 1 die daneben gezeichneten Pfeile zu nehmen und diese folgen wieder richtig aufeinander, wie wir es verlangen müssen. Wären noch mehr Stabspannungen von *a* ausgegangen, so wären alle auf die Linien selbst einzutragenden Pfeile von *a* ab gerichtet anzunehmen gewesen, mit Ausnahme von 1. Dies hätte in jedem Falle zuletzt auch zur richtigen Aufeinanderfolge von 1 und der letzten Stabspannung führen müssen. — Wenn der erste Pfeil von 1 etwa entgegengesetzt dem hier angenommenen gewesen sein sollte, so hätte man nur auch alle übrigen umzukehren, ohne daß dadurch am Schlußresultate etwas geändert würde.

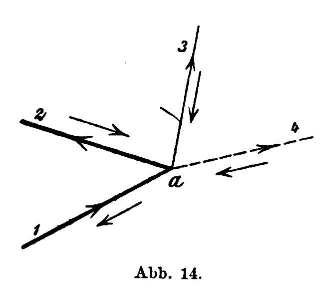


Abb. 14.

Auch auf den Fall, daß an der Ecke *a* außer Stabspannungen noch zwei äußere Kräfte zusammenstoßen, läßt sich die vorige Überlegung ohne weiteres übertragen. Man muß

nur beachten, daß die Pfeile der beiden äußeren Kräfte ebenfalls aufeinander folgen müssen, da der Punkt *a* zugleich zum Kraftecke der äußeren Kräfte gehört. Eine der äußeren Kräfte ist daher auf den Punkt *a* zu, die andere von ihm ab gerichtet. Betrachtet man nun die Stabspannung 1, die zuerst von *a* aus während der Konstruktion des Kräfteplanes gezogen wird, so bestimmt sich deren Pfeil aus jenem der äußeren Kraft, die mit ihr zum selben Kraftecke gehört. Beim nächsten Kraftecke, in dem 1 vorkommt, ist deren Pfeil umzukehren u. s. f. Man findet dann auch im letzten Kraftecke die richtige Aufeinanderfolge der Pfeile an der Ecke *a*.

Aus dieser Untersuchung folgt, daß in der Tat in der zur Bindergestalt konstruierten reciproken Figur — falls nur die äußeren Kräfte vorher richtig aufgetragen waren — alle Pfeile vorschriftsmäßig aufeinanderfolgen müssen. Die reciproke Figur ist daher der gesuchte Kräfteplan.

Anmerkung. Schließlich mache ich noch darauf aufmerksam, daß selbstverständlich nicht jedem Polygone, das man aus beliebig herausgegriffenen zusammenhängenden Stäben in der Binderfigur bilden kann, eine Ecke im reciproken Kräfteplane entspricht. Betrachtet man z. B. das aus den Dreiecken *d* und *e* in Abb. 12 zusammengesetzte Viereck, so entspricht diesem keine Ecke im Kräfteplane. Die Spannungen der vier Umfangsstäbe gehen im Kräfteplane weder von einem Punkte aus, noch schließen sie sich überhaupt stetig aneinander. Die Aufgabe, den Kräfteplan als reciproke Figur zu konstruieren, setzt vielmehr im allgemeinsten Falle voraus, daß man bereits eine Zerlegung der Binderfigur in solche Polygone kennt, deren Seiten nur aus Stäben oder Richtungslinien von äußeren Kräften gebildet werden, derart daß in jeder dieser Seiten zwei der Polygone aneinandergrenzen. Eine solche Zerlegung zu finden, kann unter Umständen recht schwierig sein. Bei den einfach gegliederten Bindern, um die es sich in diesem Abschnitte in erster Linie handelt, ist diese Zerlegung aber von selbst gegeben.

§ 7. Zusammensetzen der Kräfte in der Ebene.

Wenn hier und in der Folge von der Zusammensetzung von Kräften die Rede ist, die nicht alle an demselben Punkte

angreifen, so ist in Gedanken überall die Voraussetzung hinzuzufügen, daß die Angriffspunkte alle auf demselben starren Körper oder auch auf einer Verbindung von Körpern enthalten sein sollen, die von unveränderlicher Gestalt ist und die daher als ein einziger starrer Körper aufgefaßt werden kann. Sehr häufig werde ich von dem starren Körper, an dem die Kräfte angreifen, nicht einmal den Umriß hinzeichnen, da seine Gestalt für das, was gerade auseinandergesetzt werden soll, gleichgültig ist. Man darf aber darum niemals außer acht lassen, daß ein solcher Körper hinzugedacht werden muß, da Kräfte, die an verschiedenen starren Körpern angreifen, überhaupt nicht zusammengesetzt werden können.

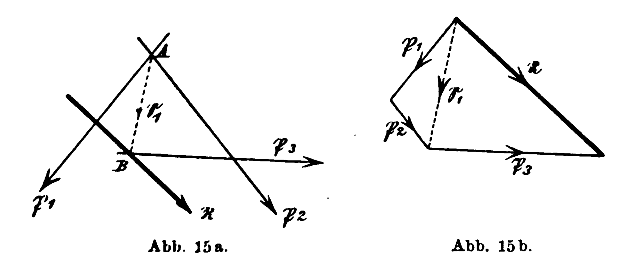


Abb. 15a. Abb. 15b.

Wenn die Richtungslinien gegebener Kräfte in einer Ebene liegen, aber nicht parallel zu einander sind, führt das durch Abb. 15ª und 15ᵇ erläuterte Verfahren am schnellsten zu ihrer Vereinigung. Man suche zuerst den Schnittpunkt A der Richtungslinien von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ in Abb. 15ª auf, verlege diese beiden Kräfte nach A als Angriffspunkt und ersetze sie durch ihre geometrische Summe $\mathfrak{S}_1$, die in Abb. 15ᵇ mit Hülfe eines Kräftedreieckes konstruiert werden kann. Dann suche man den Schnittpunkt B von $\mathfrak{S}_1$, mit $\mathfrak{P}_3$ auf und setze an diesem $\mathfrak{S}_1$ mit $\mathfrak{P}_3$ auf dieselbe Weise zur Resultierenden $\mathfrak{R}$ zusammen. In der Abbildung waren nur drei gegebene Kräfte angenommen; man sieht aber sofort ein, daß bei einer größeren Zahl dasselbe Verfahren fortgesetzt werden kann, bis schließlich alle Kräfte durch eine einzige Resultierende $\mathfrak{R}$ ersetzt sind.

Natürlich hätte man die Reihenfolge in der Zusammen-

setzung auch ändern, also z. B. mit der Zusammensetzung von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ beginnen können. Auf das Schlußresultat kann dies aber keinen Einfluß haben. Dies folgt daraus, daß eine auf diesem Wege gefundene Resultierende die gegebenen Kräfte (sofern von der Verteilung der inneren Kräfte im starren Körper abgesehen wird), vollständig ersetzt. Eine einzelne Kraft $\mathfrak{R}$ kann aber niemals durch eine von ihr verschiedene vollständig ersetzt werden. Gelangt man also auf zwei verschiedenen Wegen zu Resultierenden gegebener Kräfte, so müssen beide in jeder Hinsicht, d. h. nach Richtung, Größe und Lage miteinander übereinstimmen.

Sind die Kräfte parallel zu einander, so fügt man zwei neue, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}' = -\mathfrak{T}$ hinzu, die sich gegenseitig aufheben, die sonst aber beliebig in passender Weise gewählt werden können, vereinigt $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{S}_1$, dies mit $\mathfrak{P}_2$ zu $\mathfrak{S}_2$ u. s. f. und setzt das letzte $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}'$ zur Resultierenden $\mathfrak{R}$ zusammen. Im I. Bande war dies schon beschrieben und im nächsten Abschnitte werde ich darauf nochmals ausführlicher zurückkommen.

Im allgemeinen kann man, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, Kräfte in der Ebene stets durch eine einzige Kraft $\mathfrak{R}$ ersetzen. Nur der eine Ausnahmefall kommt in Betracht, daß man zuletzt auf zwei Kräfte geführt wird, die gleich groß, parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersten Bande setzte ich schon auseinander, daß man ein solches „Kräftepaar“ auch als gleichwertig mit einer unendlich kleinen Kraft ansehen kann, deren Richtungslinie die unendlich ferne Gerade der Ebene ist. Macht man von dieser Ausdrucksweise Gebrauch, so kann man sagen, daß sich Kräfte in der Ebene immer durch eine einzige Resultierende ersetzen lassen.

Die Aufgabe der Kräftezusammensetzung in der Ebene läßt auch noch manche andere Lösungen zu. Man kann z. B. eine beliebige Gerade ziehen, die die Richtungslinien aller Kräfte schneidet und einen beliebigen Punkt außerhalb dieser Geraden annehmen. Dann verlege man die Angriffspunkte aller Kräfte auf die Gerade und verbinde sie mit dem beliebig gewählten

Punkte. Jede Kraft kann dann in zwei andere zerlegt werden, von denen eine längs der gezogenen Verbindungslinie durch den gewählten Punkt geht, während die andere auf die gewählte Gerade fällt. Die Kräfte auf der Geraden lassen sich ohne weiteres durch eine Resultierende ersetzen und ebenso die durch den gewählten Punkt gehenden, indem man ihre graphische Summe bildet. Hiermit ist das gegebene Kraftsystem zunächst auf zwei Kräfte zurückgeführt, von denen eine mit der Geraden zusammenfällt, während die andere durch den gewählten Punkt geht. Diese beiden Kräfte können nachträglich auf gewöhnliche Art zu einer einzigen Resultierenden vereinigt werden. — Im allgemeinen ist dieses Verfahren umständlicher als die vorher beschriebenen und daher wenig im Gebrauche. Es ist aber nützlich, sich auch mit ihm vertraut zu machen, weil die Zusammensetzung von Kräften, die im Raume windschief zu einander liegen, diesem Verfahren nachgebildet ist. Hat man sich mit dem einfachen Falle schon vertraut gemacht, so werden die später vorzutragenden Lehren über die Kräftezusammensetzung im Raume dadurch leichter verständlich. — Ein Beispiel wird sich jeder Leser selbst leicht bilden können, um sich daran in der Durchführung des Verfahrens zu üben.

§ 8. Zerlegen von Kräften in der Ebene.

Hier handelt es sich namentlich um die Lösung der Aufgabe, eine nach Größe, Richtung und Lage gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ in drei andere zu zerlegen, deren Richtungslinien gegeben sind, mit der Richtungslinie von $\mathfrak{P}$ in einer Ebene liegen, dabei aber nicht durch denselben Punkt gehen. Diese Aufgabe läßt immer eine eindeutige Lösung zu. Dabei kann man, wie bei allen Zerlegungsaufgaben, auch verlangen, daß die drei gesuchten Kräfte mit $\mathfrak{P}$ im Gleichgewichte stehen, ohne dadurch in der Lösung eine weitere Änderung als die Umkehrung der Pfeile der gesuchten Kräfte herbeizuführen.

Die Aufgabe ist ganz ähnlich der in § 2 behandelten, eine gegebene Kraft nach drei nicht in derselben Ebene

liegenden, aber durch den gleichen Angriffspunkt gehenden Richtungslinien zu zerlegen. Auch hier kennt man verschiedene Wege, die zum Ziele führen und der eine, der von Culmann angegeben ist, stimmt im wesentlichen mit dem schon damals beschriebenen Culmannschen Verfahren überein. In Abb. 16ª seien 1, 2, 3 die Richtungslinien, nach denen die gegebene Kraft 𝔓 zerlegt werden soll. Man teile die vier Kräfte in zwei Gruppen ein, so daß zur einen Gruppe etwa 𝔓 und 1, zur andern die Kräfte 2 und 3 gehören. Sollen die Kräfte 1, 2, 3 mit 𝔓 im Gleichgewichte sein, so muß die Resultierende aus 𝔓 und 1 mit der Resultierenden aus 2 und 3 in dieselbe Gerade fallen. Diese Gerade kann nur die Verbindungslinie der Schnittpunkte von 𝔓 mit 1 und von 2 mit 3 sein. Sie ist in die Abbildung gestrichelt eingetragen. Nachdem man die Richtungslinie der Resultierenden aus 𝔓 und 1 kennt, kann man für diese drei Kräfte in Abb. 16ᵇ ein Kräftedreieck zeichnen. Daran läßt sich sofort ein zweites anreihen, das der Zusammensetzung von 2 und 3 zu ihrer Resultierenden entspricht, wie es in der Abbildung geschehen ist. Die Pfeile der Kräfte 1, 2, 3 trägt man nachträglich so ein, daß sie unter sich aufeinander folgen, dem Pfeile von 𝔓 aber entgegengesetzt sind, falls die 1, 2, 3 die Kraft 𝔓 ersetzen sollen. Sollen sie mit 𝔓 Gleichgewicht halten, so sind die drei Pfeile umzukehren. — Die beiden Zeichnungen in Abb. 16ª und 16ᵇ können übrigens in dem früher besprochenen Sinne als reciproke Figuren aufgefaßt werden.

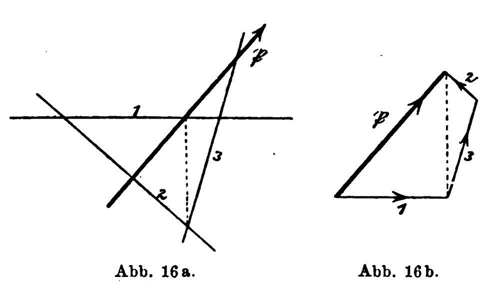


Abb. 16a. Abb. 16b.

Obschon das Verfahren einfach genug ist, zieht man ihm doch gewöhnlich ein anderes vor, das von Aug. Ritter herrührt und das als die Momenten-Methode oder als die Rittersche Methode bezeichnet zu werden pflegt. Man geht dabei von der Erwägung aus, daß die Summe der statischen Momente

aller Kräfte, wenn diese Gleichgewicht miteinander halten sollen, für jeden Momentenpunkt zu Null werden muß. Um hiernach die Kraft 1 in der durch Abb. 16[a] gestellten Aufgabe zu ermitteln, lege man den Momentenpunkt auf den Schnittpunkt der Richtungslinien von 2 und 3. In der Momentengleichung kommen dann nur die Momente von $\mathfrak{P}$ und 1 vor. Man erkennt zunächst, daß der Pfeil von 1 nach links gehen muß und findet die Größe von 1 durch Ziehen der Hebelarme (rechtwinklig zu 1 und $\mathfrak{P}$) und Gleichsetzen der Momente. Die Größe von 2 oder 3 findet man auf dieselbe Art unter Verlegung des Momentenpunktes nach dem Schnittpunkte von 1 und 3 oder von 1 und 2. Man pflegt daher bei der Anwendung des Verfahrens den Schnittpunkt von zwei der gegebenen Richtungslinien auch geradezu als den zur dritten der gesuchten Kräfte gehörigen Momentenpunkt zu bezeichnen.

Sind mehrere Kräfte gegeben, die alle in derselben Ebene liegen und die mit drei den Richtungslinien nach bekannten Kräften im Gleichgewichte stehen sollen, so läßt sich das Culmannsche Verfahren ebenso anwenden, wie im vorhergehenden Falle, nachdem man zuvor die gegebenen Kräfte nach den Lehren des vorigen Paragraphen durch eine Resultierende ersetzt hat. Bei dem Ritterschen Verfahren ist es nicht nötig, die Resultierende selbst aufzusuchen. Man hat nur ihr statisches Moment nötig und dieses ist, wie man weiß, gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller gegebenen Kräfte.

Daß die Richtungslinien 1, 2, 3 nicht durch einen Punkt gehen dürfen, wenn die Lösung der Aufgabe möglich sein soll, war schon vorher bemerkt. Gehen sie nicht genau, sondern nur nahezu durch einen Punkt, schneiden also die drei Richtungslinien etwa ein unendlich kleines Dreieck in der Ebene ab, so werden die Kräfte 1, 2, 3 unendlich groß, denn der Hebelarm einer jeden wird für den zugehörigen Momentenpunkt unendlich klein, während das Moment von $\mathfrak{P}$ endlich ist. Auch parallel zu einander dürfen die drei Richtungslinien

nicht sein, weil sie sonst niemals eine Resultierende von beliebiger Richtung liefern könnten. Dieser Fall ist indessen im vorigen schon mit enthalten, da auch parallele Linien durch denselben Punkt, nämlich durch den ihnen gemeinsamen unendlich fernen Punkt gehen.

Zwei der Richtungslinien dürfen indessen parallel zu einander sein. Die Momentenmethode bleibt in diesem Falle allerdings zur Bestimmung der in der dritten Richtungslinie gehenden Kraft nicht mehr verwendbar, weil der ihr zugehörige Momentenpunkt im Unendlichen liegt. Man hilft sich aber leicht, indem man entweder auf die Culmannsche Methode zurückgreift oder indem man den Komponentensatz an die Stelle des Momentensatzes treten läßt. Nach dem Komponentensatze muß nämlich die algebraische Summe der Projektionen auf jede Gerade, also auch auf eine senkrecht zu den beiden parallelen Richtungslinien gezogene, gleich Null sein. Da in der Komponentengleichung im vorliegenden Falle nur zwei Glieder auftreten, erhält man daraus sofort die Größe der gesuchten Kraft.

§ 9. Anwendung der Ritterschen Methode auf die Berechnung von Fachwerkträgern.

Die Rittersche Methode wird sehr häufig zur Berechnung der Stabspannungen in Dachbindern oder Brückenträgern benützt. Durch einen solchen Binder kann man nämlich gewöhnlich einen Schnitt in ungefähr senkrechter Richtung legen, der nur drei Stäbe trifft, deren Richtungslinien nicht durch einen Punkt gehen. Denkt man sich dann die rechte Hälfte des Binders entfernt, so muß die linke Hälfte immer noch im Gleichgewichte bleiben, wenn man an den Stümpfen der durch den Schnitt getroffenen Stäbe Kräfte anbringt, die nach Größe und Richtungssinn mit den vorher in den Stäben übertragenen Stabspannungen übereinstimmen. Von diesen Kräften kennt man die Richtungslinien und die Lösung der vorher besprochenen Aufgabe führt daher zur Kenntnis der Stabspannungen.

Hiernach tritt die Rittersche Methode in Wettbewerb mit dem früher für die Ermittelung der Stabspannungen angegebenen Verfahren, einen Kräfteplan zu zeichnen. Dieses Verfahren bleibt freilich immer im Vorteile, sobald man, wie es gewöhnlich verlangt wird, alle Stabspannungen ermitteln soll, die zu einer gegebenen Belastung gehören. Wünscht man aber aus irgend einem Grunde nur eine einzige Stabspannung zu kennen, während die Spannungen der übrigen Stäbe gleichgültig sind, so kommt man mit der Ritterschen Methode weit schneller zum Ziele.

Außerdem hat die Rittersche Methode auch noch den Vorzug, daß sie in manchen Fällen ohne jede Schwierigkeit zum Ziele führt, bei denen der Kräfteplan nach den bisher dafür gegebenen Anleitungen nicht mehr konstruiert werden kann. Das bekannteste Beispiel dafür bildet der sog. zusammengesetzte Polonçeau- oder Wiegmann-Binder, der in Abb. 17ª dargestellt ist. Aus dem einfachen Binder in Abb. 9 (Seite 20) geht er dadurch hervor, daß jeder Stab des Obergurtes, sowie die Stäbe 2, 5 und die ihnen auf der andern Seite von Abb. 9 entsprechenden durch einen in der Mitte liegenden Knotenpunkt in zwei Hälften zerlegt werden, worauf die neu hinzugekommenen Knotenpunkte durch Einfügen von Stäben unter Einhaltung des Dreiecksverbandes gegen die übrigen abgestützt werden. Die Absicht bei der Konstruktion des „zusammengesetzten“ Binders in Abb. 17ª geht darauf hinaus, eine größere Zahl von Stützpunkten am Binder für die Auflagerung der Sekundärkonstruktion zu gewinnen. Bei großen Spannweiten würden die Dachsparren bei der Anordnung in Abb. 9 auf eine zu große Länge frei zu tragen haben, während in Abb. 17 diese Länge — nämlich der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten des Obergurts — auf die Hälfte herabgesetzt ist.

Der Binder in Abb. 17ª bildet keinen einfachen Fachwerkträger mehr. Er kann nämlich nicht auf die früher angegebene Art durch Aneinanderfügen von Dreiecken erhalten werden, nämlich nicht so, daß jedes folgende Dreieck mit einer Seite

an das vorhergehende angeschlossen wird. Auf den ersten Blick erkennt man den Unterschied vielleicht nicht; man bedenke aber, daß sich das mit q bezeichnete Polygon gleichzeitig an die beiden vorhergehenden Dreiecke n und p mit

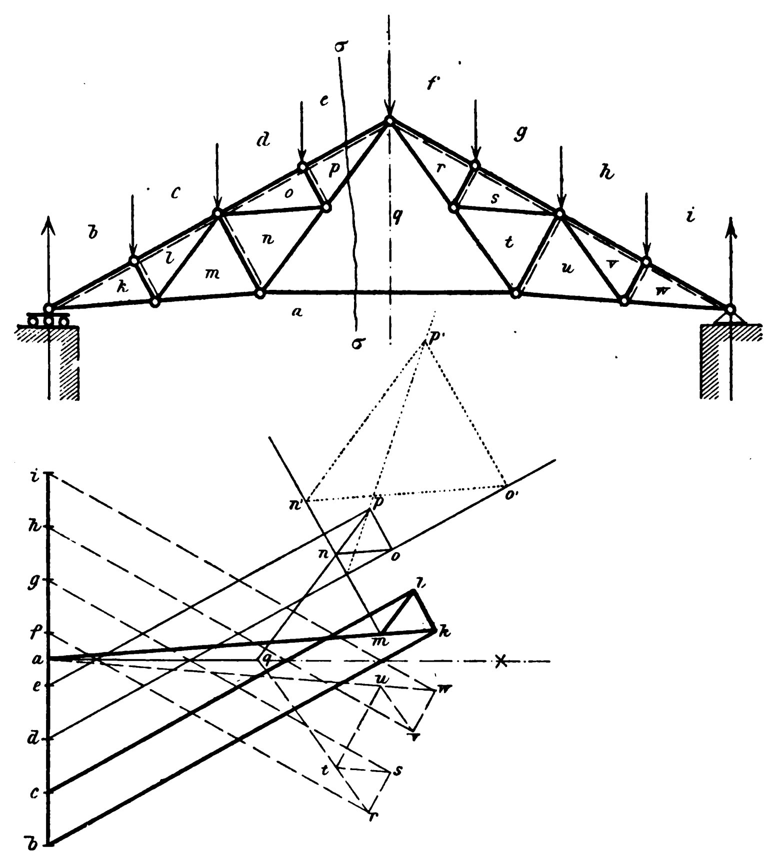


Abb. 17a und 17b.

einer Seite anschließt, was der früher gegebenen Vorschrift widerspricht. In der Tat ist daher q auch gar nicht als Dreieck in dem hier in Frage kommenden Sinne aufzufassen, sondern als Fünfeck, von dem nur zweimal zwei Seiten zufällig in je eine Gerade fallen.

Zu ähnlichen Schlüssen gelangt man auch, wenn man von dem fertig vorliegenden Binder die einzelnen Dreiecke wieder abzubauen sucht, so daß man jedes Dreieck längs einer Seite abbricht, in der es mit dem Reste zusammenhängt. Die Dreiecke *k, l, m* auf der linken Seite und die ihnen entsprechenden *w, v, u* auf der rechten Seite kann man in dieser Weise nacheinander abbrechen. Dann gelangt man aber auf ein Gebilde, das in der gleichen Weise nicht weiter zerlegt werden kann und das man als die Grundfigur des Fachwerks bezeichnet. In einem späteren Abschnitte wird auf diese Dinge ausführlicher eingegangen werden. Hier genügt es, wenn im übrigen nur darauf hingewiesen wird, daß die geometrische Gestalt des Binders jedenfalls immer noch unveränderlich ist, solange die Stablängen sich nicht ändern.

In Abb. 17^b ist der reciproke Kräfteplan für den Binder gezeichnet. Er kann zunächst genau so begonnen werden, wie es früher auseinandergesetzt war. Dadurch erhält man die mit starken Strichen ausgezogenen Linien. Sowie man so weit gekommen ist, versagt aber das früher angegebene Verfahren. Das Polygon *n*, auf das man in der Binderfigur stößt, sobald die Polygone *k, l, m* erledigt sind, grenzt nur an eines der bereits im Kräfteplane vertretenen, nämlich an *m* an. Man weiß daher nur, daß der Punkt *n* im Kräfteplane auf der durch *m* zum Stabe *mn* gezogenen Parallelen enthalten sein muß.

Auch rein mechanisch betrachtet, ist die Schwierigkeit, auf die man hier stößt, leicht verständlich. Sobald man nämlich alle Stabspannungen bis auf jene, die zur Grundfigur des Binders gehören, ermittelt hat, vermag man keinen Knotenpunkt mehr anzugeben, an dem nur noch zwei der Größe nach unbekannte Kräfte angreifen. In der Grundfigur gehen nämlich, wie man leicht erkennt, von jedem Knotenpunkte mindestens drei zur Grundfigur gehörige Stäbe aus.

Für die Rittersche Methode besteht eine solche Schwierigkeit im vorliegenden Falle aber keineswegs. Man vermag nämlich in Abb. 17^a den Schnitt $\sigma\sigma$ zu legen, der durch die Grundfigur geht und nur drei Stäbe trifft, die sich nicht in

demselben Punkte schneiden. Die Spannung des untersten Stabes aq z. B. kann daher leicht mit Hülfe einer Momentengleichung ermittelt werden. Der zu diesem Stabe gehörige Momentenpunkt ist der Scheitelknotenpunkt des Binders. Auch die Spannungen der übrigen Stäbe können hierauf nach der Ritterschen Methode ohne Schwierigkeit berechnet werden.

Anstatt dessen kann man auch nach Berechnung der Stabspannung aq mit dem Zeichnen des Kräfteplanes fortfahren. Man trage zu diesem Zwecke die Spannung aq im Maßstabe von a aus ab, wodurch man in Abb. 17^b zum Punkte q gelangt. Nachdem dieser Punkt bekannt ist, erhält man auf gewöhnliche Art Punkt n als Schnitt der zum Stabe qn gezogenen Parallelen qn mit der schon von vorher bekannten Parallelen mn. Ebenso findet man o und p. Beim Polygone p ist aber zu beachten, daß dieses an die drei schon im Kräfteplane vertretenen Polygone o, e und q anstößt. Die zu den drei Anschlußseiten von den Punkten o, e, q des Kräfteplanes gezogenen Parallelen müssen sich daher von selbst in dem gleichen Punkte p treffen. Dies dient zur Prüfung für die Genauigkeit der Zeichnung und auch für die Richtigkeit der Berechnung der Stabspannung aq nach der Ritterschen Methode. — Nachdem der Kräfteplan bis zum Punkte p konstruiert ist, kann er in derselben Weise auch für die rechtsseitige Binderhälfte weiter gezeichnet werden. Die zugehörigen Linien sind in Abb. 17^b gestrichelt ausgezogen. Da der Binder symmetrisch gestaltet und symmetrisch belastet sein sollte, wird auch der Kräfteplan symmetrisch; die vom Punkte a aus gezogene Horizontale bildet die Symmetrieachse.

Freilich kann man die Schwierigkeit, auf die man bei der Konstruktion des Kräfteplanes stößt, sobald man an der Grundfigur angelangt ist, auch auf rein geometrischem Wege, ohne Zuhülfenahme der Momentenmethode, überwinden. Diesem Zwecke dienen die ebenfalls in Abb. 17^b eingetragenen punktiert ausgezogenen Linien. Man bedenke nämlich, daß in dem Kraftecke $nopq$, das zu dem gleichnamigen Knotenpunkte des Binders gehört, zwei Seiten, nämlich nq und pq, wie aus der

Binderfigur hervorgeht, gleichgerichtet sein müssen. Da sie ferner auch von demselben Punkte q ausgehen, müssen sie demnach auf dieselbe Gerade fallen. Das gesuchte Krafteck besteht also aus einem Dreiecke nop und einem auf der Verlängerung der Dreieckseite np liegenden Punkte q. Das Dreieck nop muß aber sechs geometrischen Bedingungen entsprechen, auf Grund deren es gefunden werden kann. Die drei Ecken müssen nämlich auf den durch die bereits bekannten Punkte m, d, e zu den Stäben mn, do, ep gezogenen Parallelen liegen und die Seiten müssen zu den Stabrichtungen no, op und nq oder pq parallel laufen.

Der schon in § 2 angeführte und bewiesene und damals bereits in ähnlicher Weise benutzte geometrische Satz über Eigenschaften eines veränderlichen Vieleckes verhilft uns zur Lösung dieser Aufgabe. Wir ziehen die Linie $n'o'$ in der vorgeschriebenen Richtung no, sonst aber beliebig und von n' und o' aus Parallelen zu den Richtungen op und nq oder pq. Dadurch erhalten wir das durch punktierte Linien angegebene Dreieck $n'o'p'$. Dieses erfüllt fünf der angegebenen Bedingungen, die sechste aber nicht, da p' nicht auf der von e zum Stabe ep gezogenen Parallelen enthalten ist. Man kann sich unendlich viele Dreiecke $n'o'p'$ konstruiert denken und unter ihnen muß auch das gesuchte Dreieck nop enthalten sein. Nach dem in Erinnerung gebrachten Satze liegen alle Punkte p' dieser Dreiecke auf einer Geraden. Es ist nicht nötig, noch ein zweites Dreieck $n'o'p'$ zu konstruieren, um diese Gerade zu finden. Man bedenke nämlich, daß das Dreieck $n'o'p'$ auch zu einem Punkte, nämlich zum Schnittpunkte der Linien mn und do zusammenschrumpfen kann. Dieser Schnittpunkt ist daher auch eine mögliche Lage des Punktes p' und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Punkte p' des bereits gezeichneten Dreieckes liefert daher sofort die Gerade, auf der alle Punkte p' liegen müssen. Der Punkt p des gesuchten Dreieckes wird nun ohne weiteres als Schnittpunkt der gezogenen Verbindungslinie mit der bereits bekannten Richtungslinie ep gefunden. Von da aus erhält man sofort auch die

Punkte *n* und *o*, sowie in der Verlängerung von *np* den Punkt *q*.*) Hiermit sind wir zu demselben Resultate gelangt, das vorher unter Zuhülfenahme der Ritterschen Methode abgeleitet worden war.

Vergleicht man hier wieder beide Wege miteinander, so läßt sich nicht verkennen, daß der zuletzt betretene für den mit ihm gut Vertrauten der kürzere und bequemere ist. So lang nämlich auch die Auseinandersetzung ausfiel, die zur Beschreibung und Begründung des Verfahrens erforderlich war, so schnell ist, wenn man es erst kennt, seine Ausführung. Man braucht in der Tat nur die vier in Abb. 17[b] punktiert ausgezogenen Linien als Parallelen zu bekannten Stabrichtungen zu ziehen und spart damit vollständig die Ausrechnung einer Stabspannung nach der Momentenmethode, die wenn auch an sich ganz einfach, immerhin etwas mehr Mühe verursacht. Außerdem muß man wohl auch sagen, daß die konsequente Befolgung der geometrischen Methode beim Zeichnen des Kräfteplanes stilgerechter ist, als die Benutzung einer dazwischen hinein geschobenen Rechnung. Diesem letzten Einwande ließe sich freilich dadurch bis zu einem gewissen Grade begegnen, daß man nach Führung des Schnittes $\sigma\sigma$ die Spannungen der durchschnittenen Stäbe nach dem Culmannschen Verfahren anstatt nach dem Ritterschen ermittelte. Immerhin wird auch hierbei die Konstruktion des Kräfteplanes in störender Weise unterbrochen.

Dies alles ist zuzugeben und auch hinzuzufügen, daß es sich für den Ingenieur einer Eisenkonstruktionswerkstätte, der solche Kräftepläne sehr häufig zu zeichnen hat, entschieden lohnt, sich mit dem auseinandergesetzten geometrischen Verfahren vertraut zu machen. Andererseits darf man hierin aber auch nicht zu weit gehen. In den Überlegungen, die zur

*) Übrigens läßt sich die vorausgehende Überlegung auch noch durch die Bemerkung vereinfachen, daß hier alle Dreiecke $n'o'p'$, die man in der angegebenen Weise zu konstruieren vermag, ähnlich sind und ähnlich zu einander liegen, so daß der Schnittpunkt der Linien *do* und *mn* das Ähnlichkeits-Zentrum bildet.

Lösung nötig sind, ist das Rittersche Verfahren entschieden das einfachere und wer sich im einzelnen Falle des geometrischen Verfahrens gerade nicht mehr recht entsinnt, möge getrost das Rittersche Verfahren anwenden. Die Hauptsache bleibt immer, die Stabspannungen in kürzester Zeit zuverlässig zu ermitteln, ohne Rücksicht darauf, wie dies geschieht.

Schließlich muß noch einer sehr wichtigen Verwendung der Ritterschen Methode gedacht werden. Bisher war nämlich immer nur von der Ermittelung der Stabspannungen die Rede, die zu einem bestimmten, gegebenen Lastsysteme gehören. Bei der Berechnung von Dachbindern kommt man damit freilich immer aus, indem man außer auf gleichförmig verteilte senkrechte Lasten nur noch auf die Belastung durch Winddruck zu achten braucht. Diese erfordert zwar die Konstruktion weiterer Kräftepläne, die aber genau so wie in den vorhergehenden Fällen erfolgen kann. Anders ist es aber bei Brückenträgern. Die Lasten können hier auf sehr verschiedene Arten verteilt sein und man steht dann vor der Frage, bei welcher Lastverteilung die größte Spannung in einem bestimmten Stabe hervorgerufen wird. In diesem Falle braucht man sich in der Tat jeweilig nur um eine einzige Stabspannung zu kümmern, während die übrigen einstweilen gleichgültig sind. Das Rittersche Verfahren ist dann allein praktisch brauchbar. Man verfährt so, daß man zunächst nur eine Belastung des Trägers durch eine Einzellast ins Auge faßt. Nach dem Ritterschen Verfahren läßt sich schnell entscheiden, bei welchen Stellungen dieser Last auf dem Träger Zug- oder Druckspannungen in dem betrachteten Stabe hervorgerufen werden. Dann weiß man, welche Stellen des Trägers möglichst viel oder möglichst wenig belastet werden müssen, um die größte Zug- oder Druckspannung in dem Stabe hervorzubringen. — Ausführlichere Betrachtungen dieser Art greifen übrigens schon über den Rahmen der technischen Mechanik hinaus und sind der Lehre vom Brückenbaue vorzubehalten. An einigen Stellen wird indessen darauf in der Folge noch kurz zurückgekommen werden.

Aufgaben.

1. *Aufgabe. Vier gleich lange Stangen sind an den Enden gelenkförmig miteinander verbunden; außerdem ist ein Diagonalstab d eingeschaltet (vgl. Abb. 18^a). Man soll die Spannung in d ermitteln, wenn das Viereck längs der andern Diagonalen mit einer Kraft P zusammengedrückt wird. In welcher Beziehung steht das Verhältnis der Kräfte P und S_d zu den Längen der Diagonalen im Rhombus?*

Lösung. Abb. 18^b gibt den Kräfteplan an, der zu der angenommenen Belastung der Stangenverbindung gehört. Er konnte leicht als reciproker Kräfteplan eingerichtet werden. Man erkennt, daß im vorliegenden Falle der Kräfteplan zugleich der Figur der

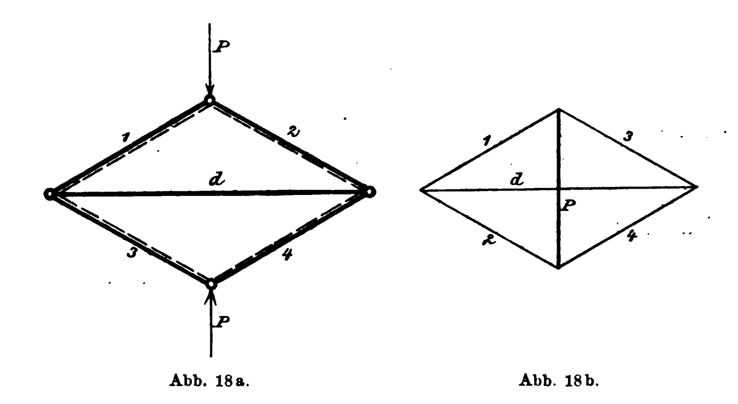


Abb. 18a. Abb. 18b.

Stangenverbindung ähnlich ist. Freilich entsprechen sich die ähnlich liegenden Seiten in beiden Figuren nicht einander. Die Last P und die Spannung in d verhalten sich, wie aus dem Vergleiche beider Figuren hervorgeht, wie die beiden Rhombusdiagonalen zueinander.

2. *Aufgabe. Man soll den Kräfteplan für den in Abb. 19^a gezeichneten Dachbinder konstruieren. Die an den Knotenpunkten des Obergurtes angreifenden Lasten sind alle senkrecht und gleich groß.*

Lösung. In solchen Fällen wird man den Kräfteplan immer als reciproken einrichten. Ich will das Verfahren hier gleich so beschreiben, wie man es handhabt, wenn man schon eine gewisse Übung erlangt hat. Von früher her ist bekannt, daß man den reciproken Kräfteplan mit dem Kraftecke der äußeren Kräfte beginnen muß. Man zieht also eine Senkrechte, trägt die fünf Knoten-

punktslasten darauf ab, schreibt die Buchstaben *b* bis *g*, den im Binder bereits eingetragenen Bezeichnungen entsprechend, bei, halbiert die Strecke *bg*, beachtet, daß nun jede der beiden Hälften einen Auflagerdruck bedeutet und schreibt dem Halbierungspunkte

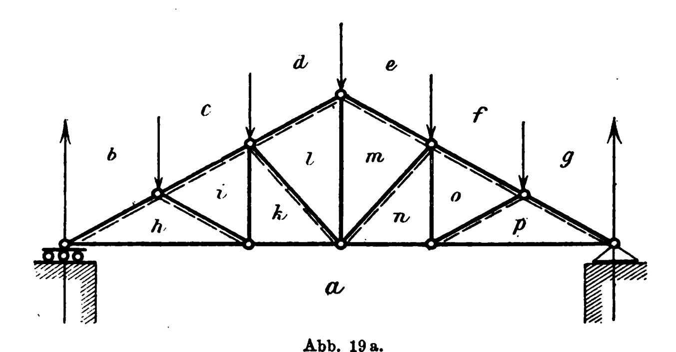


Abb. 19a.

hiernach den Buchstaben *a* bei. Die doppelt zu denkende Strecke *bcdefgab* bildet das Krafteck der äußeren Kräfte.

Nun zieht man durch *a* eine Horizontale und bedenkt, daß auf dieser sämtliche Stabspannungen des Untergurtes übereinander von *a* aus abgeschnitten werden müssen, d. h. die den Polygonen *h*, *k*, *n*, *p* in der Binderfigur entsprechenden Punkte des Kräfteplanes müssen auf jener Horizontalen liegen. Ebenso zieht man sofort durch die Punkte *b*, *c*, *d* Parallelen zum linksseitigen und durch *e*, *f*, *g* Parallelen zum rechtsseitigen Obergurt des Binders. Auf diesen müssen die Punkte enthalten sein, die den an den Obergurt angrenzenden Polygonen *h*, *i*, *l* und *m*, *o*, *p* des Binders entsprechen. Man braucht zwar diese Parallelen erst nach und nach für die Konstruktion des Kräfteplanes; es ist aber am vorteilhaftesten, sie alle gleich auf einmal zu ziehen, weil man damit Zeit und Mühe spart und auch größere Genauigkeit erzielen kann, als wenn man jede später einzeln für sich zöge.

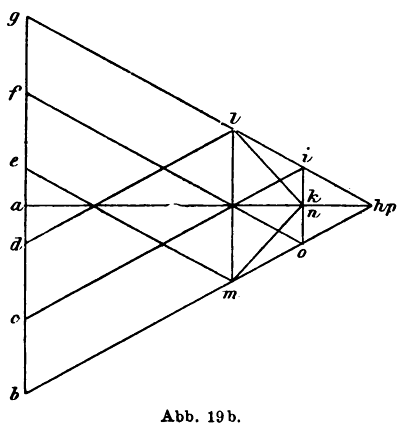
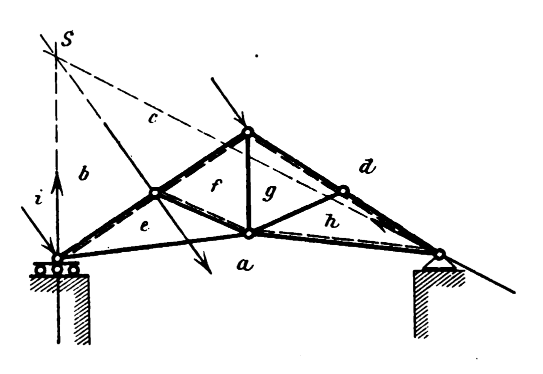


Abb. 19b.

Nachdem die Parallelen zu den Gurtstäben alle gezogen sind, sucht man den Punkt *h* auf, der als Schnitt von zwei bereits vorhandenen Linien gefunden wird, zieht dann der Reihe nach die Parallelen *hi*, *ik*, *kl* u. s. f., womit schnell alle Punkte des Kräfteplanes gefunden werden. Beim Ziehen dieser Linien braucht man übrigens nicht mehr an die Konstruktion einer reciproken Figur zu denken. Es ist vielmehr besser, wenn man dabei den Kräfteplan sofort als solchen, d. h. als Aneinanderreihung von Kraftecken auffaßt. Beim Aufsuchen des in Abb. 19[b] mit *h* bezeichneten Punktes denke man also sofort an das Kräftedreieck *a h b*, beim Aufsuchen von *i* an das Kräfteviereck *b c i h*, das dem gleichbezeichneten Knotenpunkte des Binders entspricht und ermittele hieraus das Vorzeichen der Stabspannungen. — Auch das Einschreiben der Bowschen Bezeichnung der Polygone in die Binderfigur wird für den Geübten bald entbehrlich; man kann dann wieder zu der in anderer Hinsicht bequemeren Numerierung der Stäbe übergehen. Für die erste Einübung und so lange man sich noch nicht recht sicher fühlt, wird aber die Bowsche Bezeichnung die besseren Dienste tun.



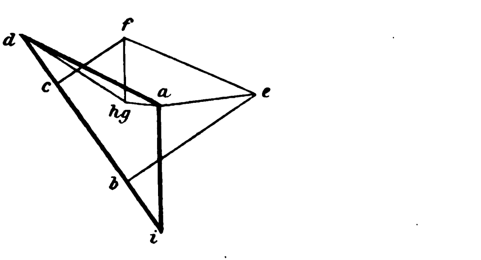


Abb. 20a und 20b.

3. *Aufgabe. Man soll den Kräfteplan für den durch Winddruck einseitig belasteten Dachbinder in Abb. 20[a] zeichnen.*

Lösung. Zuerst sind die durch die Windbelastung hervorgerufenen Auflagerkräfte zu ermitteln. In Abb. 20[a] ist angenommen, daß die zum beweglichen Auflager gehörige Dachseite belastet ist. Die Resultierende des Winddruckes geht durch den in der Mitte der Dachseite gelegenen Knotenpunkt und steht senkrecht zur Dach-

fläche. Mit dieser Resultierenden müssen die beiden Auflagerkräfte im Gleichgewichte stehen. Die Richtungslinien aller drei Kräfte müssen sich daher in einem Punkte schneiden. Da im beweglichen Auflager (von der geringen rollenden Reibung abgesehen) nur ein senkrecht zur Auflagerbahn stehender Auflagerdruck übertragen werden kann, findet man den Schnittpunkt S der drei Kräfte und hiermit auch die Richtungslinie des im festen Auflager übertragenen Auflagerdruckes ohne weiteres. Nach dieser Vorbereitung kann man mit der Konstruktion des Kräfteplanes in Abb. 20^b sofort beginnen. Man trägt zuerst den ganzen Winddruck auf und zieht Parallelen zu den Richtungslinien beider Auflagerkräfte. Dann teilt man den Winddruck noch in die zu den drei Knotenpunkten gehörigen Teile dc, cb und bi ein. Dann bleibt nur noch übrig, die zum Binder reciproke Figur zu konstruieren, was genau so wie in den vorhergehenden Fällen ausgeführt werden kann. Dabei findet man, daß die Punkte g und h zusammenfallen. Der Stab gh ist nämlich bei diesem Belastungsfalle spannungslos.

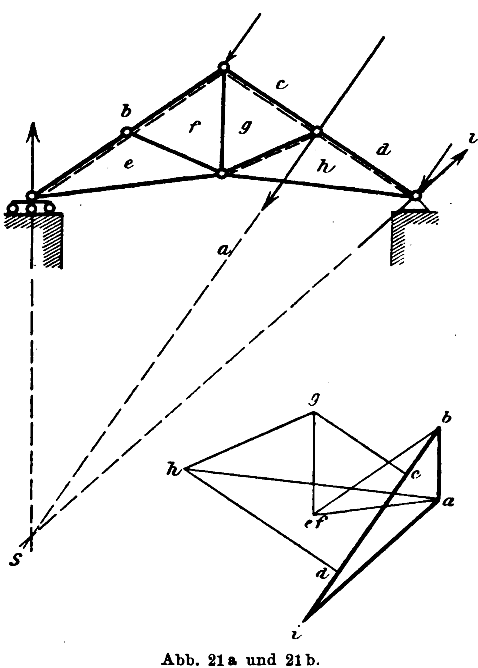


Abb. 21 a und 21 b.

4. *Aufgabe. Dasselbe für den Fall, daß die Windbelastung auf die zum festen Auflager gehörige Dachseite entfällt (Abb. 21^a).*

Lösung. In Bezug auf Windbelastung ist der Träger nicht symmetrisch, da sich die zum festen Auflager gehörige Dachseite anders verhält, als die jenseitige. Man muß daher in allen solchen Fällen zwei Kräftepläne konstruieren, um die ungünstigsten Stabspannungen zu finden. Im übrigen ist aber das Verfahren genau so wie vorher; es bedarf daher zu Abb. 21^b keiner besonderen Erläuterung.

5. *Aufgabe. An dem durch Abb. 22ᵃ dargestellten Stangenfünfecke mit den sich überkreuzenden Diagonalstäben 6 und 7 greifen die beiden Kräfte P als Lasten an; man soll die Stabspannungen ermitteln.*

Lösung. Man beginnt mit dem Knotenpunkte, in dem die Stäbe 1 und 2 zusammenstoßen, da an ihm nur zwei der Größe nach unbekannte Kräfte angreifen; dann geht man zum Knotenpunkte 1, 5, 6 oder auch zu 2, 7, 3 über u. s. f. Wünscht man, daß der Kräfteplan ein reciproker wird, wie in Abb. 22ᵇ, so läßt sich dies auch leicht nach einigem Probieren erreichen. Im übrigen

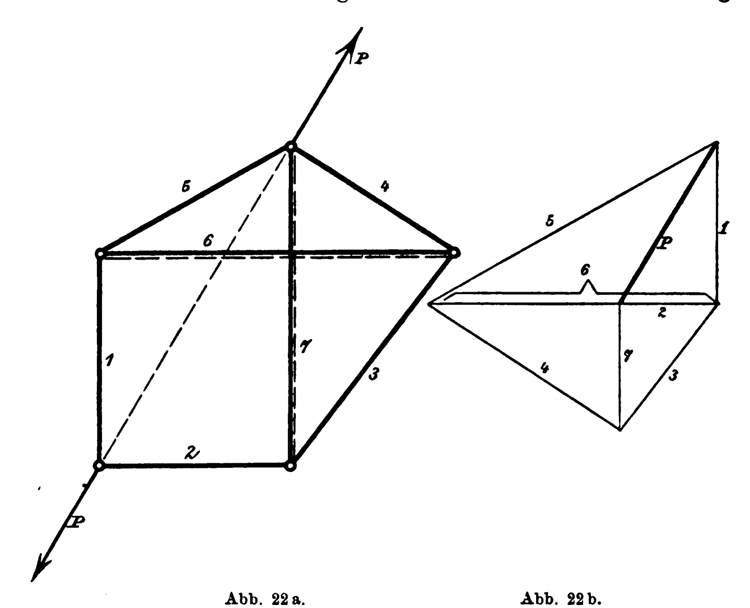


Abb. 22 a. Abb. 22 b.

ist darauf in solchen Fällen nicht viel Wert zu legen, da ein beliebig angeordneter anderer Kräfteplan die gleichen Dienste tut. — Eine einfache Regel für die Konstruktion des reciproken Kräfteplanes läßt sich im vorliegenden Falle deshalb nicht geben, weil nicht unmittelbar klar ist, wie man die Figur des Stabwerkes in Polygone zerlegen kann, so daß jede Richtungslinie als gemeinschaftliche Seite in zwei aneinander grenzenden Polygonen auftritt. Die Zerlegung ist freilich möglich; die Polygone greifen aber dann übereinander. Es sind die polygonalen Züge $P, 1, 5, P$ und $P, 2, 7, P$, ferner die geschlossenen Stabpolygone 1, 2, 3, 6; 3, 4, 7 und 4, 5, 6.

Eine andere Lösung derselben Aufgabe ist in den Abb. 23

dargestellt. Bei ihr ist angenommen, daß die sich überkreuzenden Stäbe 6 und 7 an der Kreuzungsstelle miteinander verbunden seien. Jeder von beiden Stäben zerfällt dann in zwei andere; man hat daher zwei Unbekannte mehr, wofür aber auch ein neuer Knotenpunkt hinzutritt, für den Gleichgewicht bestehen muß. Solange dieser Knotenpunkt nicht durch äußere Kräfte belastet wird, ändert sich durch die Verbindung garnichts an den Stabspannungen. Man bedenke nämlich, daß das Krafteck aus den Stabspannungen 6, 6′, 7, 7′ jedenfalls als Parallelogramm (hier als Rechteck) gezeichnet werden kann. Die Spannungen 6 und 6′ sind daher nach

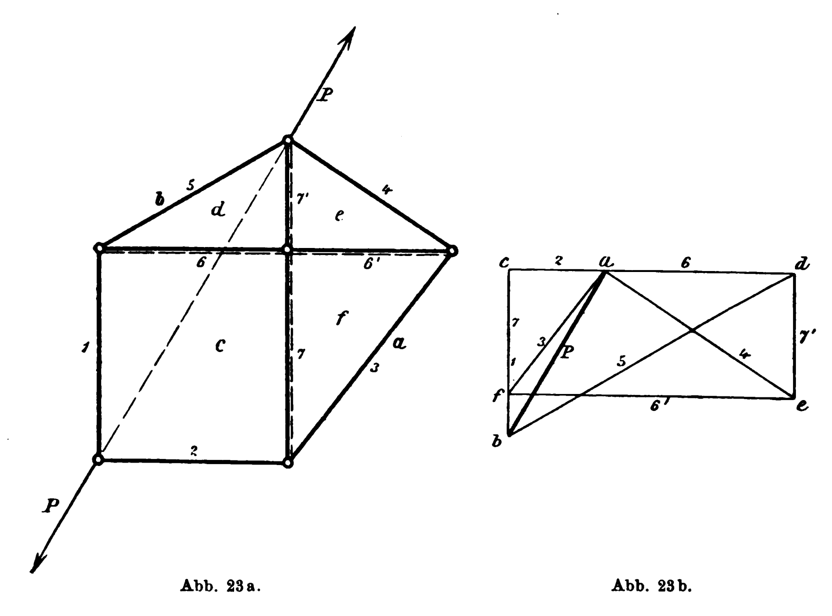


Abb. 23a. Abb. 23b.

Größe und Vorzeichen einander gleich und ebenso 7 und 7′. Es ist also in der Tat genau so, als wenn die Stäbe ohne Verbindung aneinander vorbei gingen.

Bei dieser Fassung der Aufgabe läßt sich sofort nach einfacher Regel ein reciproker Kräfteplan zeichnen, der freilich mit dem im vorigen Falle nicht übereinstimmt, obschon natürlich dieselben Spannungen in ihm vorkommen. Man kann hier nämlich die Figur des Stabverbandes in Polygone zerlegen, die der gestellten Forderung genügen, ohne sich zu überdecken. Diese Polygone sind wieder nach Bow durch Buchstaben bezeichnet, während der Übersichtlichkeit wegen zugleich die Stabnummern der vorigen Zeichnung

beibehalten sind. Der Kräfteplan kann dann in Abb. 23[b] sofort als reciproke Figur des Stabverbandes hingezeichnet werden. — Zugleich ist noch zu beachten, daß Abb. 23[b] auch als Kräfteplan zu Abb. 22[a] angesehen werden kann. Zu dieser Figur ist er aber nicht reciprok, da die Seiten 6 und 7 in ihm doppelt vertreten sind.

6. *Aufgabe. Abb. 24[a] (S. 60) gibt eine Stabverbindung an, die aus der vorigen durch Hinzufügung eines Dreieckes entsteht. Man verwendet sie in dieser oder einer ähnlichen Form zum Aufbaue von Kran-Gerüsten. Dem entsprechend ist angenommen, daß die unteren Knotenpunkte auf einem festen Unterbaue oder einem Wagengestelle aufgelagert sind, wobei der sie vorher verbindende Stab als solcher fortfallen kann, da er schon durch den Unterbau ersetzt ist. An dem vorkragenden Ende ist eine in sonst beliebiger Richtung gehende, aber in der Ebene des Stabverbandes liegende Last A angebracht; man soll die dadurch hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.*

Lösung. Der am linken Auflagerknotenpunkte übertragene Auflagerdruck C kann, da von dort nur ein Stab ausgeht, nur in dessen Richtung fallen. Man verlängert diese Richtungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie der Last und zieht von da eine Verbindungslinie zum rechten Auflagerpunkte. Dadurch erhält man, wie schon bei Aufg. 3, die Richtung des Auflagerdruckes B. (Der Schnittpunkt der drei Richtungslinien ist, um Raum zu sparen, auf der Zeichnung nicht mehr enthalten.) Dann beginnt man den Kräfteplan mit dem Kraftecke ABC der drei äußeren Kräfte. Von da aus kann er in derselben Weise weiter gezeichnet werden, wie im vorigen Beispiele.

Wenn A in lotrechter Richtung geht, können B und C, die dann parallel zu A werden, nicht mehr durch das Kräftedreieck ABC ermittelt werden. Man berechnet sie dann am einfachsten mit Hülfe des Momentensatzes. Im übrigen wird aber dadurch an der Konstruktion des Kräfteplanes nichts geändert, denn daß die drei Seiten des Dreieckes ABC dann in eine Gerade fallen, hindert nicht, die Zeichnung, sobald nur die drei Eckpunkte des Dreieckes aufgetragen sind, in derselben Weise weiter zu führen, wie vorher.

Schließlich möge noch darauf hingewiesen werden, daß bei einem Krane außer den Stabspannungen auch noch Seilspannungen vorkommen. Von dem Knotenpunkte, an dem die Last A angebracht ist, möge etwa ein Seil oder eine Kette längs des Stabes gc und von dessen Endpunkt über eine Leitrolle längs der Stäbe df und eb herabgeführt werden. Die Seilspannungen sind aus der Berechnung der Windevorrichtung jedenfalls bekannt. Man bedenke dann, daß die durch den Kräfteplan ermittelten Spannungen die algebraische

Summe aus Seilspannung und Stabspannung angeben. Geht also das Seil neben einem gezogenen Stabe wie *gc* entlang, so bewirkt

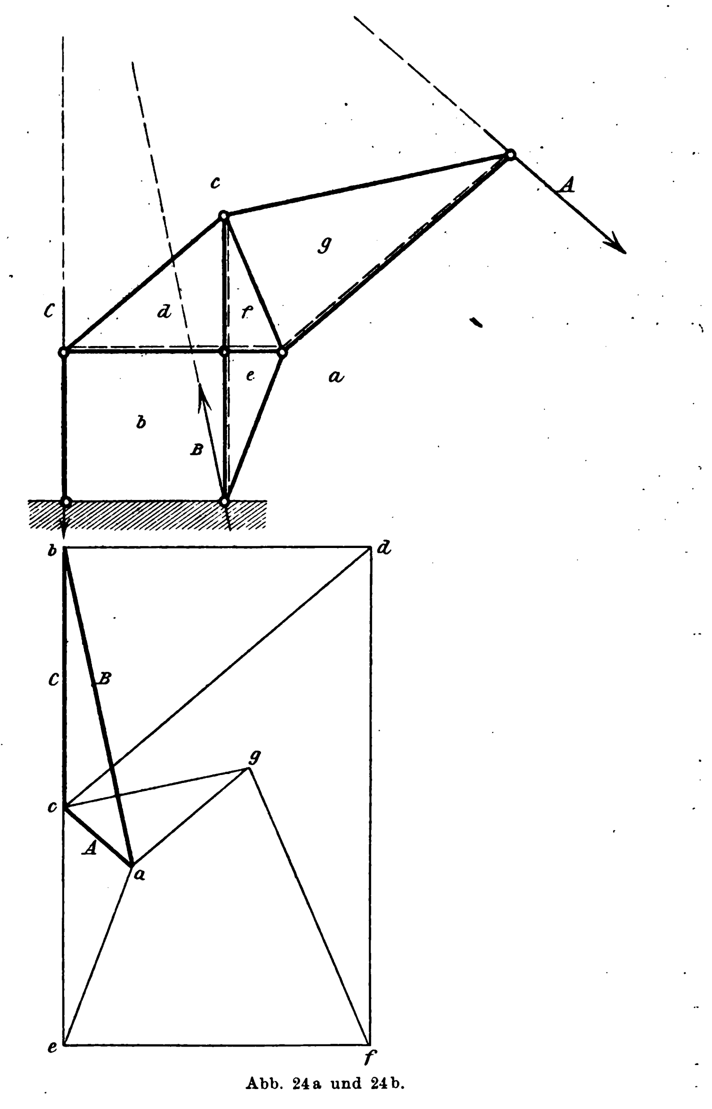


Abb. 24a und 24b.

die Seilspannung eine ihr gleiche Entlastung des Stabes, während die Spannung eines gedrückten Stabes, wie *df* oder *be*, um diesen

Betrag vergrößert wird. — Anstatt dessen kann man sich natürlich auch das Seil ganz entfernt denken und dafür die auf die Rollen von ihm übertragenen Kräfte als Lasten am Stabverbande anbringen. Die vorher angestellte Überlegung führt aber gewöhnlich schneller zum Ziele.

7. *Aufgabe. Man soll für den in Abb. 25ᵃ dargestellten Stabverband, an dem sich die äußeren Kräfte P_1, P_2, P_3 im Gleichgewichte halten, den Kräfteplan konstruieren.*

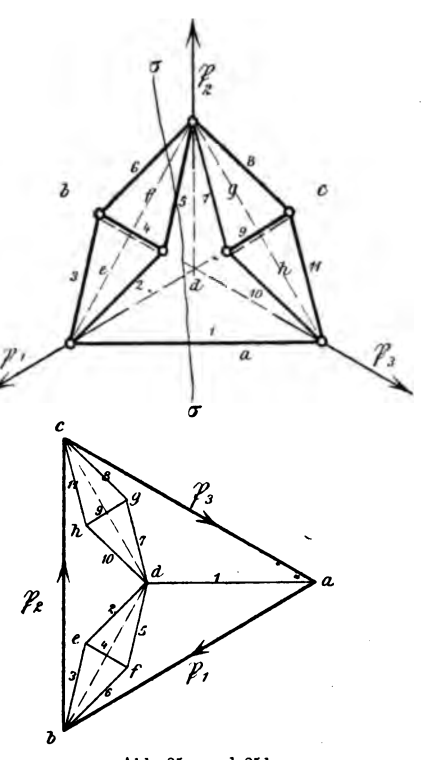


Abb. 25a und 25b.

Lösung. Hier ist wieder eine „schlichte" Zerlegung der Figur in Polygone möglich, d. h. eine Zerlegung in Polygone, die nebeneinander liegen, ohne sich zu überdecken. Daher kann auch ein reciproker Kräfteplan ohne mehr Schwierigkeit als ein anderer gezeichnet werden. Eine Schwierigkeit besteht jedoch für die Konstruktion des Kräfteplanes, ohne Rücksicht auf dessen besondere Anordnung. An jedem Knotenpunkte greifen nämlich mindestens drei Stabspannungen an; man kann daher den Kräfteplan nicht in der gewöhnlichen Weise beginnen. Auch wenn man den Kräfteplan nicht vom mechanischen Gesichtspunkte aus betrachtet, sondern ihn als reciproke Figur rein geometrisch auffaßt, bleibt die Schwierigkeit bestehen, da keines der Stabpolygone an zwei der zu den äußeren Kräften gehörigen Polygonzüge *a*, *b*, *c* angrenzt. Der zugehörige Punkt des Kräfteplanes kann daher nicht als Schnitt von zwei Parallelen aufgefunden werden.

Dagegen kann die Rittersche Methode ohne weiteres angewendet werden, da sich ein Schnitt $\sigma\sigma$ legen läßt, der nur drei, nicht durch denselben Punkt gehende Stäbe trifft. Hat man auf diese Weise die Spannung des unteren horizontalen Stabes 1 ge-

funden, so steht der weiteren Konstruktion des Kräfteplanes auf dem gewöhnlichen Wege kein Hindernis mehr im Wege.

Anstatt dessen führt hier auch eine andere Überlegung sehr einfach zum Ziele. Man bedenke nämlich, daß die Stäbe 2, 3, 4, 5, 6 für sich genommen eine unverschiebliche Figur bilden, die im ganzen Verbande nur die Aufgabe hat, die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2 miteinander zu verbinden. Dies könnte ebensogut auch durch einen einzigen Stab geschehen, dessen Richtungslinie gestrichelt eingetragen ist, ohne daß sich dadurch für die übrigen Stäbe etwas änderte. Das Gleiche gilt für das auf der rechten Seite aus den Stäben 7, 8, 9, 10, 11 zusammengestellte Stabviereck. Man beginne also den Kräfteplan in Abb. 25^b zunächst wie gewöhnlich mit dem Kraftecke *abc* für die äußeren Kräfte. Dann konstruiere man den Punkt *d* unter der Voraussetzung, daß die vorerwähnten beiden Stabvierecke durch einfache

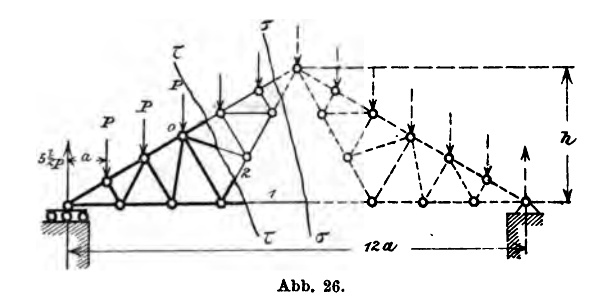


Abb. 26.

Stäbe ersetzt seien, so daß der Stabverband nur noch aus drei Stäben bestehe. Dies geschieht durch Ziehen der drei Parallelen von *a*, *b*, *c* aus, die sich von selbst in einem Punkte schneiden müssen. Damit hat man schon die Spannung *ad* des Stabes 1. Die Linien *cd* und *bd* geben die Kräfte an, die von den beiden Stabvierecken aufgenommen werden müssen. Diese können dann genau wieder so in die einzelnen Stabspannungen zerlegt werden, wie es im gleichen Falle bei Aufgabe 1 geschehen war. — Die Stäbe 4 und 9 sind gedrückt, alle übrigen gezogen.

8. Aufgabe. Für den in Abb. 26 gezeichneten Dachbinder soll die Spannung des mit 1 bezeichneten mittelsten Stabes der Untergurtung nach der Ritterschen Methode berechnet werden, wenn jeder Knotenpunkt des Obergurtes die senkrechte Last P trägt. Nachher ebenso die Stabspannung von 2.

Lösung. Man lege den Schnitt σσ; der Momentenpunkt für Stab 1 ist der Firstknotenpunkt. Der Auflagerdruck ist $5\frac{1}{2}P$,

sein Hebelarm $6a$. Die Summe der Momente der äußeren Kräfte links vom Schnitte für den Momentenpunkt ist

$$5\frac{1}{2}P\cdot 6a - P\cdot 5a - P\cdot 4a - P\cdot 3a - P\cdot 2a - Pa = +18Pa.$$

Ebenso groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen muß das Moment der Stabspannung S_1 des Stabes 1 sein. Daraus folgt zunächst, daß S_1 eine Zugspannung ist. Die Größe beträgt

$$S_1 = \frac{18\,Pa}{h}.$$

Um auch S_2 zu erhalten, lege man den Schnitt $\tau\tau$, der freilich außer 2 noch drei andere Stäbe trifft. Unter diesen ist aber der Stab 1, dessen Spannung man schon kennt. Als Momentenpunkt für Stab 2 ist daher der Schnittpunkt O der beiden andern Stabrichtungen zu wählen. Für die äußeren Kräfte links vom Schnitte erhält man die Momentensumme

$$5\frac{1}{2}P\cdot 3a - P\cdot 2a - P\cdot a = 13{,}5\,Pa.$$

Dazu kommt das im negativen Sinne drehende Moment von S_1, das für O wegen des auf die Hälfte verminderten Hebelarmes nur noch $9\,Pa$ beträgt. Das Moment von S_2 muß hiernach $-4{,}5\,Pa$ betragen. Demnach ist auch der Stab 2 gezogen. Da der Hebelarm von 2 ebenso groß als der von 1, also gleich $\frac{h}{2}$ ist, findet man

$$S_2 = 4{,}5\,Pa : \frac{h}{2} = \frac{9\,Pa}{h},$$

d. h. die Spannung von 2 ist halb so groß, als die von 1.

In der Abb. 26 sind der besseren Übersicht wegen die links vom Schnitte $\tau\tau$ liegenden Teile stark, die links von $\sigma\sigma$ liegenden schwächer und die rechts davon liegenden gestrichelt ausgezogen.

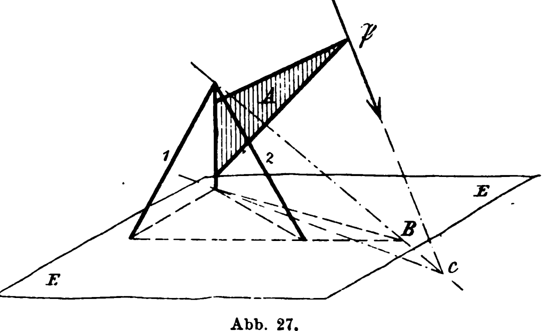


Abb. 27.

9. Aufgabe.

In Abb. 27 ist das Gerüst für einen sogen. Derrik-Kran in achsonometrischer Zeichnung angegeben. Auf der horizontalen Ebene EE

sind die Stäbe 1 und 2 und die senkrechte Kransäule befestigt. Der Ausleger A kann sich mit der Kransäule um deren senkrechte Achse drehen. Bei irgend einer Stellung des Auslegers trägt dieser an seinem Ende eine Last $\mathfrak{P}$, *deren Richtungslinie in der Ebene von A enthalten sein muß (weil sonst eine Drehung von A eintreten würde),*

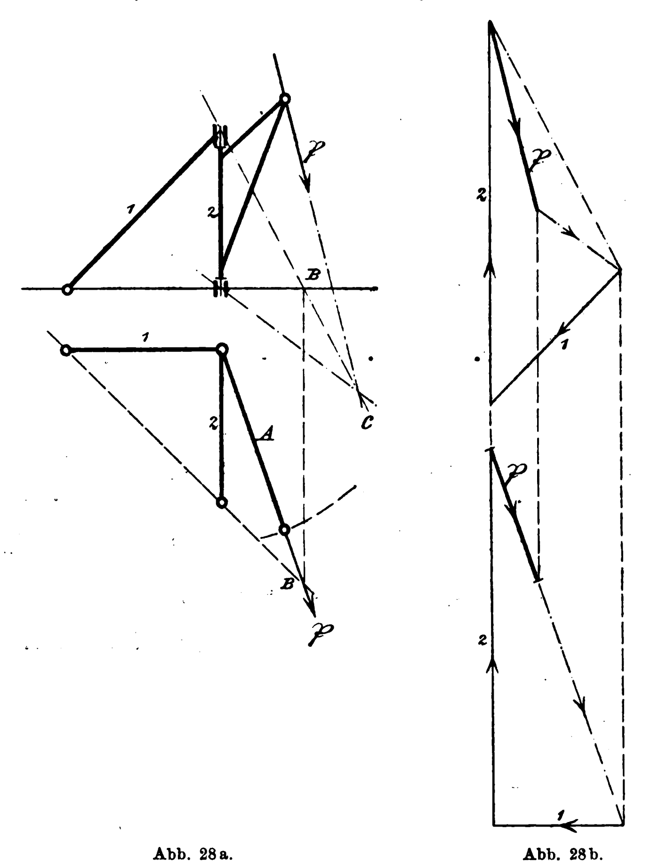


Abb. 28a. Abb. 28b.

in dieser Ebene aber beliebig gerichtet sein kann. Man soll die Spannungen der Stäbe 1 und 2 ermitteln.

Lösung. Am Ausleger greifen drei Kräfte an: die Last $\mathfrak{P}$, der Auflagerdruck am unteren Ende der Kransäule und die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 am oberen Ende. Damit Gleichgewicht bestehen kann, müssen sich die Richtungslinien der drei Kräfte in einem Punkte schneiden. Von $\mathfrak{P}$ ist die Richtungs-

linie bereits gegeben. Die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 muß einerseits in die durch 1 und 2 gelegte Ebene, andererseits in die Ebene A fallen; sie liegt daher in der Schnittlinie beider Ebenen. Diese erhält man als Verbindungslinie des Schnittpunktes B der Horizontalspuren beider Ebenen mit dem oberen Endpunkte der Kransäule. Der Schnitt dieser Linie mit der Richtung von $\mathfrak{P}$ liefert den Punkt C, in dem sich die drei Kraftrichtungslinien treffen und die Verbindungslinie von C mit dem unteren Endpunkte der Kransäule gibt daher die Richtung des Auflagerdruckes an diesem Endpunkte an.

Nach diesen Vorbemerkungen kann die Kräftezerlegung leicht ausgeführt werden. In Abb. 28^a ist das Krangerüst in Grundriß und Aufriß gezeichnet und Punkt C im Aufrisse konstruiert. Dann wird im Kräfteplane, Abb. 28^b, zuerst das Kräftedreieck aus P, dem Auflagerdrucke und der Resultierenden aus 1 und 2 gezeichnet, das sich im Grundrisse auf eine Gerade projiziert. Es bleibt nur noch übrig, die Resultierende aus 1 und 2 nach diesen beiden Richtungslinien zu zerlegen. Nachträglich kann man von dieser Resultierenden ganz absehen und den Kräfteplan als ein Kräfteviereck für den Auflagerdruck, die Last $\mathfrak{P}$ und die beiden Stabspannungen ansehen, die sämtlich am Ausleger angreifen. Dem entsprechend sind die Pfeile in Abb. 28^b eingetragen. Stab 1 ist gezogen und Stab 2 gedrückt. Die Größe der Stabspannungen ergibt sich durch Ermittelung der wahren Längen der Kraftecksseiten 1 und 2.

Man bemerkt übrigens, daß der Auflagerdruck bei der angenommenen Auslegerstellung und Belastung an der Kransäule schief nach abwärts gerichtet ist. Die Kransäule drückt daher das Lager schief nach aufwärts. Sofern nicht das Eigengewicht der Kransäule bereits ausreicht, um ein Abheben zu verhüten, muß man daher die Lagerung, wenn solche Belastungsfälle vorkommen können, so einrichten, daß sie ein Abheben unmöglich macht. — Die Kransäule wird auf Biegung in Anspruch genommen und ist dem entsprechend zu berechnen.

Zweiter Abschnitt.

Das Seilpolygon oder Seileck.

---

§ 10. Zusammensetzung von Kräften in der Ebene mit Hülfe des Seileckes.

In Abb. 29^a seien die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gegeben. Man findet ihre Resultierende $\mathfrak{R}$, falls sie nicht parallel sind, am einfachsten durch Aufsuchen des Schnittpunktes A ihrer Richtungslinien, Konstruktion des Kräftedreieckes $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{R}$ in Abb. 29^b und Ziehen einer Parallelen zu $\mathfrak{R}$ durch A. Schon wenn der Schnittpunkt A weit weg fällt, ist dieses Verfahren aber nicht mehr anwendbar. Man fügt dann zwei neue Kräfte $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ hinzu, vereinigt $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{P}_1$ zu $\mathfrak{S}_1$, dies mit $\mathfrak{P}_2$ zu $\mathfrak{S}_2$ und schließlich $\mathfrak{S}_2$ mit $\mathfrak{T}'$ zu $\mathfrak{R}$. Mit Hülfe des Kräfteplanes in Abb. 29^b kann dies leicht ausgeführt werden.

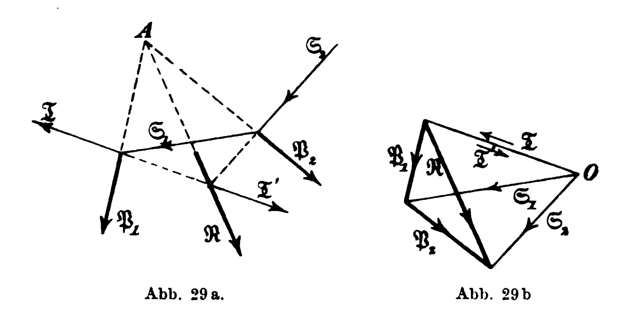


Abb. 29 a. Abb. 29 b

Der Linienzug $\mathfrak{T}\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ in Abb. 29^a wird ein Seilpolygon (oder Seileck, auch Seilzug) genannt, weil ein Seil von dieser

Gestalt unter den Lasten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ im Gleichgewichte bleibt, wenn die beiden Enden mit Kräften von der Größe $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}_2$ angespannt werden. Die Spannung des mittleren Seilstückes ist gleich $\mathfrak{S}_1$. Für ein Seil hat freilich $\mathfrak{S}_1$ keinen eindeutig bestimmten Pfeil, da dieser am Knotenpunkte $\mathfrak{T}\mathfrak{P}_1\mathfrak{S}_1$ entgegengesetzt zu nehmen ist, wie am andern Knotenpunkte $\mathfrak{S}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{S}_2$. Ebenso wäre auch der Pfeil der von außen her am letzten Seilstücke anzubringenden Kraft $\mathfrak{S}_2$ entgegengesetzt dem in Abb. 29^b eingetragenen zu wählen. Gewöhnlich denkt man aber bei der Benutzung des Seileckes gar nicht an ein wirkliches Seil, das die Lasten $\mathfrak{P}$ aufzunehmen hätte, sondern man benutzt es nur zur Kräftezusammensetzung. Die anschauliche Bezeichnung behält man trotzdem bei; man muß nur beachten, daß den „Seilspannungen“ $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ in diesem Falle eindeutig bestimmte Pfeile zukommen, nämlich jene, die aus dem Kräfteplane hervorgehen.

Die Abb. 29^a und 29^b sind reciproke Figuren. Jede von ihnen bildet ein vollständiges Viereck, d. h. ein Viereck mit vier Seiten und zwei Diagonalen. Durch jede Diagonale wird jedes Viereck in je zwei Dreiecke zerlegt und jedem der vier Dreiecke in der einen Figur entspricht ein Eckpunkt in der andern Figur.

Man kann sich die eine Figur willkürlich hingezeichnet denken und nachträglich die andere so konstruieren, daß sie zu ihr paßt. Hat man Abb. 29^a beliebig angenommen, so kann man in Abb. 29^b eine Seite, etwa $\mathfrak{P}_1$ noch in beliebiger Größe (aber in der vorgeschriebenen Richtung) wählen, von den Endpunkten Parallelen zu $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{T}$ (oder $\mathfrak{T}'$) ziehen und dann Parallelen zu $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{S}_2$ anreihen. Die letzte Linie $\mathfrak{R}$ ergibt sich aber dann als Verbindungslinie der beiden bereits vorhandenen Endpunkte. Jedenfalls muß sie aber, wenn sie so gezogen wird, von selbst in die ihr durch die reciproke Figur vorgeschriebene Richtung fallen. Dasselbe trifft zu, wenn man zuerst Abb. 29^b willkürlich annimmt und dann Abb. 29^a dazu konstruiert: in jedem Falle ist die letzte Linie, die man zu ziehen hat, schon als Verbindungslinie von

zwei Punkten bestimmt und zugleich muß sie der ihr in der reciproken Figur zugehörigen parallel gehen.

Diese Eigenschaft kann zunächst als eine willkommene Gelegenheit zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung betrachtet werden. Man bemerkt aber zugleich, daß sie eine rein geometrische Eigenschaft beider Figuren darstellt, da sie auch noch gültig bleibt, wenn man ganz von der mechanischen Bedeutung, die wir den Figuren gaben, absieht. Der Beweis beruht zwar auf dieser Deutung; die dadurch herausgefundene geometrische Gesetzmäßigkeit ist aber von ihr unabhängig. Wir können sie in dem Satze aussprechen: *Laufen in zwei vollständigen Vierecken fünf Seiten (oder Diagonalen) paarweise parallel, so trifft dies auch für das letzte Paar zu.*

Der Schnittpunkt A in Abb. 29[a] kann auch ins Unendliche rücken, d. h. die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ können parallel sein, ohne daß dadurch an dem beobachteten Verfahren, noch an dem daraus soeben abgeleiteten Satze etwas geändert würde. Drei Eckpunkte und drei Seiten des Kräfteplanes in Abb. 29[b] fallen dann in eine Gerade. — Außerdem sieht man auch leicht ein, daß mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ in derselben Weise zusammengesetzt werden können, wie hier die beiden. Das Seilpolygon erhält dann nur entsprechend mehr Seiten und im Kräfteplane gehen alle dazu parallel gezogenen „Polstrahlen" durch denselben Punkt O wie jetzt schon $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$. Dieser Punkt O wird der *Pol* des Kräfteplanes genannt. *In jedem Falle geht die Resultierende* aller $\mathfrak{P}$ in Abb. 29[a] durch den Schnittpunkt der letzten Seilspannung mit der Richtungslinie von $\mathfrak{T}'$ oder, wie wir auch sagen können, *durch den Schnittpunkt der äußersten Seilpolygonseiten.*

§ 11. Seilecke, die zu verschiedenen Polen gehören.

Zu gegebenen Kräften $\mathfrak{P}$ kann man beliebig viele Seilecke ziehen. Wir wollen uns irgend zwei gezogen und die ihnen entsprechenden Kräftepläne aufeinander gelegt denken, so daß sie die Seiten $\mathfrak{P}$ (und daher auch $\mathfrak{R}$) gemeinsam haben.

Man kann dann sagen, daß sich beide Kräftepläne nur durch eine verschiedene Wahl des Poles O von einander unterscheiden. Mit O ändern sich natürlich auch die Richtungen aller von ihm ausgehenden Polstrahlen. Wie nun auch die zu beiden Kräfteplänen gehörigen Seilpolygone im übrigen gezogen sein mögen: auf jeden Fall besteht zwischen ihnen eine beachtenswerte geometrische Beziehung. Die Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen (oder Seileckseiten) liegen nämlich auf einer Geraden und diese Gerade geht parallel zur Verbindungslinie beider Pole im Kräfteplane.

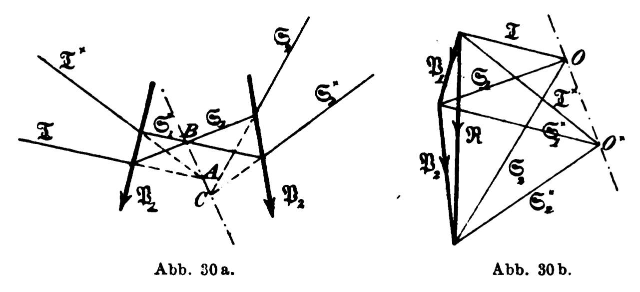


Abb. 30a. Abb. 30b.

Der Satz gilt zwar, wie man alsbald sehen wird, auch für zwei zu beliebig vielen Kräften $\mathfrak{P}$ konstruierte Seilecke; wir wollen ihn aber zunächst für den Fall beweisen, daß nur zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ durch das Seileck vereinigt werden. Abb. 30[a] gibt die beiden Seilpolygone $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{S}_1^*$, $\mathfrak{S}_2^*$ und Abb. 30[b] die zugehörigen Kräftepläne mit den Polen O und O^* an. Man suche zunächst die Schnittpunkte A von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ und B von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_1^*$ in Abb. 30[a] auf und verbinde beide durch eine Gerade. Dann fasse man das vollständige Viereck ins Auge, von dem A und B zwei Ecken sind, während die beiden andern Ecken durch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^*$ auf der Richtungslinie von $\mathfrak{P}_1$ abgeschnitten werden. Diesem vollständigen Vierecke entspricht ein anderes im Kräfteplane, dessen Ecken durch die beiden Pole O und O^* und die Endpunkte von $\mathfrak{P}_1$ gebildet werden. In beiden Vierecken laufen fünf Seiten, nämlich die mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{T}^*$ und $\mathfrak{S}_1^*$ bezeichneten parallel zueinander, nach

der Voraussetzung, daß Abb. 30[b] als Kräfteplan zu Abb. 30[a] gehören soll. Nach dem im vorigen Paragraphen bewiesenen geometrischen Lehrsatze müssen daher auch die letzten Seiten parallel zueinander sein, d. h. man hat $AB \parallel OO^*$.

Hierauf denke man sich den Schnittpunkt C der Seilstrahlen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_2^*$ in Abb. 30[a] aufgesucht und ihn mit B verbunden. Dem vollständigen Vierecke mit den Eckpunkten B und C und der Gegenseite $\mathfrak{P}_2$ entspricht im Kräfteplane das vollständige Viereck mit den Eckpunkten O und O^* und der Gegenseite $\mathfrak{P}_2$. Auch hier laufen fünf Seiten paarweise parallel und man schließt daraus, daß auch BC parallel OO^* sein muß. Durch den Punkt B ist aber nur eine Parallele zu OO^* möglich und daraus folgt, daß die Punkte A, B, C auf derselben Geraden liegen, die zu OO^* parallel geht.

Der Beweis läßt sich nun auch leicht auf den Fall ausdehnen, daß mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ durch das Seilpolygon verbunden sind. Faßt man nämlich von allen diesen Kräften nur zwei aufeinander folgende ins Auge, so bildet das Stück des Seilzuges, das mit dem vor der ersten von ihnen liegenden Seilstrahle beginnt, sich durch den zwischen beiden Kräften liegenden Seilstrahl fortsetzt und mit dem auf die zweite Kraft folgenden Seilstrahle endet, zugleich ein Seilpolygon für die Vereinigung dieser beiden Kräfte. Wenn wir also alle Linien, die sonst noch im Seilpolygone und im Kräfteplane vorkommen, unbeachtet lassen, so behalten wir nur noch die in Abb. 30[a] und 30[b] angegebenen Figuren übrig und der vorausgehende Beweis bleibt für diese Teilstücke unverändert gültig. Die Schnittpunkte A, B, C der entsprechenden Seilstrahlen in beiden Seilecken müssen daher auf einer zu OO^* parallelen Geraden liegen. Wiederholt man dann dieselbe Betrachtung für den Fall, daß die zweite der vorher ausgewählten Kräfte $\mathfrak{P}$ und die auf sie folgende dritte herausgegriffen werden, so findet man, daß nun auch der Schnittpunkt D der gegen vorher neu hinzugekommenen Seilstrahlen mit B und C auf einer Geraden liegen muß. Und wenn man in dieser Weise weiter fortschreitet, zeigt sich, daß auch alle übrigen Schnittpunkte

entsprechender Seilstrahlen auf der zuerst gefundenen Geraden *ABC* enthalten sein müssen.

Man macht von diesem Satze mit Vorteil Gebrauch, wenn man genötigt ist, zu gegebenen Lasten nacheinander mehrere Seilpolygone zu konstruieren. Dies kommt, wie man später sehen wird, namentlich bei der Konstruktion der Drucklinien von Gewölben vor. Man erspart dann, nachdem ein Seilpolygon gezeichnet ist, bei den übrigen das Ziehen der Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane, das mühsamer ist, als das Ziehen von Verbindungslinien nach den Schnittpunkten der Seilstrahlen des ersten Seileckes mit der zu OO^* parallelen Linie.

§ 12. Zerlegung paralleler Kräfte nach zwei Richtungslinien.

Eine gegebene Kraft $\mathfrak{P}$ läßt sich immer in eindeutiger Weise nach zwei zu ihr parallelen Richtungslinien zerlegen, die mit ihr in derselben Ebene liegen. Man kann diese Aufgabe als einen Sonderfall der schon in § 2 behandelten Aufgabe ansehen, eine Kraft nach zwei Richtungslinien zu zerlegen, die sich mit ihr in einem Punkte schneiden und mit ihr in derselben Ebene liegen. Der gemeinsame Schnittpunkt ist hier nur ins Unendliche gerückt. Mit Hülfe eines Kräftedreieckes läßt sich die Aufgabe freilich nicht mehr lösen. Am einfachsten führt gewöhnlich die Anwendung des Momentensatzes zum Ziele. Man bedenkt, daß die geometrische Summe beider Kräfte gleich der gegebenen sein muß und daß beide für einen auf der Richtungslinie der gegebenen liegenden Momentenpunkt gleich große und entgegengesetzt gerichtete Momente haben müssen. Liegen die vorgeschriebenen Richtungslinien zu verschiedenen Seiten der gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$, so sind beide gesuchten Kräfte gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und sie teilen sich in die Größe von $\mathfrak{P}$ im umgekehrten Verhältnisse ihrer Abstände von $\mathfrak{P}$. Im andern Falle ist die $\mathfrak{P}$ zunächst liegende Kraft mit ihr gleichgerichtet und größer als $\mathfrak{P}$, die andere entgegengesetzt gerichtet und gleich dem Unterschiede der vorigen. Dabei verhalten sich auch hier die Größen beider Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von $\mathfrak{P}$. Aus der Ver-

bindung beider Bedingungen folgt sofort die Lösung der Aufgabe. — Sollen die gesuchten Kräfte mit der gegebenen im Gleichgewichte stehen, so kehren sich natürlich ihre Pfeile gegenüber den vorher angegebenen um.

Wenn es sich nur um die Zerlegung einer einzigen Kraft nach gegebenen parallelen Richtungslinien handelt, wird man kaum von dem soeben besprochenen Verfahren abgehen. In andern Fällen kann aber die Lösung mit Hülfe des Seilpolygons, die ich jetzt und zwar zunächst für die Zerlegung einer einzigen Kraft geben werde, mit großem Vorteile benutzt werden. In Abb. 31[a] sei $\mathfrak{P}$ die Kraft, die nach den Richtungslinien 1 und 2 zerlegt werden soll. Man ziehe die Richtungslinien 3, 4, 5 sonst beliebig, aber so, daß die Ecken des von ihnen gebildeten Dreieckes auf den gegebenen Geraden liegen. Dann sehe man den Linienzug 3, 4, 5 als ein Seilpolygon an, mit dessen Hülfe sich die längs 1 und 2 wirkenden gesuchten Kräfte wieder zu ihrer Resultierenden $\mathfrak{P}$ vereinigen ließen. Zu diesem Seilpolygone läßt sich der Kräfteplan in Abb. 31[b] ohne weiteres zeichnen, indem man $\mathfrak{P}$ im Maßstabe abträgt und durch Ziehen der Parallelen zu 3 und 5 den Pol O aufsucht. Eine Parallele von O zu 4 schneidet dann auf $\mathfrak{P}$ die beiden gesuchten Kräfte 1 und 2 ab. Der Beweis folgt daraus, daß in der Tat zwei Kräfte von dieser Größe längs 1 und 2 mit Hülfe des Seilpolygons zur Resultierenden $\mathfrak{P}$ vereinigt werden können.

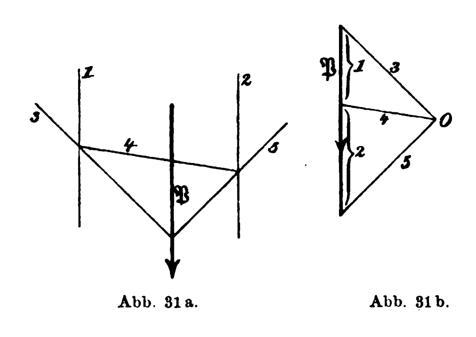


Abb. 31 a. Abb. 31 b.

Liegen 1 und 2 auf derselben Seite von $\mathfrak{P}$, so ändert sich die Figur so ab, wie es in Abb. 32[a] und 32[b] angegeben ist; das Verfahren bleibt aber sonst dasselbe. Die Kraft 2 ist gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$ und 1 entgegengesetzt gerichtet. Sollen

die Kräfte 1 und 2 mit 𝔓 Gleichgewicht halten, so sind ihre Pfeile umgekehrt zu nehmen.

Für einen Balken, der an zwei Stellen unterstützt ist und eine Einzellast 𝔓 trägt, kann man nach diesem Verfahren die Auflagerkräfte ermitteln. Voraussetzung ist dabei, daß die Auflagerung des Balkens so erfolgt, daß unter senkrechten Lasten auch nur senkrecht gerichtete Auflagerkräfte übertragen werden können. Trägt der Balken eine beliebige Zahl senkrecht gerichteter Lasten, so kann man diese erst zu einer Resultierenden vereinigen und diese nach den beiden Auflagervertikalen zerlegen. Die Zusammensetzung zur Resultierenden bewirkt man ebenfalls mit Hülfe des Seilpolygons, wie dies bereits näher auseinandergesetzt wurde.

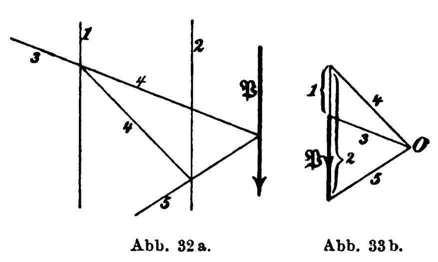


Abb. 32 a. Abb. 33 b.

In Abb. 33ᵃ und 33ᵇ ist dies ausgeführt. Man trägt in Abb. 33ᵇ die Lasten 1, 2, 3, 4 auf einer Lastlinie mit aufeinanderfolgenden Pfeilen im Maßstabe auf, wählt einen beliebigen Pol O und zieht die Polstrahlen. Zu diesen werden in Abb. 33ᵃ die Seilstrahlen parallel gezogen. Der Schnittpunkt E der äußersten Seilstrahlen liefert einen Punkt der Resultierenden ℜ. Diese wird dann so wie in Abb. 31 in die Auflagerkräfte A und B zerlegt. Den Linien 3 und 5 in Abb. 31 entsprechen hier bereits die äußersten Seilstrahlen; man braucht daher nur noch die Verbindungslinie CD der Schnittpunkte der äußersten Seilstrahlen mit den Auflagervertikalen zu ziehen, um die mit 4 in Abb. 31 bezeichnete Linie zu erhalten. Eine

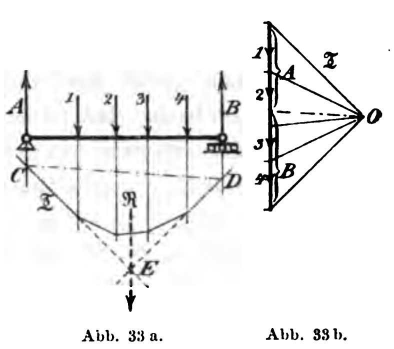


Abb. 33 a. Abb. 33 b.

Parallele zu dieser im Kräfteplane vom Pole O aus schneidet daher, wie schon früher gezeigt wurde, auf der Lastlinie die Auflagerkräfte A und B ab. — Zugleich erkennt man, daß zur wirklichen Ausführung der Konstruktion die Ermittelung der Richtungslinie von $\mathfrak{R}$ in Abb. 33ª ganz entbehrlich ist. Sie wurde nur zur Zurückführung der hier behandelten Aufgabe auf die frühere, also zum Beweise, aber nicht zur Aufsuchung von CD und zur Ermittelung von A und B im Kräfteplane gebraucht. Bei der Anwendung des Verfahrens läßt man daher die Linie $\mathfrak{R}$, die deshalb auch nur gestrichelt angegeben wurde, ganz fort.

Man kann dieses Verfahren auch noch auf andere Art begründen, ohne auf die in Abb. 31 ausgeführte Kräftezerlegung zurückzugreifen. Dazu bedenke man, daß die Lasten 1, 2 u. s. f. mit den beiden Auflagerkräften jedenfalls ein Gleichgewichtssystem bilden. Fügt man nun zu Kräften, die im Gleichgewichte stehen, eine neue Kraft $\mathfrak{T}$ willkürlich zu, vereinigt diese mit der ersten zu einer Resultierenden $\mathfrak{S}_1$, diese mit der folgenden zu $\mathfrak{S}_2$ u. s. f., so muß, wenn alle gegebenen Kräfte zusammengesetzt sind, die letzte Resultierende wieder mit $\mathfrak{T}$ nach Lage, Richtung und Größe übereinstimmen. Denn wenn alle Kräfte, die mit $\mathfrak{T}$ zusammengesetzt waren, im Gleichgewichte mit einander stehen, muß ihre Vereinigung mit $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{T}$ selbst wieder zurückführen. Mit andern Worten heißt dies, daß **das zu einem Gleichgewichtssysteme von Kräften konstruierte Seileck ein geschlossenes Polygon bilden muß.**

Wenden wir diese Überlegung auf Abb. 33 an, so finden wir, daß dort die durch die Wahl des Poles O näher bestimmte Kraft $\mathfrak{T}$ der Reihe nach mit den Lasten 1, 2 ... vereinigt war. Ziehen wir nun noch die Auflagerkräfte A und B in das Seilpolygon herein, so muß die letzte Resultierende wieder $\mathfrak{T}$ ergeben. Die Resultierende aus der vorher letzten Seilspannung mit dem Auflagerdrucke B muß aber durch den Schnittpunkt D gehen und damit sich diese Resultierende mit A wieder zu $\mathfrak{T}$ vereinigen kann, muß sie auch durch den Schnittpunkt C gehen. Die Richtungslinie dieser Resultierenden ist daher

durch die Verbindungslinie CD bestimmt, d. h. CD ist die letzte Seite des zu dem Gleichgewichtssysteme gehörigen geschlossenen Seileckes. Man bezeichnet daher diese Linie auch als die Schlußseite.

Die Beschreibung des ganzen Verfahrens läßt sich hiernach in die einfache Vorschrift zusammenfassen: Man vereinige alle Lasten durch ein Seileck, trage die durch die Schnittpunkte der äußersten Seileckseiten mit den Auflagerkraftrichtungen gehende Schlußlinie ein und ziehe zu dieser vom Pole des Kräfteplanes aus eine Parallele; diese schneidet dann auf der Lastlinie die beiden Auflagerkräfte ab.

§ 13. Die Seilkurven.

Die vorausgehenden Betrachtungen sind nur solange anwendbar, als es sich um die Zusammensetzung einer endlichen Anzahl von Einzelkräften handelt. Es kommt aber auch häufig vor, daß z. B. ein Balken eine stetig verteilte Belastung trägt. Man spricht dann von der Belastungsintensität an einer bestimmten Stelle. Ist die Belastung an dieser Stelle auf eine gewisse Strecke hin gleichförmig verteilt, so versteht man unter der Belastungsintensität jene Belastung, die auf die Längeneinheit kommt, d. h. also jenen Wert, der durch Multiplikation mit der Länge der Strecke die zugehörige Belastung liefert. Bei ungleichförmiger Verteilung ist jener Wert darunter zu verstehen, der durch Multiplikation mit einem Längenelemente des Balkens die Belastung dieses Längenelementes angibt. Es ist dies zugleich die auf die Längeneinheit bezogene durchschnittliche Belastung des Längenelementes.

Trägt man in einer Zeichnung des Balkens über jedem Punkte der Mittellinie die Belastungsintensität in einem beliebig gewählten Maßstabe ab, so erhält man durch Verbinden der Endpunkte die Belastungslinie, die mit der Mittellinie selbst und den beiden Endvertikalen die Belastungsfläche einschließt. Diese bildet die einfachste graphische Darstellung

der Lastverteilung. Oft kann man den Maßstab für das Auftragen der Belastungsintensität so wählen, daß die Belastungsfläche noch eine besonders anschauliche Deutung gewinnt. Man kann sich nämlich die stetig verteilte Belastung, gleichgültig, wie sie nun in Wirklichkeit erfolgt, auch dadurch hervorgebracht denken, daß man Mauerwerk, etwa in gleicher Breite mit dem Balken und in solcher Höhe aufführt, daß das Gewicht des Mauerwerkes der gegebenen Belastung gleichwertig ist. Als Ordinate der Belastungsfläche kann dann unmittelbar die „Übermauerungshöhe" gewählt werden.

Eine stetig verteilte Belastung kann auch als ein System von unendlich kleinen Lasten aufgefaßt werden, die in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen. Wegen der unendlich großen Anzahl dieser Einzellasten geht das zugehörige Seileck in ein Polygon mit unendlich vielen Seiten über, von denen sich je zwei aufeinander folgende wegen der unendlich kleinen Last, die zwischen ihnen liegt, nur unendlich wenig in der Richtung voneinander unterscheiden. Das Seilpolygon bildet daher im vorliegenden Falle eine stetige Seilkurve.

Eine Kurve kann, abgesehen von besonderen Fällen, wie beim Kreise, zu dessen Konstruktion man sich des Zirkels bedienen kann, nur durch Aufsuchen einer genügenden Zahl von Punkten oder Tangenten gezeichnet werden, zwischen die man die Kurve freihändig oder mit Hülfe eines Kurvenlineals einträgt. So genau, als es hiernach zeichnerisch überhaupt ausführbar ist, läßt sich auch die zu einer gegebenen Belastungsfläche gehörige Seilkurve ermitteln.

Zur Begründung des Verfahrens nehme ich zunächst an, die in Abb. 34[a] angegebene Seilkurve sei bereits bekannt. Man teile hierauf die durch Schraffierung hervorgehobene Belastungsfläche in eine Anzahl senkrechter Streifen ein, die in der Abbildung mit den Ziffern 1 bis 4 bezeichnet sind. Verlängert man die Grenzlinien der Streifen nach abwärts, so wird auch die Seilkurve dadurch in eine Anzahl Abschnitte eingeteilt, von denen jeder als eine besondere Seilkurve angesehen werden kann, die zu dem darüber liegenden Abschnitte

der Belastungsfläche gehört. Man denke sich ferner alle Lasten, die zu einem solchen Abschnitte gehören, zu einer Resultierenden vereinigt. Diese muß dann durch den Schwerpunkt des Streifens gehen. Zugleich findet man aber einen Punkt dieser Resultierenden im Schnittpunkte der äußersten Seilspannungen des betreffenden Abschnittes der Seilkurve. Die Richtungen dieser äußersten Seilspannungen werden durch die Endtangenten des Seilkurvenabschnittes angegeben. Denkt man sich also in den Punkten A, B, C u. s. f. Tangenten an die Seilkurve gelegt, so fallen deren Schnittpunkte F, G u. s. f. auf die Schwerlinien 1, 2 u. s. f. der Belastungsstreifen.

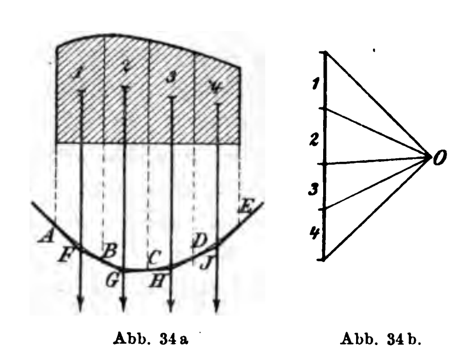


Abb. 34a Abb. 34b.

Bei dieser Betrachtung war angenommen worden, daß die Seilkurve bereits gegeben sei und es wurde gezeigt, wie man mit ihrer Hülfe das Tangentenpolygon $AFBG$ u. s. f. finden könnte. Man kann aber auch umgekehrt verfahren. Das Tangentenpolygon bildet nämlich zugleich ein Seileck für die Einzellasten 1, 2 u. s. f. und es kann daher mit Hülfe des Kräfteplanes in Abb. 34^b sofort konstruiert werden, ohne daß die Seilkurve vorher schon bekannt zu sein brauchte. Dazu ist nur nötig, daß man die Schwerlinien der Belastungsstreifen und ihre Inhalte angeben kann. Wenn die Zahl der Streifen, in die man die Belastungsfläche einteilte, nicht zu klein ist, kann man sie mit so großer Genauigkeit, als sie in einer Zeichnung überhaupt erreichbar ist, als Trapeze ansehen und dementsprechend Schwerpunkt und Inhalt ermitteln. Für einen geübten Zeichner genügt es oft vollständig, den Abstand des Schwerpunktes von der Streifenmitte einfach einzuschätzen. Um die Inhalte möglichst einfach zu finden, nimmt man die Streifen am besten alle von gleicher Breite. Die Inhalte sind

dann den mittleren Höhen der Trapeze proportional. Da es nun gar nicht auf den Maßstab des Kräfteplanes ankommt, könnte man diese mittleren Höhen ohne weiteres als Maß für die Streifengewichte in den Kräfteplan eintragen. Damit dieser nicht eine unbequeme Größe erlangt, zieht man indessen vor, von allen Höhen nur einen bestimmten Bruchteil im Kräfteplane aufzutragen. Der Pol des Kräfteplanes kann natürlich wieder beliebig gewählt werden, da man zu einer stetig verteilten Belastung ebensogut beliebig viele Seilkurven konstruieren kann, wie beim Zusammensetzen von Einzellasten beliebig viele Seilecke.

Nachdem das Seileck auf diese Weise konstruiert ist, verlängert man die Streifengrenzen bis zu den Schnittpunkten A, B u. s. f. mit den Seileckseiten. Man weiß dann, daß diese Punkte der gesuchten Seilkurve angehören und kennt zugleich die Tangentenrichtungen an diesen Punkten. Es bedarf gar keiner besonders großen Anzahl von Punkten und Tangenten, um die Seilkurve so genau, als man es für praktische Zwecke nur irgend wünschen kann, freihändig oder mit Hülfe des Kurvenlineals dazwischen einzulegen.

§ 14. Differentialgleichung der Seilkurve.

In vielen Fällen ist es nötig, die Eigenschaften der Seilkurven analytisch zu untersuchen; schon deshalb, weil es auf diesem Wege viel leichter möglich ist, allgemein gültige Sätze aufzufinden, als auf dem geometrischen Wege.

In Abb. 35[a] ist oben eine beliebige Belastungsfläche, unten eine zugehörige Seilkurve gezeichnet. Im Abstande x vom linken Ende der Belastungsfläche sei die Belastungsintensität mit q, die von irgend einer Horizontalen aus senkrecht nach abwärts gerechnete Ordinate der Seilkurve mit y bezeichnet. Außerdem ist an dieser Stelle eine Tangente an die Seilkurve gelegt, deren Winkel mit der Horizontalen gleich φ sei. Dieser Tangente entspricht eine gewisse Seilspannung, deren Größe in Abb. 35[b] durch einen parallel dazu gezogenen Polstrahl dargestellt wird. Sie läßt sich in eine senkrechte Komponente V

und eine horizontale Komponente H zerlegen, die im Kräfteplane ersichtlich gemacht sind. Der Winkel φ kommt im Kräfteplane ebenfalls vor und man hat

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H}.$$

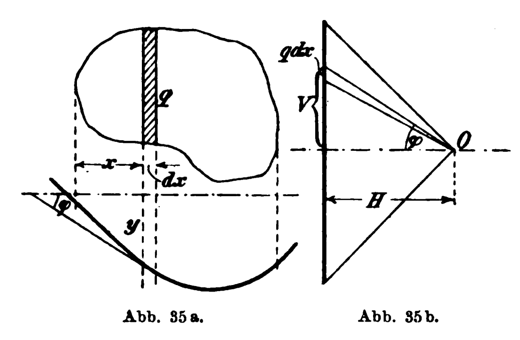


Abb. 35a. Abb. 35b.

Nun gehe man um dx weiter. Man erhält einen neuen Punkt der Seilkurve und eine ihm zugehörige Tangente, die in Abb. 35[a] nicht besonders angegeben ist, weil sie sich mit der vorigen zu nahe decken würde. Dagegen ist im Kräfteplane die zugehörige Parallele eingetragen.

Beachtet man, daß nach den Lehren der analytischen Geometrie $\operatorname{tg} \varphi$ im Differentialquotienten von y ausgedrückt werden kann, so läßt sich die vorige Gleichung auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$$

schreiben und für die Änderung von $\operatorname{tg} \varphi$ beim Weitergehen um dx erhält man daher

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{V}{H}\right).$$

Nun ändert sich H überhaupt nicht, während V sich, wie aus dem Kräfteplane entnommen werden kann, um das Gewicht des Belastungsstreifens $q\,dx$ vermindert. Man hat daher

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -q\,dx$$

oder nach Division mit dx

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q. \tag{2}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Seilkurve. Wenn q analytisch als Funktion von x gegeben ist, findet man daraus die endliche Gleichung der Seilkurve durch zweimalige

Integration. Hierbei treten zwei willkürliche Integrations-Konstanten auf. Da auch der Horizontalzug H des Seilpolygons willkürlich gewählt werden kann, enthält die allgemeine Gleichung der Seilkurve drei willkürliche Konstanten. Dies entspricht dem Umstande, daß zu einer gegebenen Belastungsfläche beliebig viele Seilkurven gezeichnet werden können. Um eine unter ihnen näher zu kennzeichnen, müssen noch besondere Bedingungen hinzutreten, die zur Ermittelung der Integrations-Konstanten und des Horizontalzuges H ausreichen.

Für den besonders häufig vorkommenden Fall einer gleichförmigen Lastverteilung soll die Rechnung sofort weiter durchgeführt werden. Wenn q konstant ist, erhält man aus Gl. (2) durch zweimalige Integration

$$\left.\begin{aligned} H\frac{dy}{dx} &= -qx + C_1. \\ Hy &= -q\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

wenn die Integrations-Konstanten mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Die Seilkurve bildet demnach eine Parabel.

Seile, Ketten oder dünne Drähte, deren Biegungswiderstand vernachlässigt werden kann und die eine der horizontalen Richtung nach wenigstens annähernd gleichförmig verteilte Belastung zu tragen haben, kommen bei Ketten- oder Kabel-Brücken, bei Telegraphenleitungen und bei Drahtseilbahnen vor. Ein Telegraphendraht z. B., der zwischen zwei weit voneinander entfernten Stützen ausgespannt ist, hat seine Eigenlast, zuzüglich einer im Winter bei Rauchfrost oder Schneefall ihm anhaftenden Eislast zu tragen, die als der ganzen Länge nach gleichförmig verteilt angenommen werden kann. Freilich ist die Eigenlast streng genommen der Bogenlänge und nicht der Abscisse x proportional. Wenn der Draht, wie es gewöhnlich zutrifft, ziemlich flach gespannt ist, ist der Unterschied aber geringfügig und er kommt um so weniger in Betracht, als die Schneebelastung, die unter Umständen erheblich mehr ausmachen kann, als das Eigengewicht, eher proportional mit x als mit der Bogenlänge angenommen werden

kann. Der Biegungswiderstand des Drahtes kommt in solchen Fällen gar nicht in Betracht; der Draht kann vielmehr bei den großen Krümmungshalbmessern, um die es sich dabei handelt, als ein vollkommen biegsames Seil angesehen werden.

In Abb. 36, die sich auf einen solchen Fall bezieht, sind A und B die beiden Stützen, zwischen denen der Draht ausgespannt ist. Dabei ist angenommen, daß beide gleich hoch liegen. Der Ursprung des Koordinatensystems ist auf die linke Stütze A und die X-Achse in die Verbindungslinie AB gelegt.

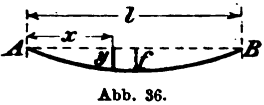


Abb. 36.

An beiden Stützen gilt die Grenzbedingung, daß y zu Null werden muß. Hieraus folgen die Werte der Integrationskonstanten C_1 und C_2 in Gl. (3); C_2 muß zu Null werden und C_1 folgt aus

$$0 = -\frac{ql^2}{2} + C_1 l \quad \text{zu} \quad C_1 = \frac{ql}{2}.$$

Die Parabelgleichung geht damit über in

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \tag{4}$$

Den Pfeil f der Seilkurve in der Mitte findet man hieraus zu

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \tag{5}$$

wobei in der letzten Form unter Q die Gesamtbelastung ql des Seiles oder Drahtes zu verstehen ist. Umgekehrt hat man auch

$$H = \frac{Ql}{8f} \tag{6}$$

und damit ist der Horizontalzug der Seilkurve bekannt für den Fall, daß die Durchhängung f des Seiles gegeben ist.

So wird die Aufgabe gewöhnlich gestellt. Es kann aber auch vorkommen, daß zur Ermittelung von H nicht f, sondern die Länge des Seiles, das zwischen den Punkten A und B aufgehängt werden soll, gegeben ist. Dafür ist die Aufstellung einer Gleichung zwischen f und der Bogenlänge der Parabel erforderlich, also die Lösung einer rein geometrischen Aufgabe. Von dieser kann hier abgesehen werden; dagegen soll eine

Näherungsformel, von der man bei flachen Parabelbögen mit Vorteil Gebrauch machen kann, abgeleitet werden.

Versteht man unter ds die Länge eines Bogenelementes, so hat man

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Bei einem flachen Bogen ist $\frac{dy}{dx}$ überall ein kleiner Bruch. Vernachlässigt man das Quadrat davon ganz gegen die Einheit, so kann in erster Annäherung $ds = dx$ und die ganze Bogenlänge gleich der Entfernung l der beiden Stützen gesetzt werden. Diese Annäherung genügt aber bei manchen Aufgaben nicht, nämlich immer dann nicht, wenn es sich gerade um den Unterschied der Bogenlänge b von l handelt. Man erhält dann eine bis auf kleine Größen höherer Ordnung genaue Annäherung, wenn man die Wurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und sich auf die Beibehaltung der beiden ersten Glieder beschränkt. Man setze also

$$ds = dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right).$$

Führt man hier den Wert von $\frac{dy}{dx}$ aus der Parabelgleichung ein und integriert von 0 bis l, so erhält man

$$b = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{H^2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2\right] dx.$$

Die Integration kann leicht bewerkstelligt werden und liefert

$$b = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2}. \tag{7}$$

Schließlich kann auch noch der Wert von H aus Gl. (5) oder Gl. (6) eingesetzt werden, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$b = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}. \tag{8}$$

Von diesen Näherungsformeln kann man z. B. mit Vorteil Gebrauch machen, um den Einfluß, den eine Temperaturänderung des Drahtes auf f und damit auch auf H ausübt,

zu berechnen. Hierbei kann es (bei sehr flachen Bögen) auch nötig werden, die elastische Verlängerung des Drahtes unter dem Einflusse des Horizontalzuges H in Berücksichtigung zu ziehen. Alle Aufgaben dieser Art können mit Hülfe der Formeln (5), (6) und (7), nötigenfalls unter Heranziehung des Elastizitätsgesetzes, leicht gelöst werden.

Auch auf den Fall, daß die Stützen A und B nicht in gleicher Höhe liegen, läßt sich die Betrachtung leicht übertragen. Man hat dann C_1 der geänderten Grenzbedingung entsprechend zu wählen. — Trägt das Seil ferner außer einer gleichförmig verteilten stetigen Belastung noch eine oder mehrere Einzellasten, wie es z. B. bei den Tragseilen von Drahtseilbahnen vorkommt, so zerfällt die Seilkurve in mehrere Parabelbögen, die sich an den Angriffsstellen der Einzellasten mit einem Knicke aneinander schließen. Der Sprung in dem Werte von $\frac{dy}{dx}$ an einer solchen Stelle ist gleich der Einzellast, geteilt durch den Horizontalzug. Dies liefert eine Grenzbedingung an der Übergangsstelle; die zweite besteht darin, daß y für beide Bögen an dieser Stelle denselben Wert haben muß. Diese Grenzbedingungen, verbunden mit jenen, die an den beiden Aufhängepunkten bestehen, genügen, um alle Integrationskonstanten für die Parabelbogenabschnitte zu berechnen. Die ausführliche Durchrechnung würde hier zuviel Raum in Anspruch nehmen.

§ 15. **Die Kettenlinie.**

Wenn ein Seil, das nur sein Eigengewicht zu tragen hat, stärker durchhängt, als bisher vorausgesetzt war, genügt die vorige Annäherung nicht mehr. Man muß dann von vornherein Rücksicht darauf nehmen, daß die Belastung jedes Seilelementes nicht dem zugehörigen Abscissenelemente, sondern dem Bogendifferentiale proportional ist. Die einer solchen Belastung entsprechende Seilkurve wird als eine Kettenlinie bezeichnet.

Man kann die Theorie der Kettenlinie zwar unmittelbar an die vorher schon abgeleitete Differential-Gleichung der

Seilkurve anknüpfen; da sich aber die Rechnungen bei einer etwas andern und für diesen Fall zweckmäßigeren Wahl des Koordinatensystems einfacher gestalten, soll von den vorausgehenden Entwicklungen kein Gebrauch gemacht werden.

Jedenfalls ist die Kettenlinie symmetrisch in Bezug auf eine durch den tiefsten Punkt in lotrechter Richtung gezogene Achse gestaltet. Für den Fall, daß die beiden Aufhängepunkte in gleicher Höhe liegen, ist dies ohne weiteres klar. Aber auch für den entgegengesetzten Fall muß es noch zutreffen — abgesehen davon, daß der eine Schenkel dann länger wird, als der andere —, weil man sich von der zu gleich hohen Stützpunkten gehörigen Kettenlinie irgend einen Punkt festgehalten denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern. Der Gleichgewichtszustand muß dann auch noch weiter bestehen bleiben, wenn man den auf der einen Seite des festen Punktes liegenden Teil ganz entfernt, indem die letzte Seilspannung des beibehaltenen Teiles von dem festen Punkte aufgenommen wird. Die allgemeine Anwendbarkeit der folgenden Betrachtungen erfährt daher keine Einschränkung, wenn wir in erster Linie ein Seil ins Auge fassen, dessen Stützpunkte beiderseits gleich hoch liegen.

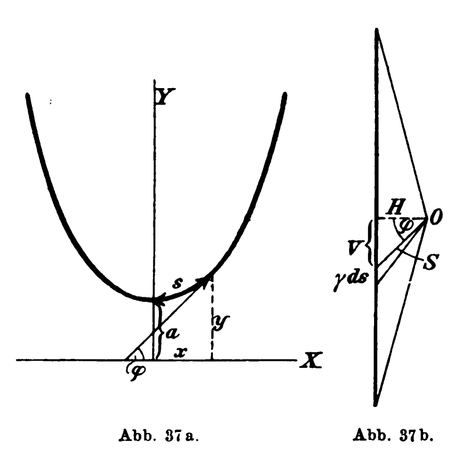


Abb. 37a. Abb. 37b.

In Abb. 37[a] ist eine Kettenlinie gezeichnet. Die Y-Achse des Koordinatensystems fällt mit der Symmetrie-Achse zusammen, während die horizontale X-Achse um einen später noch näher anzugebenden Abstand a unterhalb des Scheitels der Kurve liegen soll. Die Ordinaten y werden hier im Gegensatze zu der bei der Ableitung der allgemeinen Differentialgleichung der Seilkurven getroffenen Fest-

setzung nach oben hin positiv gerechnet. Im Punkte xy der Kettenlinie ist eine Tangente gezogen, die den Winkel φ mit der X-Achse bilden möge. Parallel zu ihr ist im Kräfteplane, Abb. 37[b], ein Polstrahl gezogen, der die Seilspannung im Punkte xy angibt. Außerdem ist auch noch ein zweiter Polstrahl gezogen, der zu einem dem vorigen unendlich nahe benachbarten Punkte gehören soll. Zwischen beiden Punkten liegt das Bogendifferential ds der Kettenlinie, dessen Gewicht gleich γds gesetzt werden kann, wenn man unter γ das Gewicht der Längeneinheit des Seiles versteht. Man hat wieder, wie bei der ähnlichen Entwicklung des vorigen Paragraphen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V}{H} \quad \text{oder auch} \quad H\frac{dy}{dx} = V$$

und wenn wir zum nächsten Punkte übergehen,

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = dV = \gamma ds$$

oder in Form einer Differentialgleichung geschrieben

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma \frac{ds}{dx}. \tag{9}$$

Da H und γ konstant sind, kann die Gleichung sofort einmal integriert werden. Man erhält

$$H\frac{dy}{dx} = \gamma s + C.$$

Die Integrations-Konstante C bestimmt sich aus der Bedingung, daß im Scheitel $\frac{dy}{dx}$ gleich Null ist. Zählen wir also die Bogenlänge s bis zum Punkte xy vom Scheitel aus, so muß $C = 0$ sein und die Gleichung geht über in

$$H\frac{dy}{dx} = \gamma s. \tag{10}$$

Diese Gleichung lehrt uns bereits eine merkwürdige Eigenschaft der Kettenlinie kennen: sie zeigt, daß die Tangente des Neigungswinkels φ proportional der Bogenlänge s wächst.

Um zur endlichen Gleichung der Kettenlinie zu gelangen, müssen wir aber zu Gl. (9) zurückkehren und darin ds durch

dx und *dy* mit Hülfe des Pythagoräischen Satzes ausdrücken. Die Gleichung geht dann über in

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

Die Variable y selbst kommt in dieser Gleichung nicht vor. Bezeichnen wir den ersten Differentialquotienten von y nach x vorübergehend mit p, so läßt sie sich in der Form

$$H\frac{dp}{dx} = \gamma\sqrt{1 + p^2}$$

anschreiben, die in Bezug auf die Variable p von der ersten Ordnung ist. Um die Gleichung zu integrieren, ordnen wir sie wie folgt:

$$H\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \gamma dx,$$

und von da können wir unmittelbar zur Stammgleichung gelangen, indem wir beiderseits integrieren. Dabei ist die Integralformel

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \lg\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)$$

zu beachten, von deren Richtigkeit man sich leicht durch Ausführung der Differentiation an dem Logarithmus überzeugt. Die vorhergehende Gleichung liefert daher

$$H\lg\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \gamma x + C_1.$$

Auch die hierbei auftretende Integrations-Konstante C_1 ist wegen der Grenzbedingung $p = 0$ für $x = 0$ gleich Null zu setzen. Geht man ferner vom Logarithmus zum Numerus über, so erhält man

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{\gamma x}{H}}.$$

Diese Gleichung lösen wir nach p auf; sie ist, wie man dabei findet, nur scheinbar vom zweiten Grade, in Wirklichkeit vielmehr vom ersten Grade in Bezug auf p und die Lösung lautet

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right). \tag{12}$$

Die auf der rechten Seite stehende Funktion von $\frac{\gamma x}{H}$ kommt öfters vor und man hat ihr wegen der Verwandtschaft, in der sie zu den goniometrischen Funktionen steht, die Bezeichnung des hyperbolischen Sinus gegeben. Gebraucht man dafür die Bezeichnung sinh und erinnert man sich zugleich der Bedeutung von p, so läßt sich die Gleichung auch in der kürzeren Form

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{\gamma x}{H} \tag{13}$$

anschreiben. Setzt man diesen Wert von $\frac{dy}{dx}$ in Gl. (10) ein, so findet man auch die Bogenlänge s als Funktion von x, nämlich

$$s = \frac{H}{\gamma} \sinh \frac{\gamma x}{H}. \tag{14}$$

Um auch y zu erhalten, müssen wir Gl. (13) noch einmal integrieren. Wer mit den Hyperbel-Funktionen ein wenig bekannt ist, weiß schon, daß das Integral von sinh den hyperbolischen Kosinus liefert. Im andern Falle braucht man aber nur auf Gl. (12) zurückzugehen und die leicht auszuführende Integration an den Exponential-Funktionen vorzunehmen. Man erhält dann

$$y = \frac{H}{\gamma} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right) + C_2. \tag{15}$$

Der Faktor von $\frac{H}{\gamma}$ bildet jene Funktion, die man den hyperbolischen Kosinus nennt. Die neu aufgetretene Integrations-Konstante C_2 ist aus der Bedingung zu ermitteln, daß $y = a$ wird für $x = 0$. Wir wollen nun den Abstand a, dessen Größe bisher unbestimmt gelassen wurde, so wählen, daß auch die Integrations-Konstante C_2 verschwindet, damit wir zu möglichst einfachen Formeln gelangen. Für $x = 0$ geht Gl. (15) über in

$$a = \frac{H}{\gamma} + C_2$$

und C_2 verschwindet daher, wenn wir

$$a = \frac{H}{\gamma} \tag{16}$$

wählen. Hiermit nimmt die Gleichung der Kettenlinie die einfache Form

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \tag{17}$$

an. Der Wert von a läßt, wie aus Gl. (16) hervorgeht, wenn man sie in der Form $H = a\gamma$ schreibt, eine anschauliche Deutung zu. Es ist nämlich jene Seillänge, deren Gewicht gleich dem Horizontalzuge der Kettenlinie ist.

Auch für die Seilspannung S an irgend einem Punkte xy der Kettenlinie kann man einen einfachen Ausdruck aufstellen. Zunächst hat man, wie aus Abb. 37[b] hervorgeht,

$$V = H \operatorname{tg} \varphi \quad \text{und} \quad S = H\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = H\sqrt{1 + p^2},$$

wenn die vorher schon gebrauchte Abkürzung p für $\frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{tg} \varphi$ wieder benutzt wird. Setzt man p aus Gl. (12) ein, so erhält man

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(e^{\frac{\gamma x}{H}} - e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\gamma x}{H}} + e^{-\frac{\gamma x}{H}}\right) = \cosh \frac{\gamma x}{H}.$$

Setzt man diesen Wert in die vorige Gleichung ein und drückt zugleich H nach Gl. (16) in a aus, so findet man

$$S = a\gamma \cosh \frac{x}{a}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (17) geht dies über in

$$S = \gamma y. \tag{18}$$

Die Seilspannung ist daher an jeder Stelle der Ordinate y proportional und die Gleichung $H = a\gamma$ ist nur als ein besonderer Fall von Gl. (18) anzusehen, da der Horizontalzug H zugleich die Spannung im Scheitel der Kettenlinie angibt.

Für die Hyperbel-Funktionen hat man Tafeln ausgerechnet, die ganz ähnlich eingerichtet sind, wie die Tafeln der goniometrischen Funktionen. Sie sind zwar nicht so häufig verbreitet, wie die gewöhnlichen Sinustafeln, aber doch in manchen Logarithmentafeln und in vielen andern Tabellenwerken wenig-

stens in auszugsweiser Form zu finden. Auch das bekannte Werk „Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch“ enthält solche Tafeln. Mit deren Hülfe gestalten sich die Zahlenrechnungen über Kettenlinien auf Grund der vorausgehenden Formeln in manchen Fällen fast noch einfacher, als wenn man — bei flachen Kurven — Parabeln an Stelle der Kettenlinien annimmt.

§ 16. Die Momentenfläche.

In Abb. 38[a] seien die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ . . . durch ein Seilpolygon $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_1$ . . . verbunden, wozu der Kräfteplan Abb. 38[b] gehöre. Man lege irgendwo einen Schnitt $\sigma\sigma$ durch das Seilpolygon, der dieses im Punkte C trifft. Es handele sich darum, das statische Moment aller links vom Punkte C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ in Bezug auf diesen Punkt als Momentenpunkt festzustellen. An diesem Momente wird nichts geändert, wenn wir auch die Kräfte $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_0'$, die sich gegenseitig aufheben, mit einrechnen. Nun war aber $\mathfrak{S}_0$ mit allen links vom Schnitte liegenden Kräften $\mathfrak{P}$ zur Resultierenden $\mathfrak{S}_3$ vereinigt, die durch den Momentenpunkt C geht und deren Moment daher verschwindet. Das Moment der links von C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}$ ist daher dem Momente von $\mathfrak{S}_0'$ gleich. Zerlegen wir noch $\mathfrak{S}_0'$ im Punkte D, in dem es von dem in senkrechter Richtung geführten Schnitte $\sigma\sigma$ getroffen wird, in eine horizontale Komponente H und eine vertikale Komponente V, so verschwindet das Moment von V und das gesuchte Moment M der links von C liegenden Kräfte $\mathfrak{P}$ kann daher

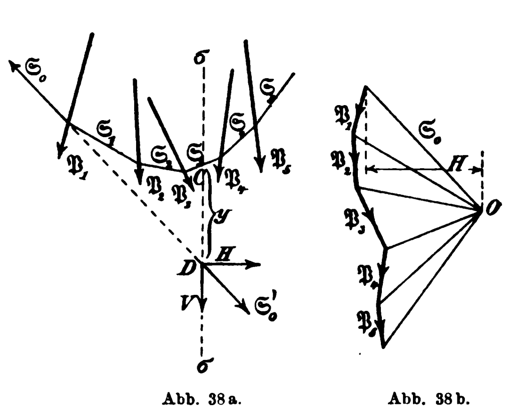


Abb. 38a. Abb. 38b.

$$M = Hy \tag{19}$$

gesetzt werden, wenn unter y der Abschnitt CD auf der durch den Punkt C in lotrechter Richtung geführten Linie zwischen den Richtungen der Seilstrahlen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_0'$ verstanden wird.

Von dieser Anwendung des Seileckes zur Ermittelung der statischen Momente gegebener Kräfte wird namentlich Gebrauch gemacht, wenn die Kräfte $\mathfrak{P}$ alle parallel zueinander gerichtet sind. Geht dann der Schnitt $\sigma\sigma$ ebenfalls parallel zu ihnen, so ist es gleichgültig, welchen Punkt der Richtungslinie von $\sigma\sigma$ man als Momentenpunkt wählt. Man spricht daher in diesem Falle oft nur von dem Momente M aller links von einem Schnitte liegenden Kräfte, ohne einen bestimmten Momentenpunkt zu bezeichnen, auf den sich das Moment beziehen soll. Da ferner H für alle Schnitte $\sigma\sigma$ denselben Wert hat, so ist M überall der Strecke y proportional. Die zwischen dem Seilecke und dem Seilstrahle $\mathfrak{S}_0'$ liegende Fläche wird aus diesem Grunde als die **Momentenfläche** bezeichnet.

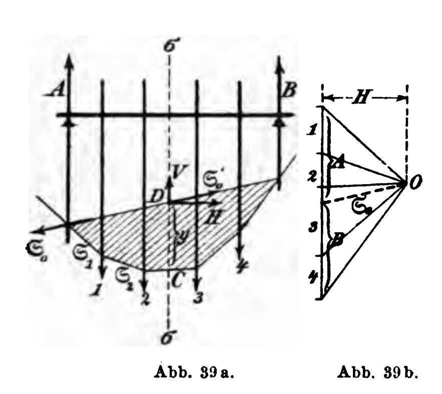


Abb. 39a. Abb. 39b.

Die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen wird durch Abb. 39 dargestellt. In Abb. 39[a] ist ein Balken gezeichnet, der auf zwei Stützen aufruht und die Lasten 1, 2 ... trägt. Diese und die zugehörigen Auflagerkräfte sind durch das geschlossene Seileck, das darunter gezeichnet ist, miteinander verbunden. Wie man die Auflagerkräfte A und B im Kräfteplane Abb. 39[b] findet, ist schon von früher her bekannt.

Das statische Moment aller links von irgend einem Schnitte $\sigma\sigma$ liegenden Kräfte, mit Einschluß des Auflagerdruckes A, ist von Wichtigkeit, weil von ihm die Biegungsbeanspruchung des Balkens in diesem Querschnitte abhängt. Es wird als das **Biegungsmoment** bezeichnet. Damit der Auflagerdruck A von vornherein in das Seilpolygon mit ein-

geschlossen ist, betrachten wir die Schlußlinie als den ersten Seilstrahl $\mathfrak{S}_0$, der dann mit A zu $\mathfrak{S}_1$ u. s. f. zusammengesetzt ist. Den Momentenpunkt C wählen wir wiederum auf dem Schnitte der Linie $\sigma\sigma$ mit dem Seilpolygone. Wie vorher kann dann das Biegungsmoment gleich dem Momente von $\mathfrak{S}_0'$ oder gleich Hy gesetzt werden, wenn die Buchstaben dieselbe Bedeutung behalten, wie im vorigen Falle. Die Momentenfläche ist die von dem geschlossenen Seilecke umgrenzte Fläche; sie ist in der Abbildung schraffiert. Das Biegungsmoment ist für jeden Querschnitt dem in die Momentenfläche hineinfallenden lotrechten Abschnitte y proportional. Man kann daher z. B. sofort erkennen, an welcher Stelle das Biegungsmoment bei der gegebenen Laststellung seinen größten Wert annimmt, indem man mit dem Zirkel in der Hand den größten Abschnitt y aufsucht. Gerade darauf, daß man nicht nur für einen bestimmten Querschnitt, sondern sofort für alle Querschnitte die zugehörigen Biegungsmomente findet, beruht der Vorteil des graphischen Verfahrens gegenüber der Aufsuchung des Biegungsmomentes durch Rechnung, die freilich an sich auch gar keine Schwierigkeiten macht.

Man nehme z. B. an, daß es sich darum handele, für jeden Querschnitt eines Brückenträgers das größte Biegungsmoment festzustellen, das in ihm während des Passierens eines Eisenbahnzuges von gegebener Zusammensetzung auftritt. Man hat es dann mit einem Systeme fest miteinander verbundener Lasten zu tun, dessen Stellung zur Brücke alle möglichen Lagen annehmen kann. Man vereinigt zunächst die Lasten durch irgend ein Seileck. Dann denkt man sich das Lastensystem in Ruhe und den Brückenträger dagegen verschoben, wobei man eine hinreichende Anzahl aufeinander folgender Stellungen herausgreift. Die jeweilige Stellung des Brückenträgers relativ zum Eisenbahnzuge wird schon durch zwei in lotrechter Richtung gezogene Linien, die durch die Stützpunkte gehen und deren Abstand daher gleich der Spannweite des Balkens ist, hinreichend gekennzeichnet. Man trägt die zugehörige Schlußlinie ein und hat damit sofort die

Momentenfläche für die betreffende Stellung gefunden. Jeder andern Stellung entspricht eine andere Momentenfläche, zu deren Ermittelung wiederum schon das Einzeichnen einer neuen Schlußlinie genügt. Man könnte nun mit Hülfe des Zirkels für jeden Querschnitt den größten Wert von y in allen diesen in derselben Zeichnung vereinigten Momentenflächen aufsuchen. Übersichtlicher wird es aber, wenn man in einer zweiten Figur den Balken in unveränderlicher Stellung zeichnet und alle Momentenflächen, auf dieselbe Schlußlinie bezogen, nämlich von der Balkenachse selbst aus, übereinander abträgt. Man hat dann nur nötig, eine Umhüllungslinie freihändig einzutragen, die alle diese Momentenflächen umschließt. Dadurch erhält man die Maximal-Momentenfläche, deren Ordinaten für jeden Querschnitt das größte in ihm während des Passierens des Eisenbahnzuges auftretende Biegungsmoment angeben. Man kann durch Rechnung nachweisen, daß der Umriß der Maximal-Momentenfläche durch Parabelbögen gebildet wird, die sich polygonartig aneinander schließen. Darauf kommt es aber für die praktische Anwendung des Verfahrens eigentlich gar nicht an. — Unter den Aufgaben wird ein Fall dieser Art behandelt werden.

§ 17. Besondere Fälle für die Konstruktion der Momentenfläche.

Bei größeren Brücken-Konstruktionen wird die bewegliche Last nicht unmittelbar von den Hauptträgern selbst aufgenommen. Dazu dient vielmehr eine „Fahrbahn-Konstruktion", die sich ihrerseits auf die Hauptträger stützt. Die Stützpunkte sind gewöhnlich in gleichen Abständen voneinander angeordnet. Als Lasten an den Hauptträgern sind hier nicht die unmittelbar gegebenen Lasten, sondern die von der Zwischen- oder Fahrbahn-Konstruktion darauf übertragenen Auflagerkräfte anzusehen. Die diesem Falle der „mittelbaren Belastung" entsprechende Momentenfläche kann indessen aus dem Seilecke der gegebenen Lasten stets leicht gefunden werden.

In Abb. 40ª ist ein auf zwei Stützen ruhender Balken gezeichnet, dessen ganze Länge durch die Zwischenträger *a*, *b*, *c* in drei Teile geteilt ist. Auf die Zwischenträger wirken die Lasten 1, 2, 3 . . . und der Balken ist nur an den Auflagerstellen I und II durch die dort übertragenen Auflagerdrücke der Fahrbahn-Konstruktion belastet. Man soll die dazu gehörige Momentenfläche konstruieren.

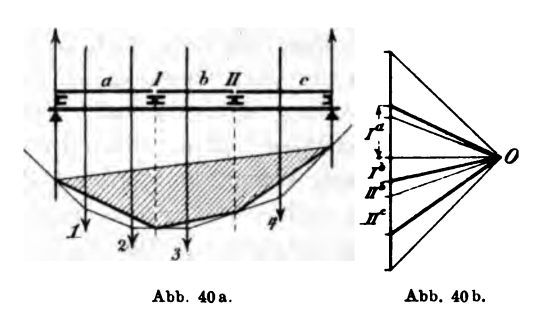


Abb. 40 a. Abb. 40 b.

Zu diesem Zwecke zeichnet man zunächst mit Hülfe des Kräfteplanes Abb. 40ᵇ ein Seilpolygon, das die gegebenen Lasten verbindet und trägt die Schlußlinie ein. Man hätte damit schon die Momentenfläche, wenn die Lasten direkt und nicht indirekt, durch Vermittelung der Fahrbahn-Konstruktion, an dem Balken angriffen. Hierauf zieht man lotrechte Linien durch die Knotenpunkte I, II, wodurch das Seilpolygon in ebensoviele Abschnitte getrennt wird, als Zwischenträger *a*, *b*, *c* vorhanden sind. Jeder dieser Seilpolygonabschnitte kann als ein dem betreffenden Zwischenträger und den von ihm unmittelbar aufgenommenen Lasten entsprechendes, besonderes Seilpolygon aufgefaßt werden. Man trage auch die zu diesen Abschnitten gehörigen, in Abb. 40ª durch starke Striche hervorgehobenen Schlußlinien ein. Parallelen dazu in Abb. 44ᵇ, die ebenfalls durch starke Striche gekennzeichnet sind, schneiden auf der Lastlinie die Auflagerkräfte ab, die von der Zwischen-Konstruktion auf den Hauptträger übertragen werden. Mit I^a ist in der Abbildung der Auflagerdruck bezeichnet, der vom Zwischenträger *a* auf den Stützpunkt I übertragen wird und I^b gibt den auf denselben Stützpunkt vom Zwischenträger *b* her gelangenden Druck an.

Die vom Hauptträger selbst aufgenommenen Lasten be-

stehen hiernach am Punkte I aus $I^a + I^b$ und am Punkte II aus $II^b + II^c$. Zu diesen Lasten wäre von neuem ein Seilpolygon zu konstruieren. Man sieht aber, daß dieses schon fertig vorliegt, ohne daß man noch weitere Linien zu ziehen braucht. Denn die stark ausgezogenen Polstrahlen im Kräfteplane, die wir vorher als Schlußlinien der kleinen Seilpolygonabschnitte aufzufassen hatten, bilden sofort schon den Kräfteplan, der zu den Lasten $I^a + I^b$ und $II^b + II^c$ gehört, und ihm entspricht auch der Zug der stark ausgezogenen Linien in Abb. 40[a] als Seilpolygon. Die Schlußlinie ist dieselbe wie beim Seilpolygone für die unmittelbar gegebenen Lasten 1, 2 ... Hiernach stellt die in der Abbildung durch Schraffierung hervorgehobene Fläche zwischen dieser Schlußlinie und dem durch starke Striche angegebenen Seilpolygone die gesuchte Momentenfläche des Hauptträgers dar. Die weiß gelassenen Flächen zwischen beiden Seilpolygonen bilden die Momentenflächen für die Zwischenträger a, b, c. Man erkennt hieraus auch, in welcher Weise sich das gesamte Moment der links von irgend einem Schnitte liegenden äußeren Kräfte an der ganzen Konstruktion auf ein durch die Biegungsfestigkeit des Hauptträgers aufzunehmendes Moment und auf ein anderes verteilt, das von dem durch den gleichen Schnitt getroffenen Zwischenträger aufzunehmen ist.

Zugleich bemerkt man, daß das Eintragen der Parallelen zu den Schlußlinien der einzelnen Seilpolygonabschnitte in den Kräfteplan nur für den Zweck des Beweises nötig war. Nachdem dieser einmal geführt ist, braucht man die Parallelen bei den Anwendungen gar nicht mehr zu ziehen. Es genügt dazu, nach Konstruktion des Seilpolygons, das die unmittelbar gegebenen Lasten verbindet, von den Knotenpunkten, in denen zwei Zwischenträger zusammenstoßen, Senkrechte zu ziehen und deren Schnittpunkte mit den Seileckseiten durch Linien zu verbinden. Das auf diese Weise gewonnene, dem Seilecke eingeschriebene Polygon schließt dann in Verbindung mit der Schlußlinie des ganzen Seileckes die Momentenfläche für den Hauptträger ein.

Ist z. B. eine gleichförmig verteilte stetige Belastung auf der Fahrbahn gegeben, so geht das dieser zugehörige Seileck, wie aus den Untersuchungen in § 14 folgt, in eine Parabel über und die Momentenfläche für den Hauptträger wird durch das in der angegebenen Weise der Parabel eingeschriebene Polygon gebildet.

In Abb. 40[a] waren nur drei Zwischenträger angenommen. Trotzdem wich auch hier schon die Momentenfläche für die indirekte Belastung nur wenig von jener ab, die der unmittelbaren Belastung des Hauptträgers durch die gegebenen Lasten entsprochen hätte. Die Abweichung wird um so geringer, je größer die Zahl der Zwischenträger oder je größer die Zahl der Knotenpunkte I, II ... ist, an denen der Hauptträger die Fahrbahn-Konstruktion stützt. Da nun diese Zahl in der Regel ziemlich groß ist (gewöhnlich mindestens 8 oder 10), kommt der Unterschied zwischen beiden Momentenflächen meistens gar nicht in Betracht und man behandelt daher den Fall gewöhnlich so, als wenn die Lasten unmittelbar am Hauptträger angriffen. — Wenn einer der Zwischenträger gar keine Last trägt, fällt übrigens der zugehörige Seilpolygonabschnitt von selbst schon gerade mit dem Umrisse der Momentenfläche für den Hauptträger zusammen.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 41[a] dargestellt. Ein Träger reicht über zwei Öffnungen, ist aber, um die statische Unbestimmtheit, die sonst hereinkäme, zu vermeiden, bei D in zwei Teile getrennt, die durch ein Gelenk miteinander zusammenhängen. Hiernach wird die rechts liegende Öffnung durch einen Balken überdeckt, der bis D in die linke Öffnung hinein vorkragt und auf den sich bei D ein nur von A bis D reichender, kürzerer Balken stützt. Träger-Kombinationen dieser Art werden im neueren Brückenbaue häufig angewendet; man bezeichnet sie als Kragträger oder nach dem Konstrukteur, der sie zuerst in sorgfältiger Ausbildung und in größerem Maßstabe zur Anwendung brachte, als Gerbersche Träger. Der Vorteil, der mit dieser Anordnung verbunden ist, wird sich aus der weiteren Betrachtung alsbald ergeben.

Um die Momentenfläche zu konstruieren, verbindet man zunächst die Lasten 1, 2 . . . durch ein Seilpolygon. Dieses wird durch eine vom Gelenke *D* aus gezogene Senkrechte in zwei Abschnitte geteilt und der linke Abschnitt davon bezieht sich sofort auf den die Spannweite von *A* bis *D* selbstständig überbrückenden Balken. Trägt man für diesen Abschnitt die Schlußlinie ein, so hat man ohne weiteres die zu dem linken Balken gehörige Momentenfläche, die durch eine Schraffierung hervorgehoben ist.

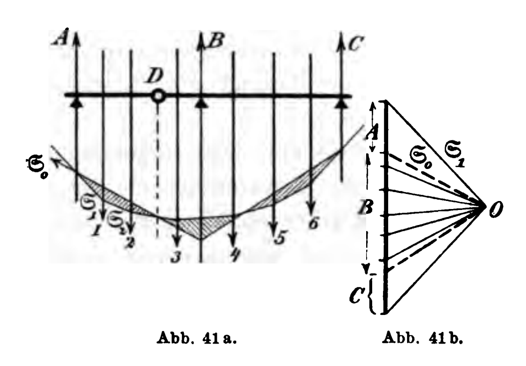


Abb. 41 a. Abb. 41 b.

Man denke sich ferner auch die Auflagerkräfte *A*, *B*, *C* in das Seilpolygon mit einbezogen. Da sie mit den gegebenen Lasten im Gleichgewichte stehen, muß das Seilpolygon zu einem geschlossenen werden. Der Auflagerdruck, den der linke Balken auf den rechten im Gelenke *D* überträgt, kommt hierbei nicht in Betracht, weil ihm nach dem Wechselwirkungsgesetze ein gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Druck vom rechten auf den linken Balken gegenübersteht und beide als innere Kräfte ohne Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften sind, sobald man die Kräfte an der ganzen Träger-Kombination ins Auge faßt. Das Gelenk *D* hat nur zur Folge, daß das Biegungsmoment an dieser Stelle zu Null werden muß und beim Eintragen der Schlußlinie für den linken Abschnitt des Seileckes ist von dieser Bedingung bereits Gebrauch gemacht.

Die Schlußlinie des linken Seileckabschnittes betrachten wir, wie schon im Falle der Abb. 39, als die erste Seilspannung, die mit dem Auflagerdrucke *A* zu $\mathfrak{S}_1$ zusammengesetzt ist. Für jeden Querschnitt in der ersten Öffnung, wenn er auch rechts vom Gelenke *D* liegt, können dann alle Kräfte

links vom Schnitte durch die davon getroffene Seilspannung und die Gegenkraft $\mathfrak{S}_0'$ von $\mathfrak{S}_0$ ersetzt werden. An der Mittelstütze greift der nach oben gerichtete Auflagerdruck B an. Da B in dem zuerst konstruierten Seilecke nicht vorkam, denken wir uns B mit $\mathfrak{S}_0'$ zu einer Resultierenden vereinigt, von der wir zunächst nur wissen, daß sie durch den Schnittpunkt beider Richtungslinien gehen muß. Dann können auch in der rechten Öffnung für jeden Querschnitt alle links davon liegenden äußeren Kräfte durch diese Resultierende und die von dem Schnitte getroffene Seilspannung ersetzt werden. Denkt man sich ferner die letzte Seilspannung mit dem Auflagerdrucke C zu einer Resultierenden vereinigt, die jedenfalls durch den Schnittpunkt der beiden Richtungslinien gehen muß, so sind nachher alle Kräfte an der ganzen Konstruktion auf diese Resultierende und auf die vorher besprochene Resultierende aus B und $\mathfrak{S}_0'$ zurückgeführt. Da aber alle Kräfte ein Gleichgewichtssystem bilden, müssen sich auch die beiden Resultierenden im Gleichgewichte halten, d. h. ihre Richtungslinien müssen zusammenfallen. Man findet daher diese Richtungslinie durch Verbindung der beiden Punkte, die wir von ihr bereits kennen. Nach Eintragen der Verbindungslinie ist das Seilpolygon geschlossen und die Momentenfläche wird durch die zwischen den Schlußlinien und dem Seilpolygone eingeschlossenen, durch Schraffierung hervorgehobenen Flächen gebildet. Dabei ist zu beachten, daß die mittlere Fläche, deren Schraffierungsstriche von links nach rechts fallen, negativen Momenten entspricht. Alle links liegenden Kräfte ergeben nämlich für einen an dieser Stelle geführten Schnitt ein Moment, das dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt ist, und der Balken wird von diesem Momente so gebogen, daß er seine Hohlseite nach unten hin kehrt, während die Hohlseite bei positiven Momenten, die in der Abbildung durch von rechts nach links fallende Schraffierungsstriche gekennzeichnet sind, nach oben hin gerichtet ist.

Auch hier ist die Überlegung, die zur Lösung führt, weitläufiger als die wirkliche Ausführung der Konstruktion.

Bei dieser braucht man nur darauf zu achten, daß zu jeder Öffnung des Kragträgers eine besondere Schlußlinie gehört, daß diese Schlußlinien auf den Richtungslinien der Auflagerkräfte aneinander stoßen und daß sie auf den durch die Gelenke gezogenen Vertikalen und den Vertikalen durch die beiden äußersten Stützpunkte die Seileckseiten schneiden. Diese Bedingungen genügen in allen Fällen dieser Art, um alle Schlußlinien einzutragen. Die zwischen ihnen und dem Seilpolygone eingeschlossenen Flächen bilden die Momentenflächen. Um die Vorzeichen festzusetzen, braucht man nur zu beachten, daß solche Trägerteile, die (wie hier der zwischen A und D liegende) eine Spannweite für sich überdecken, ohne über die Stützen vorzukragen nur positive Biegungsmomente aufzunehmen haben und daß bei jeder Überschneidung einer Schlußlinie mit dem Seilpolygone ein Wechsel im Momentenvorzeichen eintritt.

Würde jede der beiden Öffnungen in Abb. 41[a] durch einen Träger für sich überdeckt, der ohne Zusammenhang mit dem andern wäre, wobei natürlich das Gelenk in D wegfallen müßte, so hätte man für jede Öffnung ohne Rücksicht auf die andere die Momentenfläche so wie in Abb. 39 zu konstruieren. Für die linke Öffnung würde man also z. B. die Schnittpunkte der Richtungslinien von A und B mit den Seileckseiten zu verbinden haben, um die Schlußlinie und hiermit die Momentenfläche für diese Öffnung zu erhalten. Denkt man sich diese Linie in die Abbildung eingetragen, so erkennt man sofort, daß die Momentenfläche dann viel größer ausfällt, als vorher. Von der Größe der Momente hängt aber die Biegungsbeanspruchung des Balkens ab. Der Kragträger wird demnach durch die gegebenen Lasten weniger stark beansprucht, als wenn jede Öffnung für sich überdeckt wäre und in diesem Umstande ist der Vorteil begründet, der sich durch die Gerbersche Anordnung erzielen läßt.

§ 18. Die graphische Ermittelung von Trägheitsmomenten.

Betrachtet man irgend eine gerad- oder krummlinig begrenzte Figur als Belastungsfläche einer Seilkurve, so gibt die zwischen der Seilkurve und ihrer Anfangstangente eingeschlossene Momentenfläche zugleich das statische Moment des links davon liegenden Teiles der Figur für eine Achse $\sigma\sigma$ an. Zieht man auch noch die Tangente am andern Ende, so sind die zwischen ihr und der Seilkurve auf $\sigma\sigma$ abgeschnittenen Strecken ebenso den statischen Momenten der rechts von $\sigma\sigma$ liegenden Flächenteile proportional. Die in den vorigen Paragraphen besprochene Anwendung des Seilpolygons liefert daher zugleich die Momente ersten Grades von Querschnittsflächen in Bezug auf alle in der Querschnittsebene parallel zur gewählten Kraftrichtung gezogenen Achsen.

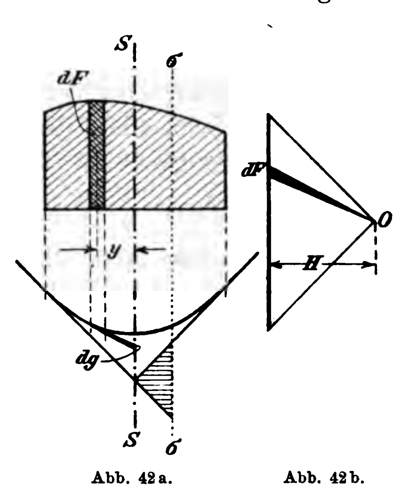


Abb. 42a. Abb. 42b.

Aber auch Momente zweiten Grades können mit Hülfe des Seilpolygons gefunden werden. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Schienenprofils oder einer andern teils gerad-, teils krummlinig begrenzten Querschnittsfläche bildet dieses Verfahren sogar das bequemste und empfehlenswerteste Hülfsmittel. Zur Begründung des Verfahrens diene Abb. 42. Die Belastungsfläche ist hier genau der in Abb. 34 (S. 77) nachgebildet und die Seilkurve, deren Konstruktion dort erläutert wurde, ist hier ebenfalls von dort übernommen. Nur die Einteilung in die Belastungsstreifen und das den Einzellasten entsprechende, aus Tangenten der Seilkurve bestehende Seilpolygon ist in der neuen Figur weggelassen, weil diese Linien zwar zur Konstruktion der Seilkurve nötig sind, nachher aber nicht mehr

gebraucht und daher fortgelöscht werden können. Verlängert man die äußersten Seileckseiten, also die Endtangenten der Seilkurve, bis sie sich schneiden, so geht durch diesen Punkt die Resultierende der das Seil belastenden Gewichte, d. h. die Linie SS ist die Schwerlinie der Belastungsfläche.

Man betrachte ferner einen unendlich schmal zu denkenden Streifen dF der Belastungsfläche im Abstande y von SS. Verlängert man die Grenzlinien des Streifens bis zur Seilkurve und zieht an beiden Punkten der Seilkurve Tangenten, so schließen diese mit SS das in der Abbildung schwarz hervorgehobene, schmale Dreieck ein. Die auf SS liegende Grundlinie des Dreieckes sei mit dg bezeichnet. Der gegenüberliegende Eckpunkt, also der Schnittpunkt beider Tangenten liegt auf der Schwerlinie des Streifens dF. Die zu dg gehörige Höhe des Dreieckes ist daher gleich y und der Inhalt des Dreieckes gleich $\frac{1}{2}\, dg \cdot y$.

Im Kräfteplane Abb. 42[b] kann man durch Ziehen von Parallelen zu den beiden Tangenten ein ebenfalls schwarz hervorgehobenes Dreieck abgrenzen, das dem in Abb. 42[a] ähnlich ist, weil die Seiten parallel zueinander gehen. Man hat daher die Proportion

$$\frac{dF}{H} = \frac{dg}{y} \quad \text{oder} \quad H dg = y dF.$$

Denkt man sich diese Gleichung für alle links von SS liegenden Streifen angeschrieben und alle summiert, so erhält man das Moment ersten Grades des links von SS liegenden Flächenteiles gleich dem Produkte aus dem Horizontalzuge H und der Summe aller dg, d. h. dem Abschnitte zwischen Seilkurve und Anfangstangente. Damit gelangen wir nur wieder auf anderm Wege zu den bereits früher gezogenen Schlüssen zurück.

Um auf die Momente zweiten Grades zu kommen, multipliziere man die vorige Gleichung mit y. Damit erhält man

$$y^2 dF = H y dg \quad \text{und daher} \quad \int y^2 dF = H \int y dg.$$

Die Summierung auf der rechten Seite kann aber unmittelbar ausgeführt werden. Denn das Integral gibt das Doppelte aus der Summe aller jener Dreiecke an, von denen vorher eines besprochen wurde. Diese Dreiecke folgen alle stetig aufeinander und füllen den zwischen der Seilkurve, der Anfangstangente und der Linie SS liegenden Raum aus. Dabei ist übrigens gar nicht einmal nötig, daß SS die Schwerlinie sei; auch für irgend eine andere, parallel zu SS gezogene Linie $\sigma\sigma$ bleibt die Betrachtung anwendbar und die zwischen ihr, der Kurve und der Anfangstangente abgegrenzte Fläche gibt nach Multiplikation mit $2H$ das Moment zweiten Grades für $\sigma\sigma$ von dem links davon liegenden Teile der Belastungsfläche an.

Um das Moment für die ganze Belastungsfläche zu erhalten, braucht man nur das Moment für die rechte Hälfte hinzuzufügen. Für dieses gilt natürlich dieselbe Betrachtung; es kann auch gleich dem Produkte aus $2H$ und dem zwischen der Seilkurve, der Endtangente und der Linie SS oder $\sigma\sigma$ liegenden Flächenstücke gesetzt werden. Dabei ist zu beachten, daß jedes Flächenelement der Belastungsfläche nur positive Beiträge zum Trägheitsmomente liefern kann; die von links und rechts her stammenden Beiträge sind daher ohne Vorzeichenunterschied zusammenzuzählen.

Ein Blick auf Abb. 42ª lehrt, daß das Trägheitsmoment unter allen parallel zueinander gezogenen Achsen für die Schwerlinie SS am kleinsten ausfällt. Es ist nämlich gleich dem Produkte aus $2H$ und der zwischen der Seilkurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossenen Fläche. Für eine Achse $\sigma\sigma$ vergrößert sich dagegen diese Fläche um das zwischen $\sigma\sigma$ und den beiden Endtangenten abgeschnittene Dreieck, das in Abb. 42ª durch eine horizontale Schraffierung ausgezeichnet ist.

Der Horizontalzug H der Seilkurve hat die Bedeutung eines Flächeninhaltes. Als Lasten dienten nämlich die Flächeninhalte der Belastungsstreifen und mit diesen muß H von gleicher Art sein. Am besten wählt man H im Kräfteplane so, daß es die Hälfte der Belastungsfläche F darstellt. Dies wird sofort erreicht, wenn man die beiden äußersten Polstrahlen

in Richtungen von 45° zieht. Dann bildet nämlich H die Höhe eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse die Summe aller dF, also F selbst angibt. Bezeichnet man ferner die zwischen der Seilkurve und ihren beiden Endtangenten liegende Fläche mit F' und das Trägheitsmoment für die Schwerlinie SS mit Θ, so hat man, unter der Voraussetzung, daß H in der eben angegebenen Weise gewählt wurde,

$$\Theta = F \cdot F'. \tag{20}$$

Die Inhalte der Flächen F und F' ermittelt man am besten mit Hülfe eines Planimeters.

In Abb. 43 ist das Verfahren auf ein Schienenprofil angewendet. — Um die Zentral-Ellipse oder den Querschnittskern einer Querschnittsfläche zu erhalten, muß man dasselbe Verfahren für die andere Hauptachse wiederholen.

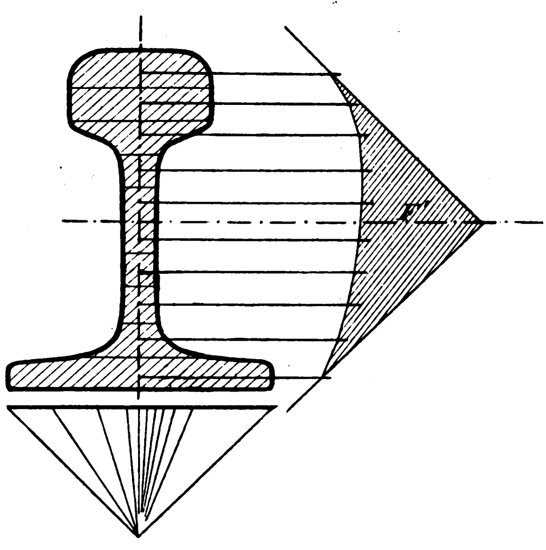


Abb. 43.

Außer dem bisher besprochenen Verfahren, das von Mohr herrührt, ist noch eine andere graphische Methode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten zu erwähnen, die von Nehls angegeben ist. Freilich hat diese mit dem Seilpolygone nichts zu schaffen; sie soll aber an dieser Stelle ebenfalls besprochen werden. Die Nehlssche Methode beruht auf einer einfachen Umformung des für das Trägheitsmoment aufgestellten Summenausdruckes, nämlich

$$\Theta = \int y^2 dF = a^2 \int \left(\frac{y}{a}\right)^2 dF,$$

wobei a irgend eine beliebig zu wählende Strecke bedeutet. Man formt jeden Flächenstreifen dF so um, daß er in $\left(\frac{y}{a}\right)^2 dF$ übergeht, und erhält dann Θ als Produkt aus der Summe dieser umgeformten Flächenstreifen und aus a^2.

Gewöhnlich wird bei der Anwendung des Verfahrens der Schwerpunkt der Querschnittsfläche noch nicht bekannt sein. Man zieht dann irgendwo eine Parallele AA zur Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird und bestimmt sowohl das statische Moment als das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für diese Parallele als Achse. Bei einem Schienenprofile, das in Abb. 44 wiederum als Beispiel gewählt wurde, kann man etwa die Basislinie dazu benutzen. Dann zieht man in einem Abstande a, der beliebig angenommen werden kann, eine Parallele BB zu AA. Den Querschnitt denkt man sich in Streifen eingeteilt, die parallel zu AA und BB gehen. Ein solcher Streifen, der in der Abbildung durch Querschraffierung hervorgehoben ist, möge die Breite (oder auch die halbe Breite bei einem symmetrischen Profile) z, die Höhe dy und den Abstand y von AA haben. Dann kann $dF = zdy$ und der Beitrag von dF zum statischen Momente S gleich $yzdy$ gesetzt werden. Nun konstruiere man eine Strecke z' so, daß

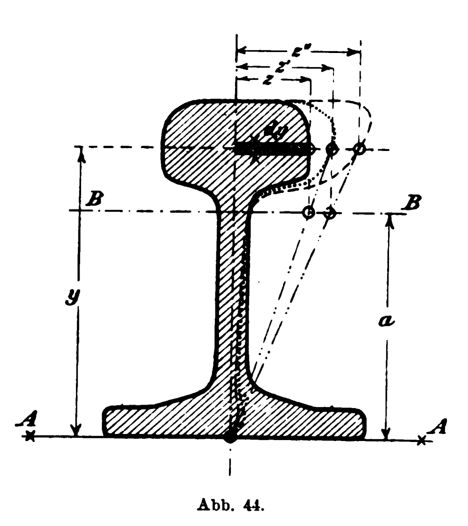


Abb. 44.

$$z' = z \frac{y}{a}$$

ist, was durch Ziehen der aus der Abbildung ersichtlichen Linien ohne weiteres geschehen kann. Dann ist

$$S = \int y\,dF = \int yz\,dy = a\int z'\,dy = aF',$$

wenn jetzt unter F' die Fläche verstanden wird, die von der durch die Endpunkte der z' geführten Kurve umschlossen wird. Diese Kurve kann nach Ermittelung einer genügenden Zahl ihrer Punkte nach dem angegebenen Verfahren eingetragen und die von ihr umschlossene Fläche mit Hülfe eines Planimeters ermittelt werden. Andererseits ist aber, wenn s den Schwerpunktsabstand von AA bedeutet, auch

$$S = sF \quad \text{und daher} \quad s = a\frac{F'}{F}. \tag{21}$$

Hierbei ist unter F der Inhalt der Querschnittsfläche zu verstehen. Der Schwerpunkt ist hiermit bekannt und damit auch die Schwerlinie, für die das Trägheitsmoment gesucht wird. Anstatt die Konstruktion für diese Schwerlinie unmittelbar weiter zu führen, tut man aber besser daran, auch das Trägheitsmoment zunächst für die Achse AA zu ermitteln. Es sei zum Unterschiede von dem für die Schwerlinie gültigen mit Θ' bezeichnet.

Zu jedem z' konstruiert man nun auf dieselbe Weise wie vorher ein z'', so daß

$$z'' = z'\frac{y}{a}, \quad \text{also} \quad z'' = z\frac{y^2}{a^2}$$

ist. Nachdem dies für eine genügende Zahl von Punkten ausgeführt ist, erhält man durch deren Verbindung eine zweite Kurve, die in der Abbildung durch eine gestrichelte Linie angegeben ist, während die vorige punktiert ausgezogen war. Die von dieser neuen Kurve umschlossene Fläche, die ebenfalls mit Hülfe des Planimeters auszumessen ist, sei mit F'' bezeichnet. Man hat nun

$$\Theta' = \int y^2\,dF = \int y^2 z\,dy = a^2\int z''\,dy = a^2F''. \tag{22}$$

Hiermit ist also in der Tat Θ' bekannt. Um daraus Θ zu finden, beachte man, daß

$$\Theta' = \Theta + s^2 F \quad \text{und daher} \quad \Theta = a^2\left(F'' - \frac{F'^2}{F}\right) \tag{23}$$

ist. Damit ist die Aufgabe gelöst.

§ 19. Die elastische Linie als Seilkurve.

Ein Balken, der durch Lasten, die senkrecht zu seiner Längsrichtung an ihm angreifen, auf Biegung beansprucht wird, erfährt eine elastische Formänderung, durch die seine vorher geradlinige Längs-Achse in eine Kurve übergeht, die man als die elastische Linie des Balkens bezeichnet. Wie Mohr gezeigt hat, kann die Gestalt der elastischen Linie durch Konstruktion von zwei Seilecken gefunden werden. Zum Nachweise dafür muß ich mich hier auf Untersuchungen des III. Bandes über die elastische Linie beziehen, deren selbständige Durchführung an dieser Stelle zu lange aufhalten würde.

Rechnet man die Abscissen x im Sinne der Stabachse und bezeichnet man die Ordinate der elastischen Linie für den Querschnitt x mit y, so gilt nach Gl. (78) des dritten Bandes die Differentialgleichung

$$E\Theta \frac{d^2 y}{d x^2} = - M. \tag{24}$$

Hierin ist M das Biegungsmoment für den Querschnitt x, während E den Elastizitätsmodul und Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet. Zugleich sei noch darauf hingewiesen, daß bei dieser Gleichung nur auf jene Formänderung Rücksicht genommen ist, die durch das Biegungsmoment hervorgebracht wird, während der Einfluß der Schubspannungen auf die Gestalt der Biegungslinie vernachlässigt ist. Bei kurzen, dicken Stäben kann dieser recht merklich sein; bei schlankeren Stäben, wie sie bei den Anwendungen, die von dem Verfahren gemacht zu werden pflegen, gewöhnlich vorkommen, ist er aber nur unbedeutend und kann daher ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden.

Vergleicht man mit Gl. (24) die in § 14 abgeleitete Differentialgleichung einer zu einer Belastungsfläche von der

Intensität q an der Abscisse x gehörigen Seilkurve, (Gl. (2), S. 79

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q,$$

so erkennt man, daß beide leicht zur Übereinstimmung miteinander gebracht werden können. Falls Θ konstant ist, braucht man nur q überall proportional mit M anzunehmen und zugleich durch geeignete Wahl von H dafür zu sorgen, daß

$$\frac{M}{E\Theta} = \frac{q}{H} \tag{25}$$

ist. Dann stimmen beide Gleichungen völlig miteinander überein und daraus folgt, daß die elastische Linie zugleich eine jener Seilkurven ist, die man zu einer Belastungsfläche konstruieren kann, deren Ordinate an jeder Stelle proportional mit M ist. Um unter allen, die möglich sind, gerade jene herauszusuchen, die sich mit der elastischen Linie deckt, muß man noch die Grenzbedingungen beachten, die der elastischen Linie durch die Art der Auflagerung des Balkens vorgeschrieben sind.

Eine Fläche, deren Ordinaten proportional mit M sind, ist uns schon aus § 16 bekannt. Achten wir zunächst nur auf einen Balken, der beiderseits frei (d. h. ohne Einspannung) aufliegt, so erhält man durch Konstruktion eines Seilpolygons, das wir hier als das „erste“ Seilpolygon bezeichnen wollen und dessen Horizontalzug gleich H_I sein mag, sowie nach Eintragung der Schlußlinie die „Momentenfläche“, also eine Fläche, deren Abschnitte auf lotrechten Linien mit H_I multipliziert an jeder Stelle das zugehörige Biegungsmoment M liefern. Jene Abschnitte waren in § 16 mit y bezeichnet; da der Buchstabe hier in anderer Bedeutung gebraucht wird, mögen sie jetzt mit u bezeichnet werden. Man hat dann

$$M = H_I u. \tag{26}$$

Ist der Balken in anderer Art aufgelagert, z. B. wie bei den in § 17 besprochenen Gerberschen Trägern, so wird sich ebenfalls eine Momentenfläche konstruieren lassen, von der vorstehende Gleichung gilt.

Diese Momentenfläche sehe man nun als Belastungsfläche

für ein „zweites“ Seileck an, dessen Belastungsrichtung mit jener des ersten übereinstimmt und dessen Horizontalzug jetzt H_{II} heißen soll. Um der vorher genannten Bedingung zu genügen, setzen wir M aus Gl. (26) in Gl. (25) ein, beachten, daß q nun durch u und H durch H_{II} zu ersetzen sind und lösen die Gleichung nach H_{II} auf. Wir finden dann

$$H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I}. \tag{27}$$

Die Dimension von H_{II} geht aus der Gleichung ebenfalls hervor; sie ist

$$[H_{II}] = \frac{\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\cdot \text{cm}^4}{\text{kg}} = \text{cm}^2.$$

H_{II} ist daher eine Fläche und dies muß auch so sein, weil auch die Lasten, die mit H_{II} vereinigt werden sollen, durch Flächen, nämlich durch den Inhalt der Momentenfläche gebildet werden.

Die Aufgabe, die elastische Linie zu konstruieren, kommt demnach darauf hinaus, eine Seilkurve von gegebener Belastungsfläche zu konstruieren, deren Horizontalzug durch Gl. (27) angegeben ist und die zugleich die Grenzbedingungen an den Auflagern erfüllt. In dieser Form wäre aber die Lösung der Aufgabe aus verschiedenen Gründen unbequem und man ändert sie daher noch ein wenig ab. Man kann nämlich leicht darauf verzichten, die wahre Gestalt der elastischen Linie auf der Zeichnung zu erhalten — umsomehr als sich diese nur sehr undeutlich von der vorher geraden Stabachse abheben würde —, wenn man nur anzugeben vermag, wie groß die Ordinate y an jeder Stelle ist.

Zunächst ändert man daher die Grenzbedingungen ab. Anstatt darauf zu bestehen, daß die elastische Linie durch die Auflagerpunkte gehen müsse, konstruiert man beim frei aufliegenden Balken irgend eine Seilkurve, die im übrigen den Bedingungen genügt, und trägt in sie eine Schlußlinie ein, so als wenn sie selbst wieder zur Konstruktion einer neuen Momentenfläche benutzt werden sollte. Mißt man nun

die Abschnitte zwischen der Schlußlinie und der Seilkurve, die auf lotrechten Linien gebildet werden, so geben diese die gesuchten Ordinaten y der elastischen Linie an. Man kann dies auf verschiedene Art nachweisen, am einfachsten, wenn man bedenkt, daß das Produkt $H_{\text{II}}y$, wie auch die Seilkurve im übrigen konstruiert sein mag, immer denselben Wert behalten muß, da es das Biegungsmoment darstellt, das in einem Balken hervorgerufen würde, der die durch die erste Momentenfläche angegebene Belastung wirklich zu tragen hätte.

Auf einer ganz ähnlichen Erwägung beruht auch die zweite Änderung, zu der man sich aus Rücksicht auf die bessere Ausführung der Zeichnung veranlaßt sieht. Rechnet man nämlich H_{II} nach Gl. (27) aus, so erhält man in praktisch vorliegenden Fällen eine Fläche, die ganz bedeutend größer ist, als der Inhalt der Momentenfläche. Wählt man nun den Maßstab im Kräfteplane so, daß H_{II} die Grenzen des verfügbaren Raumes nicht überschreitet, so fallen die Lasten, die durch die Momentenfläche dargestellt werden, zu klein aus, als daß sie noch genau genug aufgetragen werden könnten. Dies kann auch nicht überraschen; denn man weiß ja in der Tat, daß sich der Balken unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen verhältnismäßig nur sehr wenig durchbiegt. Die elastische Linie ist daher eine sehr flache Seilkurve, deren Horizontalzug sehr groß gegenüber ihren Lasten sein muß. Wollte man trotzdem darauf bestehen, die Ordinaten y der elastischen Linie in der richtigen verhältnismäßigen Größe zu konstruieren, so würden sie auch noch, ganz abgesehen von der vorher erwähnten Schwierigkeit der genauen Zeichnung des Kräfteplanes und des zugehörigen Seileckes, in der Zeichnung so klein ausfallen, daß man sie mit dem Zirkel kaum noch abstechen könnte. In Wirklichkeit mögen sie ja vielleicht gar nicht so klein sein; auf dem beschränkten Raume eines Zeichenblattes ist man aber genötigt, die ganze Zeichnung, die man sich in Naturgröße vorzustellen hat, so stark zu verkleinern, daß die Ordinaten y nicht mehr gut abmeßbar sind.

Man umgeht diese Schwierigkeit sehr leicht, indem man das zweite Seileck gar nicht mit dem Horizontalzuge H_{II}, sondern mit einem erheblich kleineren H'_{II} konstruiert, der etwa $^1/_n$ von H_{II} betragen mag. Dies hat zur Folge, daß dann alle y in n-facher Größe, etwa als y', erscheinen. Man bedenke nämlich, daß auf jeden Fall

$$H_{\text{II}}\, y = H'_{\text{II}}\, y'$$

sein muß, da, wie vorher schon bemerkt, jedes dieser Produkte die Bedeutung eines Biegungsmomentes für einen Balken hat, der die durch die erste Momentenfläche angegebenen Lasten wirklich zu tragen hätte.

Am besten richtet man es gewöhnlich so ein, daß die y' die wahren Werte der y in natürlicher Größe darstellen, während alle übrigen Längen, also namentlich die Spannweite des Balkens in stark verkleinertem Maßstabe aufzutragen sind. Hat man also die Zeichnung ursprünglich in $^1/_n$ der natürlichen Größe angefertigt, so setze man an Stelle von H_{II} in Gl. (27)

$$H'_{\text{II}} = \frac{1}{n}\,\frac{E\Theta}{H_{\text{I}}} \tag{28}$$

und man findet dann die elastische Linie in verzerrter Gestalt, so daß ihre Abscissen im Maßstabe $1:n$, die Ordinaten y aber in wahrer Größe auszumessen sind. — Wenn es erwünscht erscheinen sollte, kann man die Verzerrung aber natürlich auch noch weiter treiben — oder sie auch weniger groß wählen —, da es ganz unserem Belieben anheimgestellt ist, welchen Horizontalzug H'_{II} wir wählen wollen, falls nur der zugehörige Maßstab, nach dem die Ordinaten y auszumessen sind, passend dazu bestimmt wird.

In Abb. 45 (s. S. 110) ist die Konstruktion für einen bestimmten Fall im Maßstabe durchgeführt. Ein I-Träger von 30 cm Höhe, dessen Trägheitsmoment nach den Profiltabellen 9888 cm^4 beträgt, überdeckt eine Spannweite von 11 m, über die er nach rechts hin noch um 3 m vorkragt und nimmt die in die Zeichnung eingetragenen Lasten auf, von denen eine senkrecht nach oben gerichtet ist. Unmittelbar unterhalb der

Ansichtszeichnung des Trägers ist mit Hülfe eines Seileckes, dessen Horizontalzug H_{I} zu 5000 kg gewählt ist, die Momentenfläche konstruiert. Der rechte Teil stellt negative Momente dar und die ihm entsprechenden Lasten sind daher mit nach oben gerichtetem Pfeile in das zweite Seileck aufzunehmen.

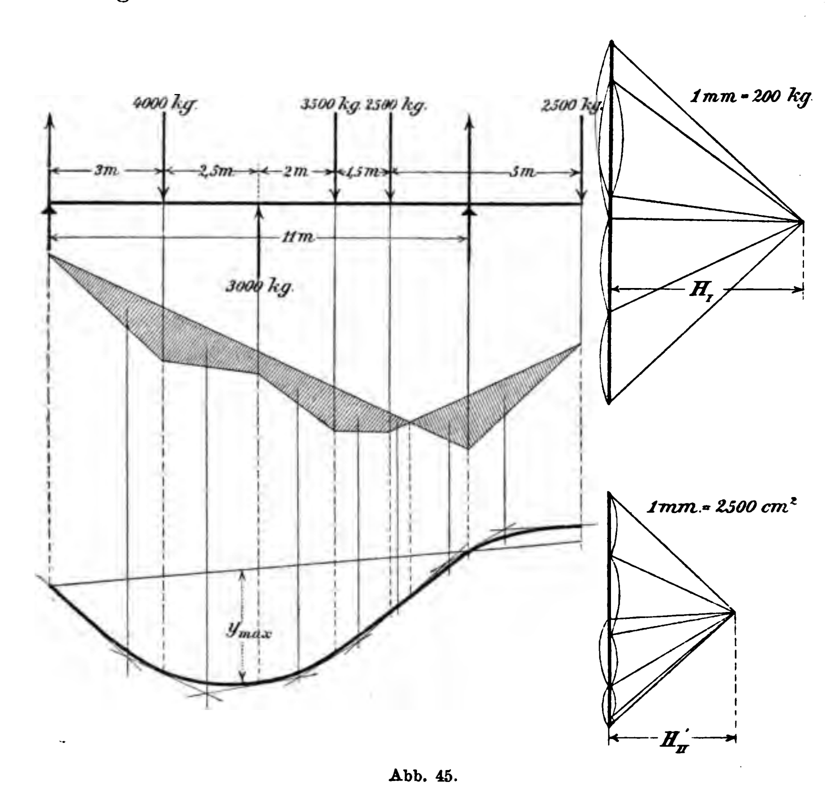


Abb. 45.

Wenn der Elastizitätsmodul $E = 2\,100\,000$ atm angenommen wird, erhält man für H_{II} nach Gl. (27)

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{2\,100\,000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2} \cdot 9888\ \mathrm{cm}^4}{5000\ \mathrm{kg}} = 4\,150\,000\ \mathrm{cm}^2.$$

Beim Ausmessen der Belastungsflächen des zweiten Seilpolygons ist zu beachten, daß die Spannweite des Trägers im

Maßstabe 1 : 200 aufgetragen ist. Hiernach bedeutet 1 qmm der Momentenfläche in der Zeichnung in Wirklichkeit das 40000fache oder 400 cm². Eine zweckmäßige Größe des zweiten Kräfteplanes erhält man bei der Wahl des Maßstabes 1 mm = 2500 cm². Hiernach würde freilich H_{II} gleich 1660 mm aufzutragen sein. Hiervon nehmen wir aber nur $\frac{1}{100}$, setzen also

$$H'_{II} = 16{,}6 \text{ mm}$$

im Kräfteplane. Die Ordinaten der elastischen Linie erscheinen dann in hundertfacher Verzerrung oder, da der Maßstab der Längen 1 : 200 ist, in der Hälfte der natürlichen Größe. Hätte man H'_{II} nur halb so groß gewählt, so hätte man die Durchbiegungen in natürlicher Größe gefunden.

Für die Konstruktion des zweiten Seileckes wurde die Momentenfläche in Dreiecke und Trapeze zerlegt, in deren Schwerpunkten Einzellasten angenommen wurden, die durch die Flächeninhalte in dem angegebenen Maßstabe darzustellen waren. Dadurch erhielt man das Tangentenpolygon, in das nachträglich die Seilkurve selbst mit Hülfe eines Kurvenlineals eingetragen werden konnte. Die Schlußlinie geht durch die Schnittpunkte der beiden Auflagervertikalen mit dem Seilpolygone und von ihr aus sind die Ordinaten der elastischen Linie auf lotrechten Linien abzumessen. Mit dem Zirkel findet man leicht die Stelle der größten Durchbiegung y_{max} des Trägers heraus. In dem Beispiele ergibt sich diese auf der Zeichnung zu 15 mm; wegen des vorher besprochenen Maßstabes bedeutet dies aber in Wirklichkeit eine Durchbiegung von 30 mm. — Der nach rechts vom rechten Auflager aus vorkragende Teil des Trägers hebt sich, wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, nach oben hin auf und ist mit der Hohlseite nach unten hin gekrümmt, wie es den negativen Biegungsmomenten entspricht. Auf der durch den Schnittpunkt des ersten Seilpolygons mit seiner Schlußlinie gezogenen Vertikalen liegt der Wendepunkt der elastischen Linie.

Bisher war angenommen, daß das Trägheitsmoment Θ konstant sei. Die Konstruktion wird aber nicht wesentlich

geändert, wenn Θ in beliebiger, aber gegebener Weise veränderlich ist. Man muß dann nur, um die Übereinstimmung der Differentialgleichung für die elastische Linie mit der Gleichung der Seilkurve herzustellen, dafür sorgen, daß nun q nicht mehr mit M, sondern mit $\frac{M}{\Theta}$ überall proportional ist. Man wähle irgend einen Querschnitt des Trägers, etwa den in der Mitte aus, um dessen Trägheitsmoment Θ_m mit dem Trägheitsmomente Θ an irgend einer andern Stelle zu vergleichen. Dann forme man die Momentenfläche so um, daß ihre Ordinaten u überall durch

$$u \frac{\Theta_m}{\Theta}$$

ersetzt werden. Da Θ überall gegeben sein sollte, ist dies leicht auszuführen. Die so umgeformte Fläche ist dann als Belastungsfläche des zweiten Seilpolygons anzunehmen, dessen Horizontalzug H_{II} nun an Stelle von Gl. (27)

$$H_{\text{II}} = \frac{E\Theta_m}{H_{\text{I}}} \tag{29}$$

zu wählen ist. — Gerade hierin, daß ein beliebig veränderliches Trägheitsmoment dem graphischen Verfahren gar keine besonderen Schwierigkeiten macht, liegt gegenüber dem analytischen Verfahren, das in der unmittelbaren Integration der Differentialgleichung besteht, ein großer Vorzug.

Unter manchen Umständen kann auch noch ein anderes Verfahren am Platze sein, das in Abb. 46 zur Ausführung gebracht wurde. Ist das Trägheitsmoment des Trägers nämlich absatzweise konstant, so kann man die elastische Linie zu jedem Abschnitte von gleichem Trägheitsmomente genau wie in Abb. 45 konstruieren. Zu jedem andern Abschnitte gehört ein anderer Ast der elastischen Linie, der zwar ebenfalls als Seilkurve, aber unter Anwendung eines andern Horizontalzuges konstruiert werden kann. Die elastische Linie setzt sich dann aus der Aneinanderreihung aller dieser Seilkurvenstücke zusammen, die sich ohne Knick aneinanderschließen und die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllen müssen. Man

beginnt mit der Konstruktion etwa am linken Ende, indem man den Pol O_1 im Kräfteplane beliebig wählt. An der Übergangsstelle zum nächsten Aste muß der Seilstrahl eine gemeinsame Tangente an beide Äste bilden. Im Kräfteplane verlängert (oder verkürzt) man daher den zugehörigen Polstrahl solange, bis der Polabstand gleich dem für den zweiten Ast nach Gl. (27)

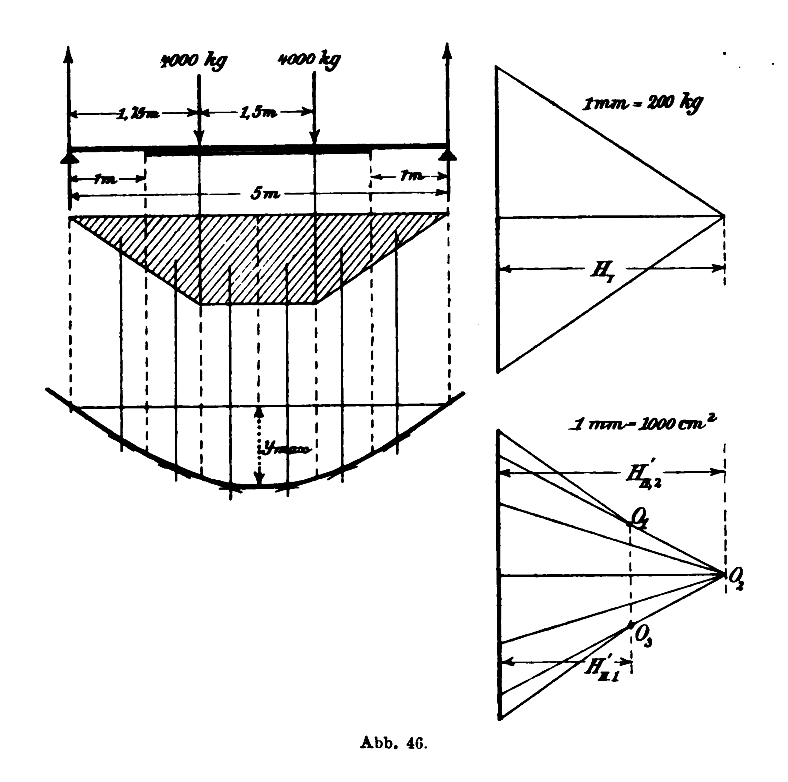


Abb. 46.

berechneten Horizontalzuge H_{II} geworden ist. Den hierdurch bestimmten Punkt wählt man als Pol O_2 für die Konstruktion des zweiten Astes. Auch für jeden folgenden Ast wird auf diese Art ein neuer Pol gewählt; also so, daß je zwei aufeinanderfolgende Pole auf dem Polstrahle liegen, der zu dem Seilstrahle an der Übergangsstelle parallel ist und so, daß der Abstand des Poles von der Lastlinie für jeden Abschnitt

des Trägers gleich dem nach Gl. (27) berechneten Horizontalzuge wird. Zuletzt trägt man die Schlußlinie so ein, daß die Grenzbedingungen an den Auflagerstellen erfüllt sind; von ihr aus sind dann die Ordinaten der elastischen Linie abzumessen.

In dem Beispiele der Abb. 46 sind die Längen im Maßstabe 1 : 100 aufgetragen. In dem durch einen Doppelstrich hervorgehobenen mittleren Teile des Trägers ist das Trägheitsmoment zu 17350 cm^4, an den beiden Enden zu 10000 cm^4 angenommen. Der Horizontalzug H_I, mit dem die Momentenfläche konstruiert ist, beträgt 6000 kg. Für den Horizontalzug des ersten Astes der elastischen Linie erhält man nach Gl. (27) 3500000 cm^2. Hiervon ist aber nur der 200. Teil als $H'_{II,1}$ genommen. Ebenso findet man

$$H'_{II,2} = \frac{1}{200} \cdot \frac{2100000 \cdot 17350}{6000} = 30362 \text{ cm}^2,$$

die durch 30,4 mm im Kräfteplane des zweiten Seilpolygons dargestellt werden; als Elastizitätsmodul ist dabei wieder $E =$ 2100000 atm angenommen. Die elastische Linie erscheint in 200facher Verzerrung. Da aber zugleich alle Längen 100fach verkleinert sind, werden die Ordinaten der elastischen Linie in doppelter Größe aus der Zeichnung entnommen. Die größte Durchbiegung y_{max} findet hier in der Mitte statt; die Zeichnung liefert dafür 11 mm, in Wirklichkeit beträgt daher der Biegungspfeil 5.5 mm.

Schließlich muß noch auf einige andere Fälle hingewiesen werden, die gelegentlich vorkommen können. Geht nämlich zunächst die Belastungsebene nicht durch eine Querschnittshauptachse des Trägers (vgl. hierzu die einschlägigen Lehren des dritten Bandes), so zerlegt man die Biegungsmomente in zwei rechtwinklige Komponenten, so daß die Ebene jeder Komponente durch eine Querschnittshauptachse geht, führt dann für beide Komponenten die vorher beschriebene Konstruktion durch und findet nachträglich Größe und Richtung der gesamten Durchbiegung als geometrische Summe der Durchbiegungen in jenen beiden Hauptrichtungen.

Derselbe Weg führt auch zum Ziele, wenn die am Balken angreifenden Lasten überhaupt nicht in einer Ebene enthalten sind,

Bei Maschinenwellen kommt es z. B. vor, daß sie durch mehrere Kräfte auf Biegung beansprucht werden, die zwar alle rechtwinklig zur Wellenachse stehen, aber nicht parallel zueinander sind (einige etwa lotrecht, andere wagrecht). Die elastische Linie wird dann eine doppelt gekrümmte Kurve. Man findet ihre Projektionen, indem man zuerst nur die lotrechten Komponenten aller Lasten berücksichtigt, hiernach die Momentenfläche und das zweite Seilpolygon konstruiert, womit man die Durchbiegungs-Komponenten im lotrechten Sinne findet, und dann die Untersuchung für die wagrechten Last-Komponenten wiederholt. Hierbei ist ein kreisförmiger Stabquerschnitt vorausgesetzt oder wenigstens ein Querschnitt, von dem jede Schwerpunktsachse zugleich eine Hauptachse ist. Aber auch im andern Falle entsteht keine Schwierigkeit; man zerlegt dann alle Lasten anstatt in lotrechte und wagrechte in solche Komponenten, die in die Richtungen der Querschnittshauptachsen fallen.

Ferner sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Konstruktion einer Seilkurve ganz allgemein die Ermittelung des Doppelintegrales

$$\int\int q\,dx\,dx$$

auf graphischem Wege gestattet, wenn darin q eine beliebige gegebene Funktion von x bedeutet, die als Ordinate der Belastungsfläche graphisch dargestellt werden kann. Die Ermittelung der elastischen Linie bildet nur ein Beispiel (freilich das technisch wichtigste) für die Ausführung einer solchen mechanischen Integration.

Man könnte natürlich zu dem zweiten Seilpolygone bei den vorhergehenden Betrachtungen auch noch ein drittes u. s. f. konstruieren, das aus dem vorigen ebenso abzuleiten wäre, wie das zweite aus dem ersten. Damit würde man auch noch das vierte, sechste Integral u. s. f. von q ableiten können.

§ 20. Ermittelung von Flächeninhalten mit Hülfe des Seileckes.

Flächeninhalte ermittelt man am besten mit Hülfe eines Planimeters oder, wenn ein solches nicht zu Gebote steht, durch Zerlegen der Figur in einfachere Teile, deren Inhalte auf Grund geometrischer Sätze sofort berechnet werden können. So gelangt man z. B. auf jeden Fall zu einem hinreichend genauen Resultate, indem man die Figur in schmale Streifen zerlegt, die sich als Trapeze ansehen lassen, den Inhalt für

jeden Streifen berechnet und alle addiert oder anstatt dessen durch Anwendung der Simpsonschen Regel.

Aus diesem Grunde ist die Anwendung des Seileckes zur Berechnung von Flächeninhalten, die hier noch besprochen werden soll, von geringerer Bedeutung. Man macht indessen immerhin zuweilen davon Gebrauch und sie soll daher hier nicht übergangen werden.

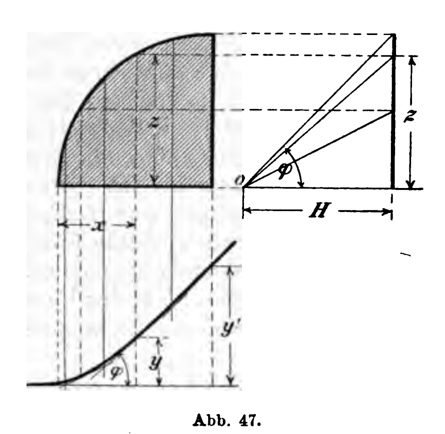


Abb. 47.

Das Verfahren ist durch Abb. 47, in der es auf die Ermittelung des Inhaltes eines Kreisquadranten angewendet wurde, erläutert. In Wirklichkeit würde man es natürlich bei so einfachen Fällen nicht gebrauchen; man wird aber sehen, daß es in derselben Form auch zum Ziele führt, wenn der Kreisbogen durch irgend eine andere Kurve ersetzt wird.

Man teilt den Umfang der Grenzkurve (also hier den Kreisbogen) in eine Anzahl von gleichen oder auch ungleichen Teilen. Eigentlich sollte diese Anzahl unendlich groß sein; in der Abbildung sind aber nur drei Teile genommen, und wenn dies auch etwas wenig ist, so genügt es doch fast schon zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit. In der Mitte jedes Bogenelementes bringt man eine in lotrechter Richtung gehende Kraft an, die der Projektion des Elementes auf die lotrechte Richtung proportional ist. Diese Kräfte setzt man mit Hülfe eines Seilpolygons zusammen. Der zugehörige Kräfteplan kann nebenan leicht aufgetragen werden, indem man durch die Teilpunkte auf der Kurve Horizontalen zieht, die auf der lotrechten Lastlinie die Lasten in der gewünschten Größe ohne weiteres abschneiden. Den Pol O wählt man auf der X-Achse; der Horizontalzug H kann beliebig angenommen

werden. Nachdem hierauf das Seilpolygon zu den Lasten unterhalb konstruiert ist, kann man auch noch die Seilkurve freihändig eintragen, da man weiß, daß diese die Polygonseiten auf den durch die Teilpunkte der Begrenzungskurve der gegebenen Fläche gezogenen Lotrechten berührt. Man kann nun leicht beweisen, daß die Ordinate y der Seilkurve, von der horizontalen ersten Seilspannung aus gemessen, mit dem Horizontalzuge H multipliziert den bis zur zugehörigen Abscisse x reichenden Teil der gegebenen Fläche angibt.

Zu diesem Zwecke denke man sich im Punkte xy der Seilkurve eine Tangente konstruiert, die den Winkel φ mit der Horizontalen bilden möge. Diesen Winkel bildet auch der zur Tangente parallel gezogene Polstrahl im Kräfteplane mit der Horizontalen. Bezeichnet man die Ordinate der Grenzkurve der gegebenen Fläche mit z, so hat man für tg φ die beiden Werte

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{z}{H}.$$

Hieraus folgt

$$H\,dy = z\,dx$$

und daher nach Summierung von 0 bis x

$$Hy = \int_0^x z\,dx. \tag{30}$$

Das Integral gibt aber in der Tat den bis zur Abscisse x reichenden Teil des Flächeninhaltes an und der Satz ist damit bewiesen. Für den Inhalt des ganzen Quadranten hat man natürlich das Produkt aus der letzten Ordinate y' und dem Horizontalzuge H zu nehmen.

In gewissem Sinne wird durch diese Konstruktion die Aufgabe der Quadratur des Kreises gelöst, indem der Kreisinhalt auf ein ihm inhaltgleiches Rechteck zurückgeführt wird. Natürlich entspricht diese Lösung aber nicht dem Sinne, in dem die Aufgabe ursprünglich gestellt war. Nur dann, wenn man den Kreisumfang wirklich in unendlich viele Teile einteilen könnte, wäre man berechtigt, die Lasten der einzelnen Bogenelemente durch deren Mitte zu führen. Sobald die Teile

nicht unendlich klein sind, geht das resultierende Gewicht für jeden Teil nicht mehr genau durch die Mitte des Teiles. Für die praktische Verwendung des Verfahrens, bei dem die Genauigkeit ohnehin durch die unvermeidlichen Zeichenfehler beschränkt ist, macht dies aber nichts aus.

Wie man sieht, kann übrigens auf diesem Wege auch ganz allgemein das erste Integral einer beliebig gegebenen Funktion q von x

$$\int q\,dx$$

konstruiert werden, gerade so, wie im vorigen Paragraphen das zweite Integral.

Aufgaben.

10. Aufgabe. Ein Träger ist am einen Ende fest, am andern Ende auf einem in schiefer Richtung gehenden Rollenlager aufgelagert; man soll die durch gegebene Lasten hervorgebrachten Auflagerkräfte ermitteln (vgl. Abb. 48).

Lösung. Denkt man sich die gegebenen Lasten zu einer Resultierenden vereinigt, so muß diese mit den beiden Auflagerkräften im Gleichgewichte stehen. Von dem Auflagerdrucke am beweglichen Auflager kennt man von vornherein die Richtung, da diese senkrecht zur Auflagerbahn stehen muß. Verlängert man diese Richtungslinie bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie der Resultierenden aller Lasten, so muß durch den Schnittpunkt auch die Richtungslinie des am festen Auflager übertragenen Auflagerdruckes gehen. Die Größen beider Auflagerkräfte ergeben sich nach Feststellung der Richtungen einfach durch Zeichnen eines Kräftedreieckes, in dem die Resultierende der Lasten die dritte Seite bildet.

Anstatt dessen kann man aber auch die Auflagerkräfte unmittelbar mit Hülfe eines Seilpolygons bestimmen. Durch dieses verbindet man zunächst die Lasten; durch Einbeziehen der beiden Auflagerkräfte muß es nachher zu einem geschlossenen werden. Hat man die Schlußlinie, so findet man die Auflagerkräfte ohne weiteres aus dem Kräfteplane. Insofern gleicht das Verfahren vollständig dem in § 12 beschriebenen. Nur das Eintragen der Schlußlinie erfordert hier noch eine besondere Überlegung. Da nämlich die Richtung des Auflagerdruckes am festen Auflager zunächst unbekannt ist, muß man die erste Seileckseite durch den festen Auflagerpunkt hindurch legen, damit man den Schnittpunkt

der ersten Seilspannung mit dem Auflagerdrucke trotzdem sofort angeben kann.

In Abb. 48 ist dies durchgeführt. Zunächst wurden die Lasten 1, 2, 3 im Kräfteplane (48^b) aufgetragen und der Pol O beliebig gewählt. Das Seileck wird dann in Abb. 48^a vom festen Auflagerpunkte A aus gezeichnet. Die letzte Seileckseite trifft die durch den Auflagerpunkt B zur Richtung der Auflagerbahn gezogene Senkrechte 𝔅 in einem Punkte C, der mit A verbunden die Schlußlinie S des Seilpolygons liefert. Dann trägt man S in den Kräfteplan (parallel zur Schlußlinie) ein und beachtet, daß die letzte Seilspannung mit dem Auflagerdrucke 𝔅 eine in die Richtung der Schlußlinie fallende Resultierende ergeben muß. Man zieht daher die Parallele zu 𝔅, die S im Punkte O' trifft. Auch 𝔄 ergibt sich dann sofort.

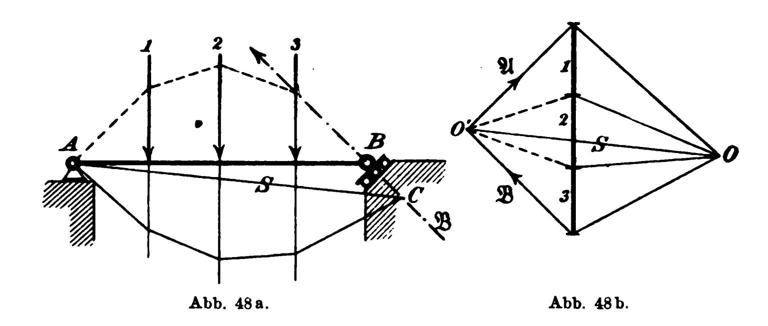


Abb. 48a. Abb. 48b.

Man kann nachträglich auch den Punkt O' als Pol eines neuen Seilpolygons wählen, das mit gestrichelten Linien in Abb. 48^a eingetragen ist. Bei diesem Seilpolygone wird die Anfangsspannung durch den Auflagerdruck gebildet. Man braucht hier keine Kraft willkürlich beizufügen, um das Seilpolygon zu konstruieren, sondern kann die in Wirklichkeit schon vorhandenen benutzen. Legt man nachher einen Schnitt durch den Träger, so werden alle Kräfte links vom Schnitte durch eine einzige, nämlich durch die vom Schnitte mitgetroffene Seilspannung ersetzt. Ein Seilpolygon von dieser Art wird auch als eine Drucklinie bezeichnet.

Ein Seil könnte die zum Pole O' gehörige Gestalt des Seileckes unter dem Einflusse der gegebenen Lasten freilich nicht aufrecht erhalten, weil in den Seilstrecken Druckspannungen vorkämen, die das Seil nicht aufzunehmen vermag. Man kann sich aber das Seil durch Stangen ersetzt denken, die an den Lastangriffspunkten gelenkförmig miteinander verbunden sind. Manche nennen daher das Seilpolygon in diesem Falle ein Gelenkpolygon;

ich werde aber an der Bezeichnung Seilpolygon oder Seileck auch in solchen Fällen festhalten.

Schließlich bemerke ich noch, daß man ganz ähnlich wie hier auch dann zu verfahren hat, wenn der Träger zwar als gewöhnlicher Balkenträger mit einem horizontal verschieblichen Rollenlager aufgelagert ist, dabei aber schief gerichtete Lasten trägt, wie z. B. ein Dachbinder, der durch Winddruck belastet ist. Auch dann ist das Seilpolygon mit der Anfangsseite durch den festen Auflagerpunkt zu führen, damit man von hier aus die Schlußlinie eintragen kann.

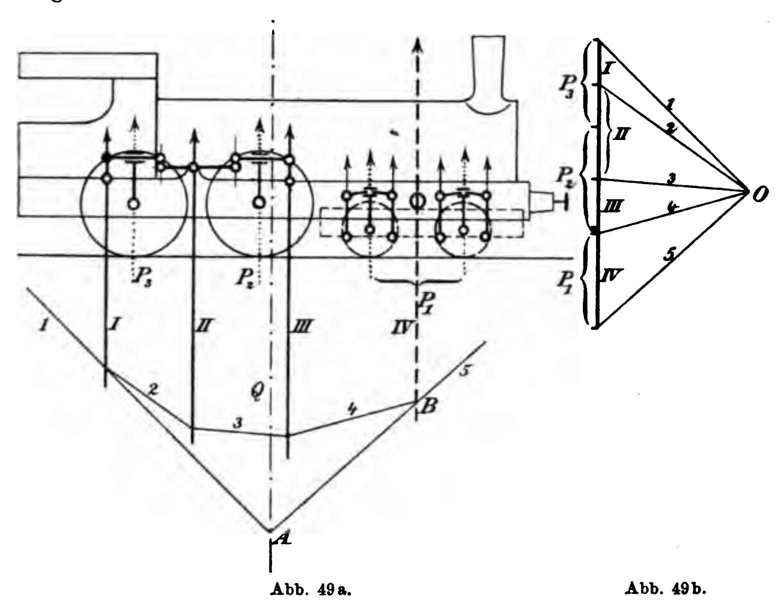


Abb. 49a. Abb. 49b.

11. Aufgabe. Das Gewicht Q einer Lokomotive (ohne Einrechnung der Radsätze) soll auf 4 Achsen so verteilt werden, daß das zu den beiden vordersten Achsen gehörige Drehgestell den Anteil P_1 davon aufzunehmen hat, während auf die beiden hinteren Achsen die Anteile P_2 und P_3 entfallen. Die Federaufhängung ist aus Abb. 49 zu entnehmen. Der Schwerpunkt der Lokomotive und die Stellung der beiden hinteren Achsen sind gegeben. Man soll die Lage der vorderen Achsen so bestimmen, daß die verlangte Lastenverteilung eintritt.

Lösung. Im Kräfteplane Abb. 49[b] trage man zunächst die Lasten P_3, P_2, P_1 ab, beachte dann, daß der Druck auf dem

Stützpunkte I aus der Hälfte von P_3 besteht und ähnlich bei II und III. Dann wähle man einen Pol O und konstruiere zu den Lasten I, II, III das Seileck mit den Seilstrahlen 1, 2, 3, 4. Die Richtung der Last IV oder P_1 ist dann so in die Zeichnung der Lokomotive einzutragen, daß der Schnittpunkt A der äußersten Seileckseiten 1 und 5 auf die gegebene Richtungslinie der Resultierenden Q fällt. Dieser Punkt A ist aber durch 1 und Q bereits bekannt und eine Parallele durch ihn zum Polstrahle 5 im Kräfteplane liefert den Schnittpunkt B der Seilstrahlen 4 und 5, durch den die Last IV gehen muß. Hiermit ist die Lage der vorderen Achsen bekannt.

12. Aufgabe. Ein Telegraphendraht (von ungefähr 4 mm Stärke) wiegt 100 gr für den laufenden Meter. Er soll über einer Spannweite von 100 m ausgespannt werden, aber so, daß die durch das Eigengewicht hervorgebrachte Anspannung nicht mehr als 80 kg ausmacht; um wieviel muß man ihn in der Mitte durchhängen lassen?

Lösung. Man setze $l = 100$ m, $Q = 10$ kg, $H = 80$ kg in Gl. (5) ein, so erhält man $f = 1{,}56$ m.

13. Aufgabe. Um wieviel ändern sich H und f im vorhergehenden Falle infolge einer Temperaturerniedrigung um 20° C., wenn der Ausdehnungskoeffizient zu $\frac{1}{80000}$ und der Elastizitätsmodul zu 2200000 atm angenommen werden?

Lösung. Wir berechnen zunächst die Bogenlänge b für den Pfeil $f = 1{,}56$ m nach Gl. (8)

$$b = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} = 100{,}065 \text{ m}.$$

Diese Drahtlänge wird durch die Abkühlung um 20° um $\frac{1}{4000}$, also um 25 mm verkürzt. Gleichzeitig wird sie aber durch die elastische Ausdehnung, die mit der Erhöhung des Horizontalzuges H verbunden ist, wieder etwas verlängert. Eine Spannung von 1 kg verlängert den Draht nach dem Elastizitätsgesetze um

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 100000 \text{ mm}}{2200000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 0{,}1256 \text{ cm}^2} = 0{,}36 \text{ mm}.$$

Bezeichnen wir den Horizontalzug, der sich nachher einstellt, mit x, so beträgt die elastische Verlängerung durch die Erhöhung um $x - 80$ hiernach $0{,}36\,(x - 80)$ mm und im ganzen wird aus b

$$b' = 100065 - 25 + 0{,}36\,(x - 80) = (100011 + 0{,}36\,x) \text{ mm}.$$

Andererseits ist aber nach Gl. (7)

$$b = l + \frac{Q^2 l}{24\, H^2}$$

oder nach Einsetzen der hier zutreffenden Werte

$$b' = 100000 \left(1 + \frac{10^2}{24\, x^2}\right) \text{ mm.}$$

Setzt man beide Werte von b' einander gleich, so erhält man für x die kubische Gleichung

$$11 + 0{,}36\, x = \frac{10^7}{24\, x^2} \cdot$$

Am einfachsten erhält man deren Lösung durch Probieren und findet genau genug

$$x = 95{,}8 \text{ kg.}$$

Der zugehörige Biegungspfeil f' folgt aus Gl. (5) zu

$$f' = \frac{10 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m}}{8 \cdot 95{,}8 \text{ kg}} = 1{,}30 \text{ m}$$

und die Bogenlänge b' wird

$$b' = 100045{,}5 \text{ mm.}$$

14. Aufgabe. Ein Drahtseil, von dem ein laufender Meter 2 kg wiegt, überspannt eine horizontale Entfernung von 40 m. Es hängt in der Mitte um 2 m durch; wie lang ist das Seil und wie stark ist es gespannt?

Lösung. Man sucht zunächst die Konstante a in der Gleichung der Kettenlinie

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

Gl. 17, S. 88) oder den sogenannten Parameter der Kettenlinie auf. Man weiß, daß für $x = 20$ m, $y = a + 2$ m ist; a folgt daher aus der Lösung der transcendenten Gleichung

$$a + 2 = a \cosh \frac{20}{a},$$

die mit Hülfe der Tafeln der Hyperbelfunktionen leicht aufgelöst werden kann. Um zunächst einen Näherungswert für a zu erhalten, betrachte man die Seilkurve als eine Parabel, setze $Q = 80$ kg und berechne nach Gl. (6)

$$H = \frac{80 \text{ kg} \cdot 40 \text{ m}}{16 \text{ m}} = 200 \text{ kg.}$$

Nach Gl. (16) würde dies einem Werte $a = 100$ m entsprechen. Wir können daher

$$a = 100 + \delta$$

setzen, worin δ einen Wert bezeichnet, der jedenfalls klein gegen 100 ist. Anstatt nun die Gleichung

$$\cosh\frac{20}{a} = 1 + \frac{2}{a}$$

unmittelbar durch Probieren aufzulösen, was bei Verwendung der gewöhnlich zur Verfügung stehenden vierstelligen Tafeln nicht genau genug möglich wäre, beachte man, daß

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

ist, wovon man sich auf Grund der für die Hyperbelfunktionen gültigen Exponentialausdrücke leicht überzeugt, und daß daher

$$\cosh\frac{20}{a} = \cosh\frac{20}{100} + \sinh\frac{20}{100}\cdot\frac{d}{da}\left(\frac{20}{a}\right)\cdot\delta$$
$$= \cosh 0{,}2 - \sinh 0{,}2\cdot 0{,}0020\cdot\delta$$

gesetzt werden kann.

Verfährt man ebenso mit dem andern Gliede der Gleichung, so geht diese über in

$$\cosh 0{,}2 - 0{,}0020\cdot\delta\cdot\sinh 0{,}2 - 1{,}02 + 0{,}0002\cdot\delta = 0.$$

Aus den Tafeln entnimmt man, daß

$$\cosh 0{,}2 = 1{,}0201 \quad\text{und}\quad \sinh 0{,}2 = 0{,}2013$$

ist. Setzt man dies in die vorausgehende Gleichung ein und löst nach δ auf, so erhält man

$$\delta = 0{,}49 \quad\text{und daher}\quad a = 100{,}49\ \text{m}.$$

Freilich sind auch diese Zahlen wegen Verwendung von vierstelligen Tafeln nicht sehr genau; für die praktische Verwendung reicht die Genauigkeit aber immerhin aus. Nachdem a bekannt ist, findet man leicht alle übrigen Größen. Der Horizontalzug H ist

$$H = a\gamma = 200{,}98\ \text{kg}.$$

Die größte Seilspannung tritt indessen an den Aufhängepunkten auf und ist nach Gl. (18)

$$S = 102{,}49\cdot 2 = 204{,}98\ \text{kg}.$$

Die Länge des halben Seiles beträgt nach Gl. (14)

$$s = a\sinh\frac{x}{a} = 100{,}49\sinh\frac{20}{100{,}49} = 20{,}128\ \text{m}.$$

Betrachtet man dagegen die Seilkurve als eine Parabel und berechnet den Bogen b nach der Näherungsformel Gl. (8), so erhält man

$$b = 40 + \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{40} = 40{,}267 \text{ m}$$

gegenüber 40,256 m bei der Kettenlinie. Der Unterschied beträgt nur 11 mm; wenn keine besondere Genauigkeit verlangt wird, genügt es daher im vorliegenden Falle noch, die Seilkurve als Parabel zu betrachten.

15. Aufgabe. An dem in der vorigen Aufgabe besprochenen Drahtseile soll nachträglich eine Last von 300 kg in der Mitte aufgehängt werden. Wie groß wird die Seilspannung und um wieviel hängt das Seil nachher in der Mitte durch, wenn von der elastischen Längenänderung, die das Seil infolge der höheren Spannung erfährt, abgesehen wird?

Erste Lösung. Die Seilkurve setzt sich aus zwei symmetrisch zueinander liegenden Ästen zusammen, von denen jeder einen Kettenlinienbogen bildet. Es genügt daher, einen von beiden zu betrachten. Dort, wo beide zusammenstoßen, bilden beide Endtangenten einen Winkel 2φ miteinander, wenn hier φ dieselbe Bedeutung hat, wie in § 15. Aus dem Kräftedreiecke, das für beide Seilspannungen und die Last $P = 300$ kg gezeichnet werden kann, folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{2H} = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \cdot$$

In dieser Gleichung kommen als Unbekannte der Parameter a der Kettenlinie und die Abscisse x des zur Seilmitte gehörigen Kettenlinienanfanges vor. Rechnet man auch den Bogen s vom Scheitel der Kettenlinie bis zu diesem Bogenanfange, so läßt sich nach Gl. (14) die vorige Gleichung ersetzen durch

$$\frac{P}{2\gamma} = s \quad \text{oder} \quad s = 75 \text{ m.}$$

Fügt man hierzu die in der vorigen Aufgabe bereits berechnete halbe Seillänge, so ist der vom Scheitel bis zum Aufhängepunkte berechnete Bogen s'

$$s' = 95{,}128 \text{ m.}$$

Andererseits ist aber nach Gl. (14) für diese Stelle auch

$$s' = a \sinh \frac{x + 20}{a} \cdot$$

Wir haben demnach die beiden transcendenten Gleichungen

$$a \sinh \frac{x}{a} = 75 \quad \text{und} \quad a \sinh \frac{x + 20}{a} = 95{,}128$$

nach den Unbekannten a und x aufzulösen. Um die Unbekannte x zu eliminieren, schreibe man die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \operatorname{arcsinh}\frac{75}{a} \quad \text{und} \quad \frac{x+20}{a} = \operatorname{arcsinh}\frac{95{,}128}{a}.$$

Man erhält dann für a die Gleichung

$$a\left(\operatorname{arcsinh}\frac{95{,}128}{a} - \operatorname{arcsinh}\frac{75}{a}\right) = 20.$$

Durch einfaches Probieren mit Hülfe der Tafeln für die Hyperbelfunktionen, aus denen natürlich auch deren Umkehrungen entnommen werden können, läßt sich die Gleichung nicht gut auflösen. Setzt man z. B. $a = 100$, so liefert die linke Seite 15,34, setzt man $a = 500$, so wird sie 19,90 und für $a = \infty$ geht sie erst in 20,128 über. Man weiß also zwar, daß a zwischen 500 und ∞ liegen muß; zu einer genaueren Bestimmung reichen aber wenigstens die gewöhnlich zur Verfügung stehenden vierstelligen Tafeln nicht aus.

Man hilft sich am besten durch eine Reihenentwickelung für arcsinh. Für kleine Werte von x ist nämlich die Reihe

$$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots\cdot$$

sehr schnell konvergent und es genügt gewöhnlich, nur die beiden ersten Glieder beizubehalten. Führt man dies aus, so geht die vorige Gleichung über in

$$20{,}128 - \frac{1}{6}\left(\frac{95{,}128^3}{a^2} - \frac{75^3}{a^2}\right) = 20.$$

Diese läßt sich nach a sofort auflösen und liefert $a = 756{,}0$ m. Nachdem a bekannt ist, findet man leicht auch alle übrigen Größen, nach denen gefragt ist. Zunächst erhält man x aus

$$\sinh\frac{x}{756} = \frac{75}{756} \quad \text{zu} \quad x = 74{,}88 \text{ m}.$$

Die zu x gehörige Ordinate y ist

$$y = 756 \cosh\frac{74{,}88}{756} = 759{,}70 \text{ m}$$

und die zum Aufhängepunkte, d. h. zur Abscisse $x + 20$ gehörige

$$y' = 756 \cosh\frac{94{,}88}{756} = 761{,}97 \text{ m}.$$

Der Unterschied von y' und y gibt die Durchhängung des Seiles in der Mitte an; diese beträgt daher jetzt 2,27 m, wobei freilich die letzte Stelle wegen Verwendung von vierstelligen Tafeln ganz unsicher ist.

Die größte Seilspannung ist nach Gl. (18)

$$S = \gamma y' = 2 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\, 761{,}97 \text{ m} = 1524 \text{ kg}.$$

Nachträglich kann man übrigens, wenn man will, auch noch den Einfluß der elastischen Dehnung des Seiles berücksichtigen, indem man die zu $S =$ rund 1500 kg gehörende elastische Dehnung berechnet und $s' = 95{,}128$ m in der vorhergehenden Rechnung entsprechend größer nimmt. Freilich ist dann die ganze Rechnung noch einmal mit dem neuen Werte von s' zu wiederholen.

Zweite (angenäherte) Lösung von Aufgabe 15. Man achte nicht auf die Krümmung des Seiles, sondern setze die Sehne gleich dem Bogen. Die Sehne ist zwar etwas kleiner als der Bogen; da sich das Seil außerdem aber auch etwas streckt, so ist der Fehler um so geringer anzuschlagen. In Aufgabe 14 war die Bogenlänge des halben Seiles zu 20,128 m gefunden. Sieht man dies nun als Sehne des Kettenlinienbogens an, so erhält man die Durchhängung f nach dem Pythagoräischen Satze

$$f = \sqrt{20{,}128^2 - 20^2} = 2{,}26 \text{ m},$$

also fast genau dasselbe wie vorher. Die Spannung ist im tiefsten Punkte

$$S = \frac{Pl}{4f} = 300 \cdot \frac{40}{9{,}04} = 1330 \text{ kg}.$$

Im höchsten Punkte würde sie sich um etwa $2 \cdot 2{,}26 = 4{,}52$ kg erhöhen. Das ist nun freilich zu niedrig. Das Eigengewicht der Seilstücke trägt, wie der Vergleich der Werte zeigt, verhältnismäßig viel zur Spannung des Seiles bei.

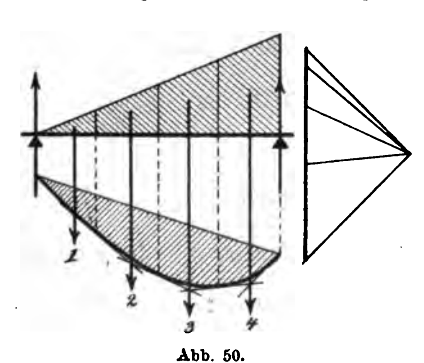


Abb. 50.

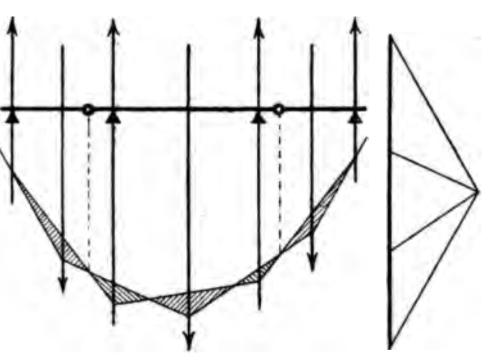
Man kann sich des Näherungsverfahrens auch nur zur Ermittelung von f bedienen und nachdem dies gefunden ist, mit den Kettenlinienbogen weiter rechnen.

16. Aufgabe. Die Belastungsfläche eines Balkenträgers ist ein rechtwinkliges Dreieck; ermittele die zugehörige Momentenfläche! (S. Abb. 50.)

Lösung. Es genügt schon, die ganze Spannweite in vier gleiche Teile zu teilen; will man genauer verfahren, so nimmt man sechs oder acht Teile, aber nicht leicht mehr, da eine Einteilung in noch mehr Teile der

Genauigkeit der Zeichnung kaum noch förderlich wäre. Die Schwerpunkte der Trapeze, in die das Dreieck zerlegt wurde, liegen einerseits sämtlich auf der Schwerlinie des Dreieckes, andererseits liegt jeder auf einer Linie, die wie folgt zu konstruieren ist. Man verlängere nämlich eine der parallelen Seiten des Trapezes nach einer Richtung hin um eine Strecke, die gleich der andern der parallelen Seiten ist und ebenso verlängere man diese um eine Strecke nach der entgegengesetzten Richtung, die gleich der ersten der parallelen Seiten ist. Die Verbindungslinie beider Punkte liefert eine Schwerlinie des Trapezes.

Nachdem man so die Schwerpunkte der Trapeze konstruiert hat, legt man Kräfte durch diese, die den Flächen proportional sind. Im Kräfteplane werden sie durch die mittleren Höhen der Trapeze dargestellt. Dann wählt man einen Pol, zeichnet das zugehörige Seilpolygon und sucht die Berührungspunkte auf, die zwischen diesem und der eingeschriebenen Seilkurve bestehen. Nachher bleibt nur noch übrig, die Seilkurve mit Hülfe des Kurvenlineals oder aus freier Hand einzutragen.


Abb. 51.

17. *Aufgabe. Ein über drei Öffnungen reichender Gerberscher Kragträger trägt gegebene Lasten (Abb. 51); man soll die zugehörige Momentenfläche konstruieren.*

Lösung. Man vereinigt zuerst die gegebenen Lasten durch ein Seilpolygon und trägt in dieses ein System von Schlußlinien ein, die an den Auflagervertikalen aneinander grenzen und auf den Gelenkvertikalen das Seilpolygon durchschneiden. Zwischen diesen Schlußlinien und dem Seileckzuge liegt die Momentenfläche, die in der Abbildung durch Schraffierung hervorgehoben ist und zwar so, daß auch den verschiedenen Vorzeichen der Momente dabei Rechnung getragen ist.

18. *Aufgabe. Ein Wagen von 5 m Radstand und je 5 t Raddruck fährt über einen Balkenträger von 8 m Spannweite; ermittele graphisch die Maximalmomentenfläche (Abb. 52).*

Lösung. Man setzt die zwei Einzellasten durch ein Seilpolygon zusammen, in das man eine Anzahl von Schlußlinien ein-

trägt, die verschiedenen relativen Stellungen des Lastensystems zum Träger entsprechen. Die Momentenflächen sind entweder Dreiecke

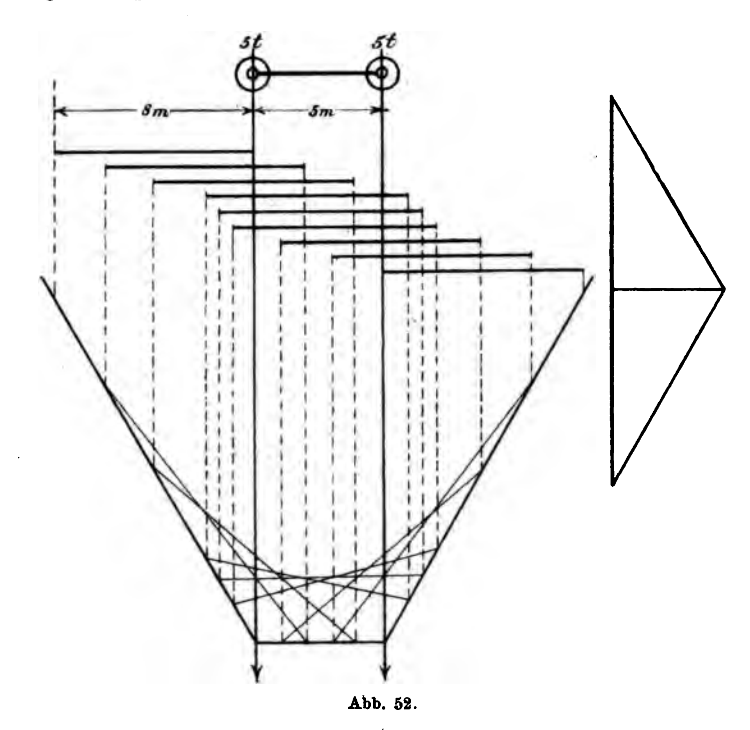


Abb. 52.

(wenn nur eine Last über dem Träger steht) oder Vierecke (wenn beide Lasten über dem Träger stehen). Auf ihre besondere Gestalt kommt es nicht an, sondern nur auf die Abschnitte, die sie auf lotrechten Transversalen bilden. Man trägt nachträglich alle diese Momentenflächen in Abb. 53 von einer gemeinsamen Grundlinie aus ab und sucht die Umhüllungslinie auf. Wie diese ausfällt, ist aus der Abbildung zu entnehmen.

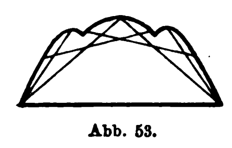


Abb. 53.

19. *Aufgabe. Ein I-Balken vom Normalprofile 30, dessen Trägheitsmoment* $\Theta = 9898$ *cm*^{4} *ist, überbrückt eine Spannweite von 6 m und trägt in der Mitte eine Last von 4000 kg. Man konstruiere die elastische Linie des Balkens, so daß die Abscissen in* $^1/_{100}$ *der natürlichen Größe und die Ordinaten in natürlicher Größe erscheinen (Abb. 54).*

Lösung. Als Horizontalzug für das erste Seilpolygon ist $H_1 = 2000$ kg gewählt. Die Momentenfläche wird ein Dreieck,

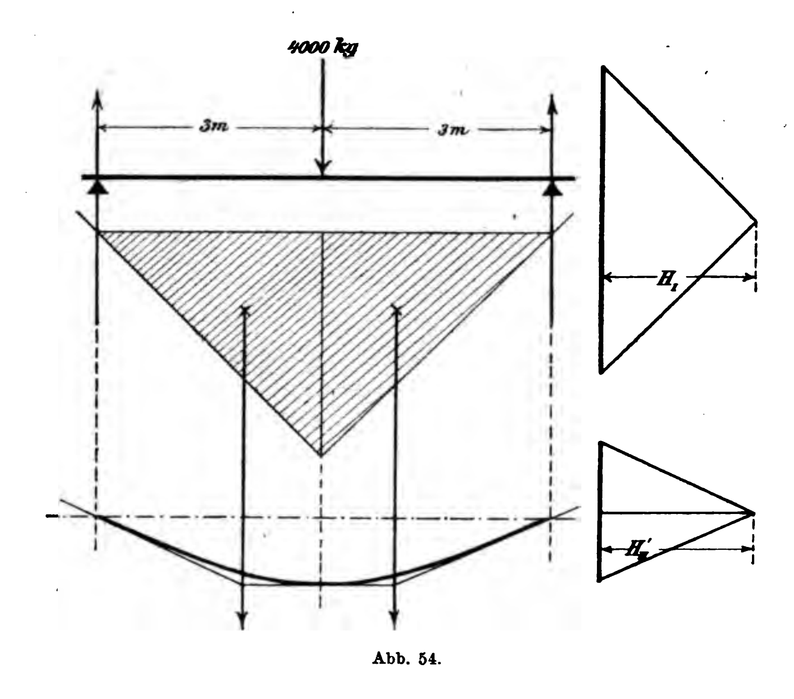


Abb. 54.

das wir nur in zwei Teile zerlegen wollen, die in der Mitte aneinander stoßen. Jeder Teil hat in natürlicher Größe eine Fläche von $\frac{300 \cdot 300}{2}$ oder 45000 cm². — Wird der Elastizitätsmodul zu 2000000 atm angenommen, so erhält man für den Horizontalzug des zweiten Seilpolygons nach Gl. (27), S. 107

$$H_{II} = \frac{E\Theta}{H_I} = \frac{2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9888 \text{ cm}^4}{2000 \text{ kg}} = 9\,888\,000 \text{ cm}^2.$$

Der verlangten 100fachen Verzerrung wegen nehmen wir aber anstatt dessen nur den Horizontalzug

$$H'_{II} = 98\,880 \text{ cm}^2$$

an. Der Kräfteplan zum zweiten Seilpolygone konnte hiernach aufgetragen und das Seilpolygon selbst dazu konstruiert werden.

Als Maßstab wurde 1 mm = 5000 cm^2 gewählt. — Allerdings hat man damit nur einen Punkt, nämlich jenen in der Mitte genau erhalten. Man findet, daß die Durchbiegung an dieser Stelle 0,91 cm beträgt. Oft genügt dies aber schon; im andern Falle steht natürlich nichts im Wege, die Momentenfläche in eine größere Zahl von Teilen einzuteilen, womit man auch eine entsprechend größere Zahl von Punkten der elastischen Linie erhält.

Dritter Abschnitt.

Die Kräfte im Raume.

§ 21. Zurückführung auf ein Kraftkreuz.

Zwei Kräfte, deren Richtungslinien windschief zueinander liegen, lassen sich niemals durch eine einzige Kraft ersetzen. Wenn dagegen beliebig viele Kräfte gegeben sind, die alle windschief zueinander liegen können, vermag man sie — falls sie nicht etwa zufälligerweise im Gleichgewichte miteinander stehen oder einer einzigen Resultierenden gleichwertig sein sollten — stets durch zwei windschief zueinander liegende Kräfte zu ersetzen. Man erkennt daraus, daß der Verein von zwei windschief zueinander liegenden Kräften für die Zusammensetzung von Kräften im Raume eine ähnliche Rolle spielt, wie eine Einzelkraft in der Ebene. Er bildet die einfachste Form, auf die sich jedes gegebene Kräftesystem unter allen Umständen bringen läßt. Aus diesem Grunde ist eine besondere kurze Bezeichnung dafür erwünscht. Wir nennen den Verein von zwei windschiefen Kräften ein Kraftkreuz. Um ein Kraftkreuz vollständig zu beschreiben, muß man daher beide Richtungslinien oder „Wirkungslinien“ und auf jeder von ihnen eine mit Pfeil versehene Strecke angeben, die die Größe der auf ihr enthaltenen Kraft darstellt.

Legt man einer von beiden Kräften des Kraftkreuzes den Wert Null bei, so geht das Kraftkreuz in eine Einzelkraft über; wir können daher, um die möglichen Ausnahmen nicht jedesmal besonders hervorheben zu müssen, eine Einzelkraft

auch als einen besonderen Fall eines Kraftkreuzes auffassen. Ebenso soll es uns freistehen, auch ein Kräftepaar gelegentlich als Sonderfall eines Kraftkreuzes aufzufassen; denn das Kraftkreuz geht in ein Kräftepaar über, sobald wir beide Wirkungslinien parallel zueinander werden lassen und zugleich beide Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet annehmen. In der Regel wird aber, wenn von einem Kraftkreuze die Rede ist, vorausgesetzt, daß keiner von diesen Ausnahmefällen vorliege.

Die Zurückführung eines beliebig gegebenen Kräftesystemes auf ein Kraftkreuz beruht auf der folgenden einfachen Betrachtung. In Abb. 55 stelle K den Umriß des Körpers dar, an dem die Kräfte angreifen und M sei der Angriffspunkt einer dieser Kräfte, die mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet sei. Die übrigen Kräfte, die in der Zeichnung weggelassen sind, denke man sich an beliebigen Angriffspunkten und in beliebiger Größe und Richtung hinzu. Man wähle ferner einen Punkt A und eine Ebene ε beliebig aus, jedenfalls aber so, daß A nicht in ε liegt. Dann lege man von A aus eine Ebene π durch die Kraft $\mathfrak{P}$, durch die, wie wir sagen können, $\mathfrak{P}$ von A als Projektionszentrum aus projiziert wird. Auch durch jede andere der gegebenen Kräfte denke man sich eine solche projizierende Ebene gelegt. Diese Ebenen schneiden im allgemeinen die Ebene ε und die Schnittlinie geht durch jenen Punkt M', in dem die Richtungslinie von $\mathfrak{P}$ die Ebene ε durchstößt. Von den Ausnahmefällen, die hier möglich sind, sei zunächst abgesehen, da sie nachher besonders besprochen werden sollen.

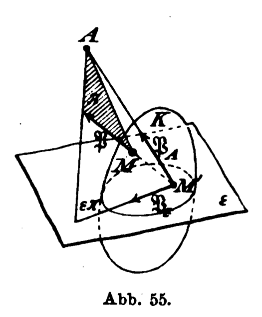


Abb. 55.

Nun verschiebe man den Angriffspunkt von $\mathfrak{P}$ nach dem in der Ebene ε liegenden Punkte M' und zerlege $\mathfrak{P}$ in zwei Kräfte $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{P}_\varepsilon$, von denen die erste längs der Verbindungslinie $M'A$, die zweite längs der Schnittlinie $\varepsilon\pi$ geht. Diese Zerlegung ist ohne weiteres ausführbar, da alle drei Richtungslinien in der Ebene π enthalten sind.

Nachdem die gleiche Zerlegung auch mit allen übrigen gegebenen Kräften vorgenommen ist, haben wir doppelt soviel Kräfte als zu Anfang. Hiervon geht aber die eine Hälfte durch den Punkt A, während die andere in der Ebene ε enthalten ist. Wir können die erste Gruppe ohne weiteres durch eine Resultierende $\mathfrak{R}_A$ ersetzen und auch die in der Ebene ε liegenden liefern im allgemeinen eine Resultierende $\mathfrak{R}_\varepsilon$, die nach den früher besprochenen Regeln gefunden werden kann. Hierbei kann zwar der Ausnahmefall vorkommen, daß die Kräfte in der Ebene ε ein Kräftepaar liefern; wenn wir dieses aber als eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft deuten, braucht davon nicht besonders gesprochen zu werden. — Jedenfalls sind nach Ausführung der Zusammensetzung die gegebenen Kräfte vollständig durch das Kraftkreuz der Kräfte $\mathfrak{R}_A$ und $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ersetzt, wobei es freilich vorkommen kann, daß eine der beiden Kräfte eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft ist, oder daß auch eine von beiden ganz verschwunden ist, nämlich dann, wenn zufällig die durch den Punkt A gehenden oder die in der Ebene ε liegenden Kräfte im Gleichgewichte miteinander gestanden haben sollten.

Was nun die Ausnahmefälle anbelangt, von denen vorher schon die Rede war, so kann es zunächst vorkommen, daß eine der Kräfte $\mathfrak{P}$ zur Ebene ε parallel ist. Im allgemeinen wird auch dann noch die projizierende Ebene π die Ebene ε längs einer Geraden $\varepsilon\pi$ schneiden, die dann zur Richtung von $\mathfrak{P}$ parallel ist. In diesem Falle ziehe man auch durch A eine Gerade, die zu jenen beiden parallel ist und zerlege $\mathfrak{P}$ in der Ebene π in zwei parallele Kräfte, von denen eine durch A geht, während die andere in die Schnittlinie $\varepsilon\pi$ fällt. Diese Aufgabe läßt sich nach den Lehren des vorigen Abschnittes stets ohne weiteres lösen. Hiermit ist aber gerade so wie im früheren Falle $\mathfrak{P}$ in zwei Kräfte zerlegt, von denen eine durch A geht, während die andere in ε liegt.

Nun kann es freilich vorkommen, daß auch die projizierende Ebene π parallel zu ε wird. Die Schnittgerade $\varepsilon\pi$ fällt dann mit der unendlich fernen Geraden der Ebene ε zusammen

und die Kraft $\mathfrak{P}$ ist in eine durch A gehende Kraft, die mit $\mathfrak{P}$ gleich groß und gleich gerichtet ist und in eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft zu zerlegen, deren Richtungslinie mit der unendlich fernen Geraden der Ebenen ε und π zusammenfällt, zu zerlegen. Wenn man die Benutzung der unendlich fernen Elemente zur Durchführung der Betrachtung nicht scheut, ist daher auch in diesem Falle die verlangte Zerlegung von $\mathfrak{P}$ sofort ausgeführt. Anstatt dessen kann man auch sagen, daß bei der Parallelverlegung von $\mathfrak{P}$ nach A ein Kräftepaar auftritt, dessen Ebene parallel zu ε ist und das nachträglich in die Ebene ε verschoben werden kann. Dann ist $\mathfrak{P}$ durch eine Einzelkraft am Punkte A und ein Kräftepaar in der Ebene ε ersetzt. — Die fernere Zusammensetzung der Kräfte am Punkte A und in der Ebene ε kann aber auf jeden Fall genau so erfolgen, als wenn diese besonderen Lagen gar nicht vorgekommen wären.

§ 22. **Zusammensetzung von Kräftepaaren.**

Von den Eigenschaften der Kräftepaare war schon früher, namentlich im ersten Bande, wiederholt die Rede. Hier wird es aber nötig, das Wichtigste davon noch einmal zusammenzustellen und die Betrachtungen zugleich soweit zu ergänzen, als erforderlich ist, um den Gegenstand vollständig zu erledigen.

Abb. 56.

Zunächst erinnere ich daran, daß als graphische Darstellung eines Kräftepaares das Parallelogramm betrachtet werden kann, von dem zwei gegenüberliegende Seiten die beiden Kräfte des Paares angeben (vgl. Abb. 56). Wählt man irgend einen Punkt in der Ebene des Kräftepaares als Momentenpunkt, so ist das Moment des Kräftepaares — worunter man die Summe der Momente beider Kräfte versteht — stets gleich groß und der Wert dieses Momentes wird durch den Flächeninhalt des Parallelogramms angegeben. Das Vorzeichen des Momentes folgt zugleich aus dem Umlaufssinne, der durch die Pfeile beider Kräfte bestimmt ist.

Wir wollen uns nun überlegen, welche Veränderungen man mit dem Kräftepaare und mit seinem sichtbaren Ausdrucke, dem Parallelogramme, vornehmen darf, ohne an dem Verhalten des Körpers, an dem es angreift, etwas zu ändern. Ohne weiteres folgt zunächst, daß das Parallelogramm beliebig innerhalb seines Parallelstreifens verschoben werden darf, so lange nur die beiden Grundlinien, die die Kräfte darstellen, hierbei ihre Längen und das Parallelogramm selbst daher seinen Inhalt nicht ändern. An Stelle des Parallelogramms I in Abb. 57 kann also ohne weiteres das Parallelogramm II genommen werden. Dies folgt nämlich sofort aus dem Satze von der Verschiebung des Angriffspunktes, indem II aus I durch bloße Verschiebungen der Angriffspunkte beider Kräfte des Paares längs ihrer Richtungslinien hervorgeht.

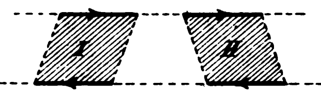


Abb. 57.

Ferner kann man innerhalb des Parallelogramms eine Vertauschung jener Seiten vornehmen, die man als Darstellungen der beiden Kräfte des Paares betrachtet. Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich aus Abb. 58. In dieser sei zunächst das Kräftepaar der Kräfte 1 und 1′ gegeben. Man füge ihnen zwei neue Kräfte 2 und 2′ zu, die sich gegenseitig aufheben und von denen jede so groß ist, wie es der Diagonale des Parallelogramms entspricht, mit der ihre Richtungslinien zusammenfallen. Setzt man nun 1 und 2 zu einer Resultierenden 3 zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt ihrer Richtungslinien und Größe und Richtung ergibt sich durch geometrische Summierung aus 1 und 2. Es ist nicht nötig, dazu ein besonderes Kräftedreieck zu zeichnen, da schon innerhalb des vorhandenen Parallelogramms ein Dreieck vorkommt, von dem eine Seite die Kraft 1, die andere die Kraft 2 darstellt. Die dritte Seite gibt daher Größe und Richtung der Resultierenden 3 an und man erkennt, daß diese Kraft durch die mit der Ziffer 3 be-

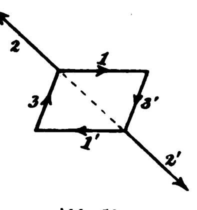


Abb. 58.

zeichnete Parallelogrammseite schon vollständig nach Größe, Richtung und Lage dargestellt ist. Hierbei ist nur der Angriffspunkt auf den nächsten Eckpunkt des Parallelogramms längs der Richtungslinie zurückverlegt. Ebenso geben die Kräfte 1′ und 2′ die durch die Parallelogrammseite 3′ dargestellte Resultierende.

Damit ist aber der Satz bewiesen, denn in der Tat ist gezeigt, daß das Kräftepaar aus 1 und 1′ durch Zufügung der beiden sich gegenseitig aufhebenden Kräfte 2 und 2′ in das Kräftepaar aus 3 und 3′ übergeführt werden kann, das demnach mit dem vorigen gleichwertig ist. Es ist daher gar nicht nötig, beim Auftragen eines Parallelogramms zur Darstellung eines Kräftepaares genauer anzugeben, welches Paar Gegenseiten die Kräfte des Paares bezeichnen soll; man kann es vielmehr dem freien Belieben anheimstellen, welches Paar dazu gewählt werden soll, wenn nur der Umlaufssinn, der durch die Aufeinanderfolge der Pfeile bedingt ist, näher bezeichnet wird, was etwa durch Beifügung eines Drehpfeiles geschehen kann.

Durch eine bekannte planimetrische Konstruktion läßt sich ein Parallelogramm in ein anderes verwandeln, das gleichen Inhalt hat und dessen Grundlinie daher in demselben Verhältnisse verkleinert, als die Höhe vergrößert ist (oder umgekehrt). Betrachtet man beide Parallelogramme als Darstellungen von Kräftepaaren von gleichem Umlaufssinne, so sind auch beide Kräftepaare gleichwertig miteinander, so daß sich das eine durch das andere ersetzen läßt. Der Beweis folgt aus Abb. 59. Man hat zunächst das Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seiten DA und BC die Kräfte 1 und 2 des ursprünglich gegebenen Kräftepaares darstellen. Nachdem das inhaltsgleiche Parallelogramm $AEFG$ konstruiert ist, denke man sich die Kraft 2 in zwei parallele Komponenten 3 und 4 zerlegt, von denen eine auf die Grundlinie AG oder AD, die andere auf die Gegenseite EF fällt. Die Summe aus den

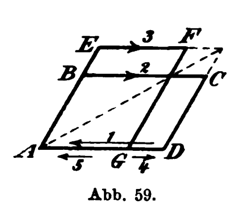


Abb. 59.

Kräften 3 und 4 muß gleich 2 sein und außerdem muß für einen auf 2 liegenden Momentenpunkt das Moment von 3 gleich groß und entgegengesetzt gerichtet dem Momente von 4 sein. Daraus folgt, daß die gesuchte Kraft 3 durch die Strecke EF und die Kraft 4 durch die Strecke GD dargestellt wird.

Nachdem 2 zerlegt ist, kann man 1 und 4, die auf dieselbe Gerade fallen, zu einer Resultierenden vereinigen, die mit 5 bezeichnet werden mag. Da 1 und 4 entgegengesetzten Pfeil haben, ist 5 gleich der Differenz von beiden und wird durch die Strecke GA dargestellt. Hiermit sind die ursprünglich gegebenen Kräfte 1 und 2 vollständig durch die Kräfte 3 und 5 ersetzt. Die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$ dargestellten Kräftepaare sind also in der Tat gleichwertig miteinander.

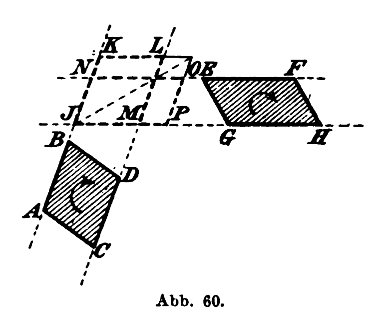


Abb. 60.

Schließlich läßt sich noch zeigen, daß zwei Kräftepaare, die durch irgend zwei in derselben Ebene liegende Parallelogramme dargestellt werden, falls diese nur gleichen Inhalt haben und zu demselben Umlaufssinne gehören, gleichwertig miteinander sind. In Abb. 60 seien $ABCD$ und $EFGH$ die inhaltsgleichen Parallelogramme. Man verschiebe zunächst $ABCD$ innerhalb des Parallelstreifens in die Lage $JKLM$; dann forme man um auf $JNOP$. Dieses Parallelogramm läßt sich aber, da es mit $EFGH$ gleichen Inhalt haben soll und mit ihm in demselben Parallelstreifen liegt, durch $EFGH$ ersetzen und hiermit ist in der Tat nachgewiesen, daß die durch die Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ dargestellten Kräftepaare gleichwertig miteinander sind.

Ein Kräftepaar kann daher in seiner Ebene beliebig verschoben und zugleich sonst umgeformt werden, solange nur das statische Moment weder dem Werte noch dem Vorzeichen nach geändert wird. Es genügt daher zur Darstellung des Kräftepaares auch, irgendwo in der Ebene eine Normale nach

jener Seite hin zu ziehen, von der aus gesehen das Kräftepaar eine Drehung im Uhrzeigersinne hervorzubringen sucht und die Größe des Momentes auf dieser Normalen in irgend einem Maßstabe abzutragen. Dabei ist als besondere Eigentümlichkeit dieses Momentenvektors, die aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, hervorzuheben, daß dieser beliebig parallel zu sich verschoben werden darf. In dieser Hinsicht steht er durchaus im Gegensatze zu jener Strecke, durch die man eine Einzelkraft darstellt. Diese darf keineswegs, oder wenigstens nicht ohne einen anderweitigen Ausgleich parallel zu sich verschoben werden, während beim Momentenvektor die Verschiebung ohne weiteres und ohne jede Kompensation zulässig ist.

Ein Kräftepaar kann ferner auch in eine parallele Ebene verschoben werden. Um sich hiervon zu überzeugen, betrachte man Abb. 61. In der Ebene α sei das aus den Kräften 1 und 2 gebildete Kräftepaar gegeben. Man ziehe irgend eine zu α parallele Ebene β und projiziere das Parallelogramm 1, 2 durch rechtwinklige Projektionsstrahlen auf β; die Projektion liefert das Parallelogramm 5, 6. Dann lege man in dem hierbei entstehenden Parallelepiped die Diagonalebenen durch 1 und 5 und durch 2 und 6 und suche deren Schnittlinie auf, die in der Mitte zwischen α und β verläuft. Nach diesen Vorbereitungen bringe man zwei neue Kräfte 3 und 4 an dem Körper an, die sich gegenseitig aufheben und deren Richtungslinien mit der vorher ermittelten Schnittlinie zusammenfallen. Jede dieser beiden Kräfte sei doppelt so groß, als eine der Kräfte 1 oder 2. An Stelle des Kräftepaares 1, 2 tritt jetzt der Verein der vier Kräfte 1, 2, 3, 4. Diese kann man nun in geeigneter Weise zusammenfassen. Wir bilden zunächst die Resultierende aus 1 und 3. Da beide Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind und 3 doppelt so groß ist, als 1, ist die Resultierende gleich gerichtet mit 3 und so groß wie 1 oder 2. Dabei liegt sie außerhalb des aus den

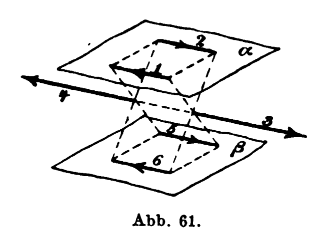


Abb. 61.

Richtungslinien von 1 und 3 gebildeten Parallelstreifens nach der Seite der größeren Kraft hin, in solchem Abstande, daß für einen auf 3 gelegenen Momentenpunkt das Moment der Resultierenden gleich dem Momente von 1 ist. Daraus folgt, daß die Resultierende aus 1 und 3 durch die mit 5 bezeichnete, in der Ebene β enthaltene Strecke dargestellt wird. Ebenso liefern 2 und 4 die durch die Strecke 6 dargestellte Resultierende.

Nach Ausführung dieser Zusammensetzungen sind die Kräfte 1, 2, 3, 4 und daher auch das ursprünglich gegebene Kräftepaar 1, 2 durch das Kräftepaar 5, 6 ersetzt. Das Parallelogramm 5, 6 bildet aber die Projektion des Parallelogramms 1, 2 auf die Ebene β und damit ist bewiesen, daß das Kräftepaar 1, 2 ohne weitere Änderung auch in die beliebig angenommene parallele Ebene β verschoben werden darf. Nachträglich können natürlich auch mit dem Kräftepaare 5, 6 innerhalb der Ebene β wieder alle jene Verschiebungen und Umformungen vorgenommen werden, von denen vorher die Rede war.

Hieraus folgt zugleich auch, daß der Momentenvektor eines Kräftepaares nicht nur, wie wir vorher sahen, parallel zu sich selbst, sondern zugleich auch längs seiner eigenen Richtungslinie beliebig verschoben werden darf. Man kann daher alles, was bisher von den Kräftepaaren bewiesen wurde, auch dahin zusammenfassen, daß das Kräftepaar durch Angabe des Momentenvektors bereits vollständig beschrieben wird und daß dieser Vektor ein völlig freier Vektor ist, der an jedem beliebig gewählten Punkte angeheftet werden kann. Es kommt bei ihm gar nicht auf die Lage, sondern nur auf seine Größe und seine Richtung an. Der Vektor, durch den eine Einzelkraft dargestellt wird, kann im Gegensatze zum Momentenvektor nur längs seiner Richtungslinie und nicht parallel dazu verschoben werden; bei ihm kommt es nicht nur auf Richtung und Größe, sondern auch auf die Lage der Richtungslinie an. Um diesen Unterschied in anschaulicher Sprache hervorzuheben, bezeichnet man die Einzelkraft als einen linienflüch-

tigen Vektor im Gegensatze zu dem völlig freien Vektor, der ein Kräftepaar darstellt.

Sind zwei Kräftepaare gegeben, die entweder in derselben Ebene oder in zwei parallelen Ebenen liegen, so schiebe man sie zunächst in dieselbe Ebene, stelle jedes durch ein Parallelogramm dar, so daß die Seiten in beiden parallel laufen und die Grundlinien gleich groß sind und lege die Parallelogramme mit einer gemeinsamen Grundlinie nebeneinander oder aufeinander, aber so jedenfalls, daß die gemeinsame Grundlinie im einen Parallelogramme eine Kraft von entgegengesetztem Pfeile wie im andern Parallelogramme bedeutet. Von den vier Kräften heben sich dann die beiden aufeinander gelegten gegenseitig auf und die beiden andern bilden ein neues Kräftepaar, das die Resultierende der beiden gegebenen Kräftepaare bildet. Hatten beide Kräftepaare gleichen Drehsinn, so liegen ihre Flächen nebeneinander und das Parallelogramm des resultierenden Kräftepaares ist gleich der Summe aus den Flächen der Parallelogramme der einzelnen Kräftepaare. War der Umlaufssinn entgegengesetzt, so tritt an die Stelle der Summe die Differenz der Flächen.

Man kann diese einfache Betrachtung auch dahin zusammenfassen, daß der Momentenvektor des resultierenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der gegebenen Kräftepaare ist. Bei gleichem Umlaufssinne sind beide Momentenvektoren gleich gerichtet und ihre geometrische Summe ist gleich der numerischen Summe aus beiden, also gleich der durch einfaches Zusammenzählen der Momentenbeträge gebildeten Summe. Bei entgegengesetztem Umlaufssinne sind die Momentenvektoren entgegengesetzt gerichtet und ihre geometrische Summe wird durch die Differenz der absoluten Beträge angegeben. — Diese Betrachtungen bleiben natürlich auch noch anwendbar, wenn mehr als zwei Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen zu einer Resultierenden vereinigt werden sollen.

Um zwei Kräftepaare zusammenzusetzen, die in verschiedenen Ebenen liegen, kann man sich des durch Abb. 62

dargestellten Verfahrens bedienen. Das Kräftepaar in der Ebene α sei durch das Parallelogramm 1, 2 zur Darstellung gebracht, von dem die Grundlinie 2 mit der Schnittlinie $\alpha\beta$ beider Ebenen zusammenfällt. Auf gleiche Art führe man auch das in der Ebene β liegende Kräftepaar auf ein Parallelogramm 3, 4 zurück, von dem eine Seite 3 in die Schnittlinie $\alpha\beta$ fällt. Wir können es dabei so einrichten, daß beide Parallelogramme gleiche Grundlinien haben und daß sie mit einer gemeinschaftlichen Seite in der Schnittlinie $\alpha\beta$ aneinander grenzen. Ferner sollen auch beide so aneinander geschoben sein, daß die gemeinschaftliche Seite in beiden Parallelogrammen Kräfte von entgegengesetztem Pfeile darstellt. Dies läßt sich immer leicht erreichen; denn sollten etwa 2 und 3 nicht, wie in Abb. 62 angenommen ist, von entgegengesetztem, sondern von gleichem Pfeile sein, so brauchte man nur die Ebene β über die Schnittlinie $\alpha\beta$ hinaus zu verlängern und das Parallelogramm 3, 4 in die Verlängerung zu schieben, so daß nachher 4 sich mit 2 deckte. Diese wären dann von entgegengesetztem Pfeile und die Figur würde sich von Abb. 62 nur dadurch unterscheiden, daß das, was jetzt in einem der zwischen den Ebenen α und β gebildeten Keile gezeichnet ist, sich nachher in dem Nebenkeile abspielte.

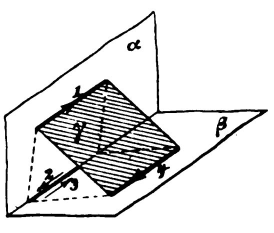


Abb. 62.

Die zum Zusammenfallen gebrachten Kräfte 2 und 3 heben sich gegenseitig auf und es bleiben nur noch die Kräfte 1 und 4 übrig, die ein Kräftepaar miteinander bilden, das die Resultierende aus den Kräftepaaren 1, 2 und 3, 4 ausmacht. Das resultierende Kräftepaar liegt in einer neuen Ebene γ, die von α und β verschieden ist; es wird durch das durch Schraffierung hervorgehobene Parallelogramm dargestellt. Nachträglich kann man natürlich das Parallelogramm in der Ebene γ wieder beliebig umformen oder es auch in eine zu γ parallele Ebene verschieben, wenn man nur darauf achtet, daß der Momentenvektor dabei nach Größe und Richtung unverändert bleibt.

Um den Zusammenhang zu erkennen, der zwischen den Momentenvektoren der drei Kräftepaare besteht, fertigen wir in Abb. 63 eine neue Zeichnung an, die als rechtwinklige Projektion auf eine zur Schnittlinie $\alpha\beta$ senkrechte Ebene zu betrachten ist. Die drei Parallelogramme projizieren sich als Abschnitte auf den Spuren der Ebenen α, β, γ. Da die drei Parallelogramme gleiche Grundlinien hatten, verhalten sich ihre Flächen oder die von ihnen dargestellten Momente wie die Seiten des von den Spuren α, β, γ gebildeten Dreieckes. Die Momentenvektoren der drei Kräftepaare seien mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet; sie liegen in der Ebene der Abb. 63 und können in dieser ohne weiteres aufgetragen werden. Der Momentenvektor $\mathfrak{B}$ des Kräftepaares in der Ebene β steht rechtwinklig zu β und ist, wie aus dem Vergleiche mit Abb. 62 ohne weiteres folgt, mit dem Pfeile senkrecht nach oben gerichtet. Der Maßstab, in dem die Momentenvektoren aufgetragen werden sollen, kann nach Belieben gewählt werden. Da wir schon wissen, daß sich die Momente jedenfalls wie die Seiten des Dreieckes α, β, γ verhalten, ist es am einfachsten, die Strecke $\mathfrak{B}$ gleich der auf β liegenden Dreieckseite zu machen. Auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ sind dann gleich den Abschnitten auf α und γ zu setzen. Der Momentenvektor $\mathfrak{A}$ des in der Ebene α liegenden Kräftepaares hat, wie aus Abb. 62 hervorgeht, einen dort dem Beschauer zugewendeten Pfeil. Hiernach ist auch der Pfeil von $\mathfrak{A}$ in Abb. 63 gewählt und zwar ist die Strecke so angetragen, daß die Pfeile von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufeinander folgen. Nachdem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgetragen sind, verbinde man ihre Endpunkte miteinander. Man erhält dann ein Dreieck, das mit dem Dreiecke α, β, γ kongruent ist, da es mit ihm in zwei Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel übereinstimmt. Hieraus folgt, daß auch die dritte Seite gleich lang mit dem Abschnitte auf γ ist und daß beide ebenso wie die andern einander entsprechen-

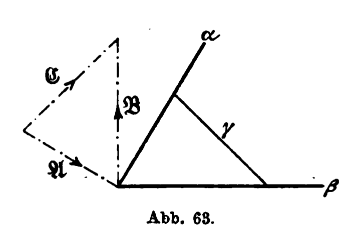


Abb. 63.

den Seiten rechtwinklig zueinander stehen. Die dritte Seite gibt daher den Momentenvektor 𝔈 an. Der Pfeil von 𝔈 folgt wieder aus dem Vergleiche mit der Übersichtszeichnung in Abb. 62.

Hiermit ist bewiesen, daß der Momentenvektor des resultierenden Kräftepaares gleich der geometrischen Summe der Momentenvektoren der beiden gegebenen Kräftepaare ist. Wir sind damit zu dem einfachsten Verfahren gelangt, dessen man sich zur Vereinigung beliebig gegebener Kräftepaare bedienen kann. Man stellt alle gegebenen Kräftepaare durch ihre Momentenvektoren dar und bildet aus diesen die geometrische Summe. Der resultierende Vektor gibt ohne weiteres das resultierende Kräftepaar an. Zugleich erkennt man, daß sich beliebig gegebene Kräftepaare stets durch ein einziges Kräftepaar ersetzen lassen. Ist die geometrische Summe der Momentenvektoren gleich Null, so stehen die Kräftepaare im Gleichgewichte miteinander.

Ich bemerke schließlich noch, daß man durch analytische Beweisführung auf Grund des Momentensatzes die vorhergehenden Betrachtungen freilich erheblich abkürzen kann; ich halte es aber für nützlicher, diese Untersuchung mit den einfachsten Hülfsmitteln, deren man sich beim Zusammensetzen von Kräften bedienen kann, folgerecht, wenn auch vielleicht etwas weitschweifig, durchzuführen. Man wird dadurch mit dem Gegenstande genauer vertraut, als wenn man sich damit begnügt, die letzten Folgerungen, zu denen wir gelangten, als Behauptungen aufzustellen, die mit Hülfe des Momentensatzes bewiesen werden.

§ 23. Gleichwertigkeit von Kraftkreuzen.

Wir kehren jetzt zu den Untersuchungen in § 21 zurück. Um ein beliebig gegebenes Kräftesystem auf ein Kraftkreuz zurückzuführen, wählten wir einen Punkt A und eine Ebene ε beliebig aus und zerlegten dann alle Kräfte so, daß eine Komponente durch A ging, während die andere in ε lag. Dadurch gelangten wir schließlich zu einem Kraftkreuze, dessen eine

Kraft ebenfalls durch den beliebig gewählten Punkt A ging, während die andere in der beliebig gewählten Ebene ε enthalten war.

Hieraus folgt, daß man ein gegebenes System von Kräften nicht nur auf ein einziges Kraftkreuz zurückführen kann, sondern daß man, je nach anderer Wahl des Punktes A und der Ebene ε, unendlich viele Kraftkreuze konstruieren kann, die alle das gegebene Kräftesystem ersetzen und die daher auch alle untereinander gleichwertig sind. Hierbei mag noch bemerkt werden, daß zwei Kraftkreuze oder überhaupt zwei Kräftesysteme als „gleichwertig" bezeichnet werden, wenn sich das eine durch das andere am starren Körper vollständig ersetzen läßt, so daß es für das Verhalten des Körpers gleichgültig ist, ob das eine oder das andere an ihm angreift. Eine Einzelkraft, die gegebenen Kräften gleichwertig ist, bezeichnet man als deren Resultierende. Man kann aber nicht wohl ein Kraftkreuz, das gegebene Kräfte ersetzt, als ein resultierendes Kraftkreuz bezeichnen, weil es nicht nur eines, sondern sehr viele gibt, die derselben Bedingung genügen. Deshalb gebraucht man in allen solchen Fällen besser das Wort „gleichwertig".

Wenn zwei Kräftesysteme gleichwertig miteinander sind und man kehrt im einen von ihnen die Pfeile aller Kräfte um, so hält es, wenn es nachher mit dem andern zugleich an einem starren Körper angebracht wird, mit diesem Gleichgewicht. Denn das andere Kräftesystem ist ihm nach Voraussetzung gleichwertig, solange die Pfeile noch nicht umgekehrt sind. Wir haben daher, wenn wir diesen Ersatz eintreten lassen, das eine Kräftesystem mit den ursprünglichen Pfeilen und zugleich auch dasselbe Kräftesystem mit den umgekehrten Pfeilen vor uns und in beiden heben sich je zwei zur selben Richtungslinie gehörige Kräfte gegeneinander fort, so daß in der Tat Gleichgewicht bestehen muß. Der Fall des Gleichgewichtes zwischen verschiedenen Kräftesystemen wird daher schon sofort mit erledigt, sobald wir nur die Gleichwertigkeit näher untersuchen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß die vorher beliebig gewählte Ebene ε nun durch eine andere Ebene ε' ersetzt werde, während der Punkt A seine frühere Lage behalten soll. Anstatt das frühere Verfahren für diesen Fall ganz von neuem durchzuführen, können wir sofort von dem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ausgehen, das die gegebenen Kräfte ersetzt. Die Kraft $\mathfrak{R}_A$ geht bereits durch den vorgeschriebenen Punkt A und es bleibt uns daher nur übrig, die Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen eine durch A geht, während die andere in der Ebene ε' enthalten ist. Diese Zerlegung, die genau nach der früher dafür gegebenen Vorschrift ausgeführt werden kann, wird durch Abb. 64 dargestellt. Man projiziert $\mathfrak{R}_\varepsilon$ von A aus durch die mit α bezeichnete Ebene, verlegt den Angriffspunkt von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ nach der Schnittlinie der Ebenen ε und ε' und zerlegt dort $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in der Ebene α längs der durch A gehenden Linie und längs der Schnittlinie $\alpha\varepsilon'$. Die letzte Komponente liefert unmittelbar die Kraft $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ des neuen Kraftkreuzes, während die andere Komponente am Punkte A mit $\mathfrak{R}_A$ zur zweiten Kraft dieses Kraftkreuzes zu vereinigen ist. In der Abbildung ist dies nicht weiter ausgeführt.

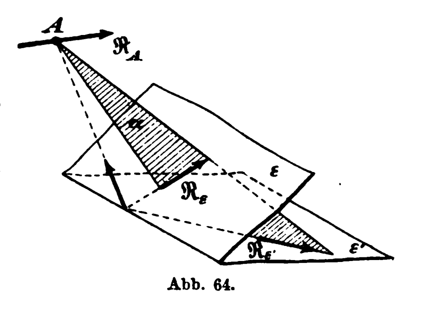


Abb. 64.

Als Hauptresultat dieser Betrachtung wollen wir uns merken, daß die Kraft $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ des neuen Kraftkreuzes, wie nun auch die Ebene ε' gewählt werden möge, jedenfalls in der Ebene α enthalten sein muß, in der sich $\mathfrak{R}_\varepsilon$ von A aus projiziert. Geht also die eine Kraft eines Kraftkreuzes, das einem gegebenen Kräftesysteme gleichwertig ist, durch einen beliebig vorgeschriebenen Punkt A, so muß die andere auf jeden Fall in einer dem Punkte A zugeordneten und durch ihn hindurchgehenden Ebene α enthalten sein.

Ferner sei angenommen, daß der Punkt A durch irgend

einen anderen Punkt A' ersetzt werden soll, während die Ebene ε beibehalten wird. Wir können auch in diesem Falle von dem früheren Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ ausgehen und haben nur $\mathfrak{R}_A$ von A' aus in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine durch A' geht, während die andere in ε liegt. Wir projizieren $\mathfrak{R}_A$ von A' aus durch eine Ebene, die keine besondere Bezeichnung erhalten hat, in Abb. 65 aber durch stückweise Schraffierung hervorgehoben ist. Dann verlegen wir den Angriffspunkt von $\mathfrak{R}_A$ nach dem Punkte E, in dem $\mathfrak{R}_A$ die Ebene ε trifft. An diesem Punkte wird $\mathfrak{R}_A$ in eine Komponente zerlegt, die durch A' geht, während die andere in der Ebene ε liegt. Die erste Komponente liefert unmittelbar $\mathfrak{R}_{A'}$, während die andere mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zur zweiten Kraft des neuen Kraftkreuzes, die in der Ebene ε liegt, zu vereinigen ist.

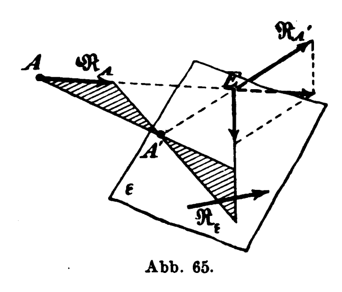


Abb. 65.

Auch von dieser Betrachtung ist ein Umstand besonders hervorzuheben. Solange nämlich die Ebene ε festgehalten wird, muß die andere Kraft des Kraftkreuzes, wohin man auch den Punkt A' verlegen möge, jedenfalls durch den Punkt E gehen, in dem $\mathfrak{R}_A$ die Ebene ε traf. Liegt also die eine Kraft eines Kraftkreuzes, das einem gegebenen Kräftesysteme gleichwertig ist, in einer beliebig vorgeschriebenen Ebene ε, so muß die andere auf jeden Fall durch einen der Ebene zugeordneten und in ihr enthaltenen Punkt E hindurchgehen.

Man erkennt aus den vorausgehenden Betrachtungen bereits, daß man bei einem gegebenen Kräftesysteme nicht nur einen bestimmten Punkt A vorschreiben kann, durch den die eine Kraft des Kraftkreuzes gehen soll, sondern, daß auch noch unendlich viele durch diesen Punkt gehende Richtungslinien möglich sind, mit denen diese Kraft zusammenfallen kann, je nach der Wahl, die man für die Ebene ε trifft. Ebenso kann man nicht nur verlangen, daß eine Kraft des Kraftkreuzes in

einer beliebig gewählten Ebene ε liegen soll, sondern innerhalb dieser Ebene sind auch noch unendlich viele Richtungslinien für diese Kraft möglich, je nach der uns frei stehenden Wahl des Punktes A. Hierdurch werden wir zu der Vermutung geführt, daß die Richtungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes überhaupt ganz beliebig vorgeschrieben werden darf. Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, ob diese Vermutung begründet ist.

In Abb. 66 sei l die für die eine Kraft des Kraftkreuzes vorgeschriebene Richtungslinie. Wir wählen einen Punkt A beliebig auf l aus und legen irgend eine Ebene ε. Dann fassen wir die gegebenen Kräfte zunächst auf gewöhnliche Art zu einem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zusammen. Nachdem dies geschehen ist, legen wir durch $\mathfrak{R}_A$ und die gegebene Gerade l eine Ebene, die in Abb. 66 durch Schraffierung kenntlich gemacht ist. Wir suchen den Schnittpunkt M dieser Ebene mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ auf und verbinden M mit A. Hierauf zerlegen wir $\mathfrak{R}_A$ innerhalb der schraffierten Ebene in zwei Komponenten, von denen eine mit l, die andere mit der Verbindungslinie AM zusammenfällt. Die erste Komponente ist die eine Kraft des verlangten Kraftkreuzes, die andere kann im Punkte M mit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ zu einer Resultierenden vereinigt werden, die die zweite Kraft des Kraftkreuzes darstellt.

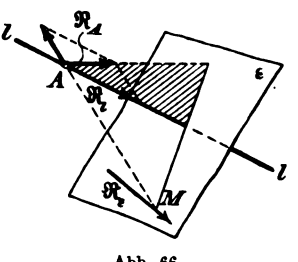


Abb. 66.

Im allgemeinen kann hiernach für die eine Kraft des Kraftkreuzes, zu dem sich ein gegebenes Kräftesystem zusammenfassen läßt, die Wirkungslinie beliebig vorgeschrieben werden. Damit ist dann sowohl die Lage der andern Wirkungslinie, als auch Größe und Pfeil für beide Kräfte des Kraftkreuzes eindeutig bestimmt.

Hierbei ist aber ein Ausnahmefall besonders hervorzuheben. Daß die durch l und $\mathfrak{R}_A$ gelegte Ebene möglicher-

weise parallel zu $\mathfrak{R}_\varepsilon$ geht, so daß der Schnittpunkt M ins Unendliche fällt, kommt hierbei freilich nicht in Betracht; denn durch diese besondere Lage von M wird die sinngemäße Ausführung der vorher beschriebenen Konstruktionen keineswegs gehindert. Auch wenn etwa $\mathfrak{R}_A$ zufälligerweise von vornherein in die Richtung von l fallen sollte, ändert sich nichts Wesentliches. Man erspart dann nur die weitere Zerlegung von $\mathfrak{R}_A$ und hat schon im ersten Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_\varepsilon$ das verlangte gefunden. Wesentlich geändert und geradezu unmöglich gemacht wird aber die Ausführung der Konstruktion, wenn zufälligerweise die Richtungslinie von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ die gegebene Gerade l schneiden sollte. Denn dann ist es nicht möglich, $\mathfrak{R}_A$ in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine mit l zusammenfällt, während die andere $\mathfrak{R}_\varepsilon$ schneidet. In der Tat ist in diesem Ausnahmefalle die gegebene Gerade l keine mögliche Wirkungslinie für die eine Kraft des Kraftkreuzes.

Man überzeugt sich hiervon leicht auch noch auf andere Art, indem man den Momentensatz anwendet. Für jeden beliebigen Momentenpunkt oder auch für jede beliebige Momentenachse muß nämlich die Momentensumme für alle gleichwertigen Kräftesysteme oder Kraftkreuze gleich sein. Wählt man nun eine Linie, die beide Kräfte eines Kraftkreuzes schneidet, als Momentenachse, so ist für sie das Moment dieses Kraftkreuzes gleich Null und auch das Moment aller gleichwertigen Kraftkreuze muß daher für dieselbe Momentenachse zu Null werden. — Wenn nun $\mathfrak{R}_\varepsilon$, wie wir vorher annahmen, zufälligerweise die Gerade l trifft, so ist l, da sie auch $\mathfrak{R}_A$ schneidet, eine solche Gerade, für die das Moment des gegebenen Kräftesystemes zu Null wird. Eine Gerade, der diese Eigenschaft zukommt, wird als eine Nulllinie des Kräftesystemes bezeichnet. Daß nun eine Nulllinie niemals mit der Richtungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes zusammenfallen kann, folgt sehr einfach daraus, daß für sie als Momentenachse zwar das Moment der mit ihr zusammenfallenden Kraft, aber auf keinen Fall das Moment der zweiten, zu ihr

windschief liegenden Kraft verschwinden könnte. Hiernach wäre auch das Moment des ganzen Kraftkreuzes für diese Achse von Null verschieden und das Kraftkreuz könnte daher dem gegebenen Kräftesysteme, für das die Gerade nach Voraussetzung eine Nulllinie sein sollte, nicht gleichwertig sein.

Man erkennt ferner, daß zu einem gegebenen Kräftesysteme sehr viele Nulllinien gehören und daß sogar durch jeden Punkt des Raumes unendlich viele hindurchgehen. Dies folgt aus dem zuvor bewiesenen Satze, daß die andere Kraft eines Kraftkreuzes in einer durch den Punkt A hindurchgehenden Ebene α enthalten sein muß, wenn für die erste Kraft vorgeschrieben ist, daß sie durch A geht. Jede Linie, die man in dieser Ebene α durch den beliebig gewählten Punkt A ziehen mag, ist daher eine Nulllinie, denn sie schneidet auf jeden Fall außer der Kraft $\mathfrak{R}_A$ auch noch die zweite Kraft des Kraftkreuzes. Zugleich erkennt man aber auch, daß andere Nulllinien, als die in der Ebene α enthaltenen, durch den Punkt A nicht gelegt werden können.

Ein ähnlicher Schluß kann auch aus dem andern Satze gezogen werden, daß die zweite Kraft des Kraftkreuzes durch einen in der Ebene ε enthaltenen Punkt E gehen muß, wenn die Richtungslinie der ersten Kraft in ε liegen soll. Alle Linien, die man in der Ebene ε durch den Punkt E ziehen kann, sind hiernach Nulllinien — und außer diesen kommen keine andern in der Ebene ε vor.

Aus diesem Grunde bezeichnet man auch die Ebene α im ersten Falle als die zum Punkte A gehörige Nullebene und den Punkt E im zweiten Falle als den zur Ebene ε gehörigen Nullpunkt. Beide Fälle unterscheiden sich übrigens nicht wesentlich voneinander; war A gegeben, so konnte α dazu gefunden werden und wenn anfänglich E gegeben war, folgte dazu ε. Bezeichnet man aber nachträglich die Ebene ε mit α, so fällt E mit A zusammen und umgekehrt. Jedem Punkte ist eine durch ihn hindurchgehende Nullebene zugeordnet und zu jeder Ebene gehört ein in ihr liegender Nullpunkt.

§ 24. Das Nullsystem.

Dadurch, daß zu einem beliebig gegebenen Kräftesysteme unendlich viele gleichwertige Kraftkreuze gehören, zwischen denen die im vorigen Paragraphen besprochenen Beziehungen bestehen, wird eine eigentümliche Zuordnung von Geraden, Punkten und Ebenen im Raume geschaffen, die jetzt noch etwas näher untersucht werden soll.

Wir sahen bereits, daß mit Ausnahme der Nulllinien, auf die ich alsbald noch zurückkommen werde, jede Gerade des Raumes als Wirkungslinie der einen Kraft des Kraftkreuzes angesehen werden kann und daß ihr dann eine zweite Gerade als Wirkungslinie der andern Kraft des Kraftkreuzes in eindeutiger Weise zugeordnet ist. Dabei ist diese Zuordnung vollständig durch das gegebene Kräftesystem bestimmt oder auch schon durch Angabe eines einzigen der unendlich vielen Kraftkreuze, die dem gegebenen Kräftesysteme sämtlich und zugleich auch untereinander gleichwertig sind. Die beiden zusammengehörigen Wirkungslinien eines dieser Kraftkreuze werden als konjugierte Geraden des Nullsystemes bezeichnet. Unter dem Nullsysteme selbst versteht man nämlich den ganzen unendlichen Raum, dessen einzelne Elemente — Geraden, Punkte und Ebenen — durch das Kräftesystem in der besprochenen Weise aufeinander bezogen sind.

Denkt man sich durch irgend einen Punkt A des Raumes alle Linien gezogen, die als Wirkungslinien der einen Kraft des Kraftkreuzes angesehen werden können, so liegen alle ihnen konjugierten Linien nach einem vorher schon bewiesenen Satze in einer Ebene α, die durch A hindurchgeht. Wir können dies dahin aussprechen, daß jedem Strahlenbündel A im Nullsysteme ein ebenes System α konjugiert ist, dessen Ebene durch A geht. Umgekehrt ist jedem ebenen Systeme ein Strahlenbündel konjugiert, dessen Strahlenzentrum in der Ebene des ebenen Systemes enthalten ist.

Alle Linien, die gleichzeitig durch A gehen und in der zu A konjugierten Ebene α liegen, sind Nulllinien. Wir können

hiernach sagen, daß jede Nulllinie sich selbst konjugiert ist. Als Wirkungslinie der einen Kraft eines der Kraftkreuze kann eine Nulllinie niemals in Frage kommen. Durch jeden Punkt des Raumes gehen unendlich viele Nulllinien, die alle in der Nullebene dieses Punktes enthalten sind und in ihm einen Strahlenbüschel bilden. Auch in jeder Ebene des Raumes liegen unendlich viele Nulllinien, die in dieser Ebene einen Strahlenbüschel bilden, dessen Zentrum der Nullpunkt der Ebene ist.

In jedem Nullsysteme kommt ferner eine vor allen andern ausgezeichnete Richtung vor, die man als die Achsenrichtung des Nullsystemes bezeichnet. Man denke sich nämlich als Ebene ε, von der seither immer die Rede war und die ganz beliebig gewählt sein konnte, jetzt die unendlich ferne Ebene des Raumes angenommen. Jede Kraft $\mathfrak{P}$ ist dann in eine durch den beliebig angenommenen Punkt A und eine in der unendlich fernen Ebene liegende Komponente zu zerlegen. Die letzte Komponente fällt, wie schon aus der in § 21 gegebenen Konstruktion, wenn man sie auf den vorliegenden Fall anwendet, hervorgeht, unendlich klein aus. Dies folgt auch noch daraus, daß das Moment für jede im Endlichen liegende Achse endlich bleiben muß, so daß die Kraft selbst wegen des unendlich großen Hebelarmes unendlich klein sein muß. Eine unendlich kleine, unendlich ferne Kraft ist übrigens, wie wir wissen, gleichbedeutend mit einem Kräftepaare. Die durch den Punkt A gehende Komponente der Kraft $\mathfrak{P}$ ist im vorliegenden Falle gleichgroß und gleichgerichtet mit $\mathfrak{P}$. Sobald wir die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε wählen, kommt demnach die Kräftezusammensetzung darauf hinaus, daß alle gegebenen Kräfte $\mathfrak{P}$ in gleicher Größe und paralleler Richtung nach dem Punkte A verlegt und dort zu einer Resultierenden $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$ vereinigt werden, während zugleich die bei der Parallelverlegung entstehenden Kräftepaare zu einem resultierenden Paare zusammengesetzt werden, dessen Momentenvektor mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden mag. Der Verein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ ersetzt dann das gegebene Kräftesystem ebenfalls voll-

ständig. Dabei ist es praktisch, nämlich weil wir in der unendlich fernen Ebene nicht unmittelbar zeichnen können, nötig, die Zusammensetzung der Kräftepaare nach den dafür besonders aufgestellten Vorschriften auszuführen. Dies hindert aber nicht, zur Aufrechterhaltung des Zusammenhanges mit dem vorher untersuchten allgemeineren Falle, jedes Kräftepaar als gleichwertig mit einer in der unendlich fernen Ebene ε liegenden unendlich kleinen Kraft anzusehen und daher auch das resultierende Moment $\mathfrak{M}$ als Vertreter einer in dieser Ebene enthaltenen Kraft zu betrachten. Von diesem Gesichtspunkte aus angesehen, stellt daher auch der Verein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ ein Kraftkreuz dar.

Wechseln wir nun den Punkt A, behalten aber die unendlich ferne Ebene als Ebene ε bei, so muß nach einem schon früher bewiesenen Satze die durch einen beliebigen Punkt A gehende Kraft des Kraftkreuzes stets durch einen in ε liegenden Punkt E, d. h. durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene hindurchgehen. Mit andern Worten heißt dies, daß die durch A gehende Kraft $\mathfrak{R}$, wie man auch A wählen möge, stets in dieselbe Richtung fallen muß. Dies folgt übrigens auch schon daraus, daß $\mathfrak{R}$ stets $= \Sigma\mathfrak{P}$ ist, sobald die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε genommen wird. Die Richtung von $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$ bezeichnet uns daher in ihrer Fortsetzung bis ins Unendliche den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene; sie ist es, die man als die Achsenrichtung des Nullsystemes bezeichnet.

Wir wollen uns die Achsenrichtung, die in jedem Falle durch Ausführung der geometrischen Summierung an allen Kräften $\mathfrak{P}$ leicht gefunden werden kann, markiert denken und die Beziehung, die zwischen ihr und irgend zwei konjugierten Geraden des Nullsystemes besteht, näher untersuchen. In Abb. 67 seien l und l' (die man sich windschief zueinander denken muß) zwei konjugierte Geraden und $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_{l'}$ seien die beiden Kräfte des Kraftkreuzes, die zu diesen beiden Wirkungslinien gehören. Jedenfalls ist nun die geometrische Summe aus $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_{l'}$ gleich der geometrischen Summe $\Sigma\mathfrak{P}$

aus allen Kräften des ursprünglich gegebenen Kräftesystemes. Reiht man also, wie es in der Abbildung geschehen ist, $\mathfrak{R}_{l'}$ an $\mathfrak{R}_l$ graphisch an, so stellt die dritte Seite des entstehenden Kräftedreieckes die geometrische Summe $\mathfrak{R}$ oder $\Sigma\mathfrak{P}$ aus den gegebenen Kräften dar. Diese Seite fällt also in die Achsenrichtung des Nullsystemes; in der Abbildung ist ihr daher auch noch die darauf hinweisende Bezeichnung *aa* beigeschrieben. Die Ebene des Dreieckes ist in der Abbildung schraffiert. Diese Ebene muß parallel zu l' gehen, da eine Seite des in ihr enthaltenen Dreieckes parallel zu l' gezogen war. Legt man also durch eine der konjugierten Geraden l und durch die Achsenrichtung *aa* eine Ebene, so ist diese Ebene der andern der konjugierten Geraden l' parallel.

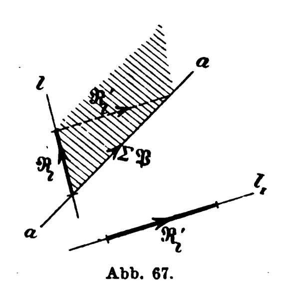


Abb. 67.

Die durch *aa* und eine Gerade l gelegte Ebene kann auch als jene Ebene bezeichnet werden, durch die die Gerade l in der Achsenrichtung *aa* projiziert wird. Mit dieser anschaulicheren Bezeichnungsweise können wir das vorher gefundene Resultat in dem Satze aussprechen, daß konjugierte Geraden in der Achsenrichtung durch parallele Ebenen projiziert werden. Offenbar gilt nämlich das, was vorher für die Gerade l bewiesen wurde, ebenso auch für die andere Gerade l'; auch l' wird in der Achsenrichtung durch eine Ebene projiziert, die zu l parallel geht.

An diese Betrachtung knüpft sich noch eine bemerkenswerte Folgerung. Man denke sich nämlich irgendwie eine Anzahl von Strecken gezogen, die mit den Endpunkten aneinander stoßen, so daß eine Anzahl aneinander grenzender ebener Polygone entsteht, die im Zusammenhange entweder einen ganzen Polyedermantel oder einen Teil eines solchen bilden. Betrachtet man die so erhaltene räumliche Figur als Bestandteil eines Nullsystemes, so kann man zu jeder der in ihr enthaltenen Geraden die konjugierte Gerade aufsuchen. Man erhält dann eine zweite polyedrische Figur und zwar so, daß

jeder Polygonebene in der ersten Figur eine Ecke in der zweiten (nämlich der zur Ebene gehörige Nullpunkt) und jeder Ecke in der ersten Figur eine Polygonebene in der zweiten (nämlich die zur Ecke gehörige Nullebene) entspricht. Hierauf denke man sich beide Polyeder in der Achsenrichtung auf eine beliebige Ebene projiziert. Nach dem, was wir vorher sahen, liefern die zueinander konjugierten Geraden parallele Projektionen. Die Projektionen beider Polyedermäntel stehen daher genau in demselben Verhältnisse zueinander wie die reciproken Figuren, mit denen wir früher bei der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene und bei der Konstruktion von Kräfteplänen zu tun hatten. Jeder Linie der einen Figur entspricht eine zu ihr parallele Linie in der andern; jeder Ecke der einen ein Polygon in der andern und umgekehrt.

Durch diese von Cremona herrührende Betrachtung ist der Zusammenhang zwischen der in der graphischen Statik vorkommenden reciproken Verwandtschaft mit den allgemeinen projektivischen Beziehungen, mit deren Untersuchung man sich in der Geometrie befaßt, hergestellt. Man kann auch, wie Schur gezeigt hat, das Nullsystem direkt benutzen, um den Kräfteplan für ein Fachwerk, das hierbei als Projektion eines solchen Polyedermantels aufgefaßt wird, zu konstruieren. Für die praktische Anwendung, die auch ohne solche, theoretisch interessante, in der Ausführung aber schwerer zu übersehende Hülfsmittel leicht zum Ziele gelangt, wird aber damit nicht viel gewonnen.

§ 25. **Praktische Ausführung und spezielle Fälle.**

Für die praktische Durchführung einer Kräftezusammensetzung im Raume empfiehlt es sich am meisten, die unendlich ferne Ebene zur Ebene ε zu wählen, d. h. die Kräfte auf eine durch einen beliebig gewählten Punkt A gehende Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückzuführen. Die Wahl des Punktes A wird dabei oft durch die besonderen Umstände der Aufgabe nahegelegt. Die Resultierende $\mathfrak{R}$ findet man jeden-

falls immer leicht durch graphische Summierung der gegebenen Kräfte, also so wie in § 1, Abb. 1, indem es hierfür ganz gleichgültig ist, ob die Kräfte an demselben oder an verschiedenen Angriffspunkten angreifen.

Um $\mathfrak{M}$ zu erhalten, könnte man unmittelbar nach der bisher schon besprochenen Vorschrift verfahren, indem man zu jedem Kräftepaare, das bei der Parallelverlegung einer Kraft nach dem Punkte A entsteht, den Momentenvektor durch seine Projektionen darstellte und dann alle Momentenvektoren ebenso graphisch summierte, wie vorher die Kräfte. Einfacher gelangt man aber auf anderm Wege zum Ziele. Verbindet man nämlich in jedem Risse die Projektion des Punktes A mit den Endpunkten der Projektion einer der Kräfte $\mathfrak{P}$, so erhält man die Projektionen des zur Kraft $\mathfrak{P}$ gehörigen, im Raume liegenden Momentendreieckes in den Projektionsebenen. Aus Band I, § 17 (Abb. 14 der 2. Aufl.) ist aber bereits bekannt, daß die senkrechte Projektion des Momentendreieckes auf eine Ebene zugleich das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ für eine durch den Punkt A senkrecht zur Projektionsebene gezogene Achse darstellt. Man braucht daher nur in jeder Projektionsebene die algebraische Summe der Momente der Kräfteprojektionen in Bezug auf die Projektion des Punktes A als Momentenpunkt zu bilden, um damit sofort die senkrecht zu dieser Projektionsebene stehende Komponente des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Diese Zusammensetzung kann in jedem Risse sofort leicht vorgenommen werden. Hatte man nun den Körper mit allen an ihm angreifenden Kräften von vornherein in drei zueinander senkrechten Rissen gezeichnet, so findet man nach der algebraischen Summierung der Momente der Kräfteprojektionen in diesen Rissen — oder der ihnen entsprechenden Flächen der Momentendreiecke — zugleich drei zueinander rechtwinklig stehende Komponenten von $\mathfrak{M}$. Man braucht dann nur noch die graphische Summierung dieser drei Komponenten vorzunehmen, um $\mathfrak{M}$ selbst zu erhalten. — An einem Beispiele unter den Aufgaben wird dies vollständig in der Zeichnung durchgeführt werden.

Wir wollen ferner den besonderen Fall betrachten, daß am starren Körper nur *drei windschief zueinander liegende Kräfte* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ vorkommen. Auf ein Kraftkreuz kann man diese, wie wir schon wissen, unter allen Umständen zurückführen. Es fragt sich aber jetzt, ob sich die Kräfte etwa ausnahmsweise auch im Gleichgewichte halten können, oder ob sie wenigstens durch eine einzige Resultierende ersetzt werden können oder ob sie schließlich einem Kräftepaare gleichwertig sein können. Der erste Fall kann, wie man leicht erkennt, niemals vorkommen. Man denke sich etwa durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ irgend eine Gerade gelegt, die $\mathfrak{P}_3$ nicht schneidet. Da die Kräfte windschief zueinander, also jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen sollten, wird man sehr viele Geraden ziehen können, die dieser Bedingung entsprechen. Wählt man eine von ihnen als Momentenachse, so verschwindet für sie das Moment von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, während das Moment von $\mathfrak{P}_3$ jedenfalls von Null verschieden ist. Die Momentensumme wird also nicht zu Null, während doch für Kräfte, die Gleichgewicht miteinander halten sollen, das Moment für jede Momentenachse zu Null werden muß. *Gleichgewicht zwischen drei windschief liegenden Kräften ist daher niemals möglich.*

Um die zweite Frage zu entscheiden, betrachten wir zunächst nur die beiden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die für sich genommen ein Kraftkreuz darstellen. Wir denken uns dieses in ein ihm gleichwertiges umgewandelt, von dem eine Kraft mit der Wirkungslinie von $\mathfrak{P}_3$ zusammenfällt. Diese kann dann mit $\mathfrak{P}_3$ vereinigt werden und die Resultierende liefert im allgemeinen in Verbindung mit der andern Kraft des Kraftkreuzes das neue Kraftkreuz, das die drei gegebenen Kräfte ersetzt. Es kann aber auch vorkommen, daß die auf die Richtungslinie von $\mathfrak{P}_3$ fallende Kraft des die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ersetzenden Kraftkreuzes zufällig gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{P}_3$ ist. In diesem Falle verschwindet die Resultierende aus beiden und es bleibt nur noch die andere Kraft des Kraftkreuzes übrig, die nun die drei gegebenen

Kräfte vollständig ersetzt. Ausnahmsweise kann daher, wie wir hieraus erkennen, ein Verein von drei windschief zueinander liegenden Kräften auch schon durch eine einzige Resultierende ersetzt werden.

Sollen endlich die drei Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ einem Kräftepaare gleichwertig sein, so muß jedenfalls die geometrische Summe der drei Kräfte gleich Null sein. Dies kann aber vorkommen. Damit es möglich sei, müssen die drei Richtungslinien zu einer Ebene parallel sein. Sind dann außerdem die Größen so gewählt, daß sich die Strecken $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ zu einem Dreiecke mit aufeinander folgenden Pfeilen aneinander reihen lassen, so verschwindet für jeden Punkt A die Resultierende $\mathfrak{R}$ und es bleibt nur noch das Moment $\mathfrak{M}$ übrig. Ausnahmsweise können also drei windschief zueinander liegende Kräfte auch einem Kräftepaare gleichwertig sein.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für vier windschief zueinander liegende Kräfte anstellen. Vor allem erkennt man hier, daß unter Umständen vier windschiefe Kräfte auch im Gleichgewichte miteinander stehen können. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, nur irgend zwei einander gleichwertige Kraftkreuze ins Auge zu fassen. Kehrt man dann im einen Kraftkreuze die Pfeile beider Kräfte um, so stehen diese mit dem andern Kraftkreuze im Gleichgewichte. Natürlich müssen in diesem Falle drei der vier Kräfte eine Resultierende ergeben und diese muß überdies mit der vierten Kraft zusammenfallen, ihr gleich und entgegengesetzt gerichtet sein.

Man kann noch eine andere einfache Bedingung anführen, der vier windschiefe Kräfte genügen müssen, wenn sie im Gleichgewichte miteinander stehen sollen. Durch drei windschiefe Geraden kann man nämlich sehr viele gerade Linien ziehen, die alle drei schneiden und zwar ist durch jeden Punkt der ersten Geraden eine Linie zu ziehen, die zugleich die beiden andern trifft, wie aus einer einfachen geometrischen Betrachtung hervorgeht. Alle diese schneidenden Geraden bilden eine Regelschar und die drei gegebenen Geraden gehören zu einer

zweiten Regelschar, die mit jener zusammen auf demselben Hyperboloide liegt. Man denke sich nun irgend eine von jenen Geraden ausgewählt, die etwa die Richtungslinien der drei Kräfte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ schneidet. Betrachtet man sie als Momentenachse, so verschwindet für sie das Moment jener drei Kräfte. Wenn Gleichgewicht bestehen soll, muß daher auch das Moment von $\mathfrak{P}_4$ verschwinden, d. h. die Gerade muß von selbst auch die Richtungslinie von $\mathfrak{P}_4$ schneiden. Da dies von jeder Geraden zutrifft, die drei der Kräfte schneidet, so folgt als Gleichgewichtsbedingung für vier Kräfte, daß sie alle vier zu einer Regelschar gehören müssen, oder daß sie, wie man sich ausdrückt, hyperboloidisch zueinander liegen müssen. Dieser Satz gilt natürlich ebenso auch für zwei einander gleichwertige Kraftkreuze, da man diesen Fall, wie wir vorher sahen, durch bloße Umkehrung der Pfeile im einen Kraftkreuze auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. — Außerdem können vier Kräfte ausnahmsweise auch durch eine einzige Resultierende oder durch ein einziges Kräftepaar ersetzt werden; es ist aber nicht nötig, darauf näher einzugehen.

Daß auch fünf oder noch mehr zueinander windschief liegende Kräfte ausnahmsweise im Gleichgewichte miteinander stehen können, ist nach dem Vorhergehenden schon ohne weiteres klar. Bei fünf Kräften dürfen indessen nicht vier derselben hyperboloidisch zueinander liegen, falls nicht auch die fünfte auf dem gleichen Hyperboloide liegt. Man würde nämlich sonst Momentenachsen legen können, die vier Kräfte treffen, die fünfte aber nicht und die Momentensumme könnte dann für diese Momentenachsen nicht zu Null werden. Liegen keine vier von den fünf Richtungslinien auf demselben Hyperboloide, so kann man sich eine Regelschar durch drei derselben gelegt denken. Diese trifft dann (als Fläche zweiter Ordnung) die beiden andern Richtungslinien in je zwei Punkten und diese Punkte müssen, damit keine Momentenachse möglich ist, die nur vier von den fünf Richtungslinien schneidet, paarweise auf denselben beiden Strahlen der Regelschar enthalten

sein. Fünf windschiefe Kräfte können daher jedenfalls nur dann im Gleichgewichte miteinander sein, wenn man mindestens zwei gerade Linien ziehen kann, die alle fünf Richtungslinien schneiden.

§ 26. **Das Kraftkreuz-Tetraeder.**

Irgend ein Kraftkreuz sei gegeben, dessen Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch Strecken auf beiden Wirkungslinien zur Darstellung gebracht sind. Man denke sich die vier Endpunkte dieser Strecken durch vier Verbindungsstrecken miteinander verbunden. Hierdurch wird ein Tetraeder gebildet, in dem $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei einander gegenüher liegende Kanten darstellen. Man kann zeigen, daß für alle untereinander gleichwertigen Kraftkreuze die in dieser Weise konstruierten Tetraeder gleichen Inhalt haben.

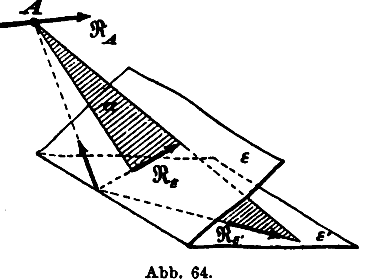


Abb. 64.

Den Beweis führt man am einfachsten auf Grund der in § 23 im Anschlusse an die hier wieder abgedruckte Abb. 64 durchgeführten Betrachtung. Es zeigte sich dort, daß die zweite Kraft des Kraftkreuzes $\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ in einer Ebene α enthalten sein muß, wenn die erste Kraft $\mathfrak{R}_A$ durch einen beliebig gewählten Punkt A gehen soll. Dabei ist α die Nullebene des Punktes A. Verbindet man in Abb. 64 den Punkt A, der als Anfangspunkt der Strecke $\mathfrak{R}_A$ gewählt sein möge, mit den Endpunkten der Strecke, durch die $\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ dargestellt wird, so erhält man eines der vier Dreiecke, die die Seitenflächen des zugehörigen Kraftkreuz-Tetraeders ausmachen. Wir wollen dieses in der Ebene α liegende Dreieck als die Basis des Tetraeders betrachten; die zugehörige Höhe wird dann durch die Projektion der von A aus abgetragenen Strecke $\mathfrak{R}_A$ auf eine zur Ebene α errichtete Normale dargestellt.

Nun stellt die Basisfläche des Tetraeders oder das Drei-

eck $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ zugleich das Momentendreieck der Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ für den Momentenpunkt A dar. Geht man aber von der Ebene ε zu irgend einer andern Ebene ε' über, womit $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ vertauscht wird, so ist das Moment von $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ für den Punkt A gleich dem Momente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$. Dies folgt am einfachsten daraus, daß $\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ durch eine Zerlegung von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ in zwei Komponenten erhalten wurde, von denen die andere durch den Punkt A ging, so daß deren Moment verschwindet. Das Momentendreieck $A\mathfrak{R}_{\varepsilon'}$ hat demnach gleichen Inhalt mit dem Momentendreiecke $A\mathfrak{R}_\varepsilon$ oder mit andern Worten: die Tetraeder der beiden Kraftkreuze, die wir uns jetzt miteinander zu vergleichen anschicken, haben Basisflächen von gleichem Inhalte.

Wir betrachten ferner die Höhen beider Tetraeder. Vorher war schon bemerkt, daß die zur Ebene α senkrechte Komponente von $\mathfrak{R}_A$ die Höhe des zum Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A\mathfrak{R}_\varepsilon$ gehörigen Tetraeders darstellt. Gehen wir zur Ebene ε' und hiermit zu dem andern Kraftkreuze über, so ändert sich auch $\mathfrak{R}_A$, sagen wir in $\mathfrak{R}'_A$; und zwar wird $\mathfrak{R}'_A$ als Resultierende von $\mathfrak{R}_A$ und der durch den Punkt A gehenden Komponente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ gefunden. Da aber diese Komponente in der Ebene α enthalten ist, kann sie durch ihren Hinzutritt zu $\mathfrak{R}_A$ nichts an der zu α senkrechten Komponenten ändern. Will man sich dies noch weiter klar machen, so denke man sich nur $\mathfrak{R}_A$, die Komponente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ und die aus ihnen gebildete Resultierende $\mathfrak{R}'_A$ auf die Normale zur Ebene α projiziert. Da die Komponente von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ senkrecht zur Normalen steht, muß die Projektion von $\mathfrak{R}'_A$ gleich der von $\mathfrak{R}_A$ sein. Mit andern Worten heißt dies, daß die beiden Tetraeder, die wir jetzt miteinander vergleichen, gleiche Höhen haben. Da auch die Basisflächen gleich waren, sind demnach die Tetraeder inhaltsgleich.

Hiermit ist der Satz zunächst für alle Kraftkreuze bewiesen, von denen die eine Kraft $\mathfrak{R}_A$ von demselben Angriffspunkte A ausgeht, während die andere in der Nullebene α liegt. Ehe wir ihn auf die übrigen Fälle übertragen, wollen wir uns überlegen, welche Deutung dem Tetraederinhalte gegeben werden kann. Wir sahen schon, daß die Basisfläche

das Momentendreieck von $\mathfrak{R}_\varepsilon$ für den Punkt A angibt. Bezeichnen wir die Fläche dieses Dreieckes mit F, den Winkel zwischen der Normalen zu α und $\mathfrak{R}_A$ mit γ und die Größe von $\mathfrak{R}_A$ mit R_A, so ist das Tetraedervolumen gleich

$$\frac{1}{3} F \cdot R_A \cos \gamma .$$

Hier können wir den Faktor $\cos \gamma$ auch zu F nehmen und das Produkt $F \cos \gamma$ stellt dann die Projektion des Momentendreieckes auf eine zu $\mathfrak{R}_A$ senkrechte Ebene dar, d. h. das Produkt bildet das Maß für das statische Moment der einen Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ des Kraftkreuzes in Bezug auf die Richtungslinie der andern Kraft $\mathfrak{R}_A$ als Momentenachse. Der Inhalt des Tetraeders selbst ist demnach dem Produkte aus einer Kraft des Kraftkreuzes und dem in Bezug auf deren Wirkungslinie als Momentenachse genommenen Momente der andern Kraft proportional.

Hieraus folgt auch sofort, daß sich der Inhalt des Tetraeders nicht ändern kann, wenn man den Angriffspunkt einer Kraft des Kraftkreuzes längs deren Wirkungslinie verschiebt, ohne sonst etwas zu ändern. Im übrigen ist dies eine rein geometrische Eigenschaft des Tetraeders, die auch geometrisch, ohne Bezugnahme auf die mechanische Bedeutung, die dem Tetraeder in unserem Falle zukommt, leicht bewiesen werden kann.

Kehren wir nun zu unserem Satze zurück, so erkennen wir leicht, daß wir von einem der Kraftkreuze, deren eine Kraft im Punkte A angriff, durch bloße Verschiebung des Angriffspunktes längs der Richtungslinie sofort auch zu einem Kraftkreuze übergehen können, dessen eine Kraft durch irgend einen andern Punkt B dieser Richtungslinie geht. Das Tetraedervolumen wird hierbei nicht geändert. Zugleich wissen wir, daß sich das Tetraedervolumen auch weiterhin nicht ändert, wenn wir dieses Kraftkreuz in irgend ein anderes umwandeln, bei dem B als Angriffspunkt der einen Kraft festgehalten wird; denn was vorher von dem beliebig gewählten Punkte A bewiesen wurde, gilt ohne weiteres auch für den jetzt mit B bezeichneten

Punkt. Durch wiederholte Umwandlungen dieser Art können wir aber auch zu allen andern der unter sich gleichwertigen Kraftkreuze gelangen und damit folgt in der Tat, daß deren Tetraederinhalte sämtlich untereinander gleich sind.

§ 27. Die Zentralachse eines Kräftesystemes.

Man denke sich ein Kräftesystem, so wie es in § 25 beschrieben war, auf eine durch irgend einen Punkt A geführte Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückgeführt. Die Richtung von $\mathfrak{R}$ gibt die „Achsenrichtung" des Kräftesystemes oder des dadurch bestimmten Nullsystemes an. Der Übergang vom Punkte A zu irgend einem andern Punkte A' kann dann leicht bewirkt werden. Wir verlegen zu diesem Zwecke $\mathfrak{R}$ parallel zu sich selbst und in gleicher Größe als $\mathfrak{R}'$ nach dem Punkte A'. Hierbei tritt noch ein neues Kräftepaar auf aus den Kräften $\mathfrak{R}$ und — $\mathfrak{R}'$, dessen Momentenvektor mit $\mathfrak{M}$ zu einem neuen resultierenden Momente $\mathfrak{M}'$ zusammenzusetzen ist.

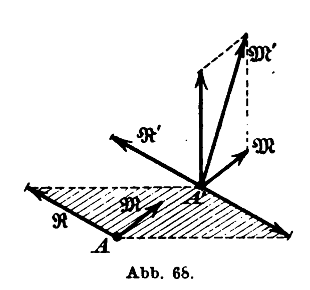


Abb. 68.

In Abb. 68 ist dies in achsonometrischer Zeichnung angedeutet. Das Parallelogramm des bei der Parallelverlegung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ von A nach A' entstehenden Kräftepaares ist durch Schraffierung hervorgehoben; senkrecht zur Parallelogrammfläche ist der Momentenvektor angetragen, der keine besondere Bezeichnung erhalten hat. $\mathfrak{M}$ kann von A nach A' ohne weiteres verlegt werden, da ein Momentenvektor ein völlig freier Vektor ist. Das resultierende Moment $\mathfrak{M}'$ ist mit Hülfe eines Parallelogrammes ermittelt, das genau wie ein Kräfteparallelogramm aufzuzeichnen ist.

Zunächst finden wir bei dieser Konstruktion von neuem bestätigt, daß Größe und Richtung der Resultierenden $\mathfrak{R}$ von der besonderen Wahl des Punktes A unabhängig sind. Nur der Momentenvektor $\mathfrak{M}$ ändert sich infolge der Verschiebung von A in $\mathfrak{M}'$ um. Ferner bemerken wir aber, daß der zu

$\mathfrak{M}$ hinzutretende Momentenvektor, der sich mit ihm zu $\mathfrak{M}'$ zusammensetzt, auf jeden Fall senkrecht zu $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}'$ steht. Daraus folgt, daß die Projektion von $\mathfrak{M}'$ auf die Achsenrichtung der Projektion von $\mathfrak{M}$ auf dieselbe Richtung gleich ist. Da auch $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$ war, folgt hieraus weiter, daß das innere Produkt $\mathfrak{R}\mathfrak{M}$ aus der Resultierenden und dem Momente für jede Wahl des Punktes A denselben Wert behält. Dieser Satz tritt hier an die Stelle des im vorigen Paragraphen bewiesenen Satzes, daß die Tetraeder von allen unter sich gleichwertigen Kraftkreuzen gleichen Inhalt haben. In der Tat stellt nämlich auch hier das innere Produkt $\mathfrak{R}\mathfrak{M}$ zugleich das Produkt aus der Kraft $\mathfrak{R}$ des Kraftkreuzes und dem auf ihre Wirkungslinie als Momentenachse bezogenen Momente der andern, in der unendlich fernen Ebene anzunehmenden zweiten Kraft des Kraftkreuzes dar, das dem Vereine von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ entspricht.

An diese Betrachtung läßt sich sofort eine weitere Bemerkung knüpfen. Durch geeignete Wahl des Punktes A' kann man nämlich dem Momentenvektor des aus $\mathfrak{R}$ und $-\mathfrak{R}'$ bestehenden Kräftepaares jede beliebige Größe und zugleich jede senkrecht zur Achsenrichtung stehende Richtung erteilen. Hiernach kann auch der zur Achsenrichtung senkrecht stehende Anteil von $\mathfrak{M}'$ durch verschiedene Wahl des Punktes A' beliebig umgestaltet werden, während die in die Achsenrichtung fallende Komponente von $\mathfrak{M}'$ davon, wie wir wissen, unberührt bleibt. Sollte etwa $\mathfrak{M}$ von vornherein zufälligerweise senkrecht zu $\mathfrak{R}$ gewesen sein, so könnte auch jedes daraus abgeleitete $\mathfrak{M}'$ keine Komponente in der Achsenrichtung haben. Es bliebe dann immer nur ein zur Achsenrichtung senkrechter Momentenvektor übrig und dieser kann durch geeignete Wahl von A' auf jede im übrigen beliebige Richtung und Größe gebracht werden. Bei passender Wahl von A' kann er daher auch zu Null gemacht werden. Dann bleibt aber nur noch die Resultierende $\mathfrak{R}'$ als vollständiger Ersatz des Kräftesystemes übrig. Wenn $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ für irgend eine Wahl des Punktes A rechtwinklig zueinander stehen, läßt sich daher das

Kräftesystem stets auf eine einzige Resultierende zurückführen.

Im andern Falle, wenn also $\mathfrak{M}$ nicht rechtwinklig zu $\mathfrak{R}$ ist, ist die Zurückführung auf eine einzige Resultierende niemals möglich. Man kann indessen auch in diesem Falle durch passende Wahl des Angriffspunktes A' von $\mathfrak{R}'$ die zur Achsenrichtung senkrecht stehende Komponente von $\mathfrak{M}'$ zum Verschwinden bringen. Dann bleibt neben $\mathfrak{R}'$ nur noch ein damit gleich gerichteter Momentenvektor $\mathfrak{M}'$ übrig. Diese Darstellung des Kräftesystemes kann als die einfachste angesehen werden, auf die es sich zurückführen läßt. Die zugehörige Richtungslinie von $\mathfrak{R}'$ wird als die Zentralachse des Kräftesystemes bezeichnet. Es ist nämlich ohne weiteres klar, daß wenn irgend ein Punkt A' gefunden ist, für den $\mathfrak{M}'$ gleich gerichtet mit $\mathfrak{R}'$ ist, dies auch für jeden andern Punkt auf der durch A' in der Achsenrichtung gezogenen Geraden zutrifft. Für alle andern, nicht auf dieser Linie gelegenen Punkte A' muß dagegen immer noch eine zur Achsenrichtung senkrecht stehende Komponente von $\mathfrak{M}'$ hinzutreten.

Zieht man im Punkte A eine Ebene rechtwinklig zu $\mathfrak{M}$, so ist diese übrigens die Nullebene α des Punktes A. Denn für jede in dieser Ebene enthaltene, durch A gezogene Gerade als Momentenachse verschwindet sowohl das Moment von $\mathfrak{R}$ als das Moment des Kräftepaares, das durch $\mathfrak{M}$ dargestellt wird.

Im übrigen haben diese Betrachtungen weniger praktisches, als theoretisches Interesse; ihr Nutzen besteht im wesentlichen darin, eine möglichst anschauliche Vorstellung von den zwischen Kräften im Raume bestehenden Beziehungen zu bilden. Zugleich gewährt ihre Durchführung eine gute Übung für die Untersuchung von Kräften im Raume. Wer sich nicht mit ihnen vertraut gemacht hat, wird allen Aufgaben, die von Kräften im Raume handeln, unbeholfen gegenüber stehen. Freilich bleiben solche Aufgaben auch selbst für den, der den Gegenstand genauer studiert hat, oft noch schwierig genug; er wird sich aber auf Grund seiner Schulung darin jedenfalls leichter zurecht finden, als im andern Falle.

§ 28. Die Koordinaten eines Kräftesystemes nach der analytischen Darstellung.

Um die Zusammensetzung der Kräfte im Raume nach den Methoden der analytischen Geometrie behandeln zu können, denkt man sich alle gegebenen Kräfte in Komponenten nach den Richtungen der drei rechtwinklig aufeinander stehenden Koordinatenachsen XYZ zerlegt. Auch die Momentenvektoren der Kräftepaare zerlegt man in ihre Komponenten nach diesen Richtungen, d. h. man schreibt an Stelle der auf Momentenpunkte bezogenen Momente die Momente in Bezug auf Achsen an, die den Koordinatenachsen parallel gehen.

Am bequemsten ist auch hier für die Rechnung der Ersatz des gegebenen Kräftesystemes durch eine Resultierende in Verbindung mit einem resultierenden Kräftepaare. Den Punkt A, durch den die Resultierende geführt werden soll, läßt man am besten mit dem Koordinaten-Ursprunge zusammenfallen. Die Komponenten des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ sind dann gleich den Momentensummen der gegebenen Kräfte in Bezug auf die Koordinatenachsen als Momentenachsen.

Die Koordinaten des Angriffspunktes einer der gegebenen Kräfte, $\mathfrak{P}_1$ seien mit $x_1 y_1 z_1$ und die Komponenten der Kraft in den Richtungen der Koordinatenachsen mit $X_1\, Y_1\, Z_1$ bezeichnet und ähnlich für die übrigen. Dann erhält man zunächst für die Komponenten XYZ der Resultierenden $\mathfrak{R}$ die Gleichungen

$$X = X_1 + X_2 + \cdots = \Sigma X; \quad Y = \Sigma Y; \quad Z = \Sigma Z \tag{31}$$

wenn auf der rechten Seite X unter dem Summenzeichen irgend eine der Komponenten X_1, X_2 u. s. f. bedeutet.

Die Komponenten des auf den Ursprung als Momentenpunkt bezogenen resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ seien mit LMN bezeichnet. Man kann sie nach den schon im ersten Bande dafür gegebenen Vorschriften unmittelbar berechnen. Zur besseren Übersicht seien indessen die dafür gültigen Ausdrücke an der Hand von Abb. 69 noch einmal abgeleitet. In der Abbildung ist der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in drei Rissen

gezeichnet und in diese Risse sind auch die Komponenten $X_1 Y_1 Z_1$ von $\mathfrak{P}_1$ in jenen Richtungen eingetragen, in denen sie positiv gerechnet werden. Um das Moment der Kraft $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf die X-Achse zu erhalten, betrachten wir ihre Projektion auf die YZ-Ebene und nehmen in dieser Ebene das Moment für den Ursprung O als Momentenpunkt. Anstatt von der Projektion von $\mathfrak{P}_1$ selbst das Moment zu berechnen, können wir indessen auch die Summe der Momente von Y_1 und Z_1 dafür setzen, da die Resultierende aus diesen beiden die Projektion von $\mathfrak{P}_1$ auf die YZ-Ebene liefert. Als positiv sind dabei jene Momente in Ansatz zu bringen, die für den vorn, d. h. auf der Seite der positiven X-Achse stehenden Beschauer im Uhrzeigersinne drehen. Hiernach findet man für das Moment von $\mathfrak{P}_1$ in Bezug auf die X-Achse

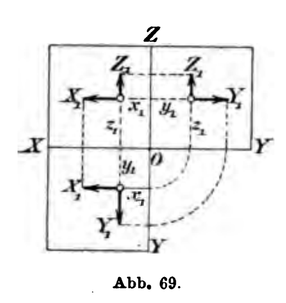


Abb. 69.

$$Y_1 z_1 - Z_1 y_1.$$

Ähnliche Ausdrücke gelten für die übrigen Kräfte $\mathfrak{P}$ und in Bezug auf die beiden andern Koordinatenachsen als Momentenachsen. Im ganzen erhält man daher

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma(Yz - Zy);\\ M &= \Sigma(Zx - Xz);\\ N &= \Sigma(Xy - Yx); \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die aus den Gleichungen (31) hervorgehenden Komponenten XYZ von $\mathfrak{R}$ und die jetzt berechneten Komponenten LMN von $\mathfrak{M}$ faßt man unter der Bezeichnung der sechs Koordinaten des gegebenen Kräftesystemes zusammen. Diese sechs Größen genügen nämlich, um ein Kräftesystem hinreichend zu beschreiben, insofern als zwei Kräftesysteme, die in den sechs Koordinaten übereinstimmen, wenn sie auch im einzelnen anders zusammengesetzt sein mögen, doch im ganzen gleichwertig miteinander sind. Bei Aufgaben über das Gleichgewicht oder die Bewegung eines starren Körpers braucht

man daher von den äußeren Kräften nichts, als jene sechs Koordinaten zu kennen.

Im Gleichgewichte kann ein Kräftesystem nur dann stehen, wenn alle sechs Koordinaten zu Null werden. Setzt man die Summengrößen auf den rechten Seiten der Gleichungen (31) und (32) gleich Null, so erhält man demnach die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen für ein beliebiges Kräftesystem. — Bemerkenswert ist, daß die Zahl dieser Gleichgewichtsbedingungen sechs beträgt; sie entspricht der Zahl der Freiheitsgrade für die Bewegung eines starren Körpers. Überhaupt besteht zwischen den Untersuchungen über die Kräftezusammensetzung im Raume und den im ersten Bande durchgeführten Betrachtungen über die Bewegung eines starren Körpers eine enge Verwandtschaft. So wie wir hier ein Kräftesystem auf eine Resultierende $\mathfrak{R}$ und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückführten, wurde dort die beliebige Bewegung eines starren Körpers in die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ irgend eines Anfangspunktes und die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um eine durch diesen Anfangspunkt gehende Achse zerlegt. Der Darstellung der Bewegung als eine schraubenförmige (bei gleicher Richtung von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$) entspricht hier die Konstruktion der Zentralachse des Kräftesystemes u. s. f. — Man kann den Vergleich noch erheblich weiter führen, worauf aber hier verzichtet werden darf.

§ 29. Zerlegung einer Kraft nach sechs gegebenen Richtungslinien.

Eine Kraft kann in einer Ebene nach zwei sich mit ihrer Richtungslinie im selben Punkte schneidenden Geraden zerlegt werden. Im Raume ist eine Zerlegung nach drei gegebenen Geraden möglich, die mit der Kraft durch denselben Punkt gehen. In der Ebene kann man eine Kraft ebenfalls nach drei Richtungslinien zerlegen, wenn sich diese Linien mit der Kraft nicht in demselben Punkte schneiden. Alle diese Aufgaben wurden im ersten Abschnitte behandelt und es zeigte sich, daß sie von grundlegender

Bedeutung für eine Reihe von Anwendungen sind, die sich daran schlossen.

An diese Aufgaben reiht sich jetzt die allgemeinste an, die man von der gleichen Art stellen kann, nämlich die Zerlegung einer Kraft nach gegebenen Richtungslinien, die irgend eine Lage im Raume zueinander haben, die nicht an solche Beschränkungen wie in den vorigen Fällen gebunden ist. Hierbei fragt es sich zunächst, wie groß die Zahl der gegebenen Richtungslinien, nach denen die Zerlegung erfolgen soll, sein muß, damit die Aufgabe — von Ausnahmefällen, die durch besondere Lagen bedingt sein können, abgesehen — stets eindeutig gelöst werden kann.

Man entscheidet diese Frage am einfachsten auf Grund der analytischen Darstellung im vorigen Paragraphen. Die Kräfte, deren Richtungslinien gegeben sind und deren Größen gesucht werden, bilden nämlich ein Kräftesystem, dessen sechs Koordinaten X, Y, Z, L, M, N mit den Komponenten der gegebenen Kraft, die zerlegt werden soll und mit den Momenten dieser Kraft in Bezug auf die Koordinatenachsen der Reihe nach übereinstimmen müssen. Schreibt man dies an, so erhält man sechs Gleichungen, in denen nur die Größen der gesuchten Kräfte als Unbekannte auftreten. Hierbei ist nämlich zu beachten, daß die nach den Achsenrichtungen genommenen Komponenten der Unbekannten, die in die Gleichungen (31) und (32) einzutreten haben, aus den Unbekannten selbst durch Multiplikation mit den Kosinus der Neigungswinkel hervorgehen. Diese Kosinus sind aber bekannt, weil die Richtungslinien gegeben waren, so daß in der Tat die Größen der unbekannten Kräfte die einzigen Unbekannten in jenen sechs Gleichungen bilden, die für sie vom ersten Grade sind.

Hieraus erkennt man schon, daß die Zahl der Kraftrichtungslinien, nach denen die Zerlegung erfolgen soll, sechs betragen muß. Wäre die Zahl geringer, etwa gleich 5, so könnte man im allgemeinen die sechs Gleichungen, die zwischen ihnen erfüllt sein müssen, nicht durch eine passende Wahl der Größe der Kräfte befriedigen. Andererseits könnte bei sieben

Kraftrichtungslinien die Größe einer dieser Kräfte beliebig gewählt werden und die übrigen könnten durch Auflösen der sechs Gleichungen gefunden werden. Es wäre daher keine eindeutige Zerlegung mehr vorgeschrieben, sondern man hätte ein System von unendlich vielen Lösungen der Zerlegungsaufgabe.

Daß bei sechs Richtungslinien nur eine einzige Lösung möglich ist, folgt sofort daraus, daß sechs Gleichungen ersten Grades mit sechs Unbekannten nur eine Lösung zulassen. Zugleich folgt auch, daß Ausnahmefälle vorkommen können; sie treten, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, dann ein, wenn die Eliminationsdeterminante, also die aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildete sechsreihige Determinante zu Null wird. Aus dieser analytischen Bedingung lassen sich alle möglichen Ausnahmefälle ableiten. Anstatt dessen wollen wir uns auf einfacherem Wege Rechenschaft darüber geben, welche besonderen Fälle bei der Annahme der sechs gegebenen Richtungslinien unter allen Umständen vermieden werden müssen.

Zunächst dürfen sich von den sechs Richtungslinien nicht mehr als drei in einem Punkte schneiden. Gingen nämlich vier durch denselben Punkt, so könnte man durch diesen Punkt eine Gerade ziehen, die zugleich auch die beiden andern Richtungslinien schnitte. Für diese Gerade als Momentenachse wäre dann das Moment aller sechs unbekannten Kräfte gleich Null. Das Moment der gegebenen Kraft, die eine ganz beliebige Lage haben kann, wäre dagegen von Null verschieden. Hiernach wäre es nicht möglich, die sechs unbekannten Kräfte so zu wählen, daß sie der gegebenen Kraft gleichwertig wären (oder auch bei der Umkehrung der Zerlegungsaufgabe so, daß sie mit der gegebenen Kraft Gleichgewicht hielten). Unter besonderen Annahmen für die gegebene Kraft, falls nämlich deren Richtungslinie die vorher gezogene Momentenachse ebenfalls schneiden sollte, würde der angegebene Hinderungsgrund zwar wegfallen. Eine Zerlegung wäre dann möglich, aber, wie hier nicht weiter ausgeführt zu

werden braucht, nicht mehr in eindeutiger Weise. Der hier erwähnte Fall interessiert uns nämlich deshalb nicht weiter, weil die Zerlegungsaufgabe immer nur in solchem Sinne gestellt zu werden pflegt, daß die Zerlegung für jede Wahl, die für die gegebene Kraft getroffen werden kann, anwendbar bleiben soll.

Selbstverständlich dürfen übrigens von den gegebenen Richtungslinien auch nicht mehr als drei parallel zueinander sein. Denn wenn vier parallel wären, so könnte man sagen, daß sie durch denselben unendlich fernen Punkt gingen und von diesem Punkte aus könnte man ebenso wie vorher eine Momentenachse ziehen, die zugleich die beiden andern Richtungslinien träfe. Überhaupt braucht man bei allen diesen Betrachtungen zwischen unendlich fernen Elementen und den im Endlichen gelegenen keinen grundsätzlichen Unterschied zu machen. Man erspart sich dadurch die ausdrückliche Besprechung von Fällen, die sich auf Grund dieser Anschauung auf die andern, gewöhnlich vorliegenden zurückführen lassen.

Ferner dürfen von den sechs gegebenen Richtungslinien auch nicht mehr als drei in einer Ebene liegen. Lägen nämlich vier in derselben Ebene, so könnte man durch die Schnittpunkte der beiden andern mit dieser Ebene eine Gerade ziehen, die ebenfalls alle sechs Richtungslinien träfe und die vorigen Schlußfolgerungen könnten auf diesen Fall ohne Änderung übertragen werden. — Auch hier sind die Fälle, daß einer oder beide Schnittpunkte ins Unendliche fallen, schon als mit eingeschlossen zu betrachten.

Mit den jetzt angeführten sind freilich noch nicht alle möglichen Ausnahmefälle erschöpft; sie sind aber, weil sie am häufigsten vorkommen, die wichtigsten. Man kann noch hinzufügen, daß auch nicht mehr als vier von den sechs Richtungslinien hyperboloidisch zueinander liegen dürfen. Gehörten nämlich fünf zu einer Regelschar, so könnte man durch einen der Punkte, in denen die sechste die Regelfläche schneidet, wiederum eine Gerade ziehen, die alle sechs trifft, womit nach dem vorher schon benutzten Beweisgrunde die Zerlegung als

unmöglich nachgewiesen ist. Überhaupt werden alle vorausgehenden Fälle durch die Bedingung umfaßt, daß es nicht möglich sein darf, eine Gerade zu ziehen, die alle sechs Richtungslinien trifft.

Wir wollen uns jetzt überlegen, auf welche Weise die Zerlegung, falls sie überhaupt möglich ist, wirklich ausgeführt werden kann. Ein Mittel dazu — und zwar das allgemeinste, das stets anwendbar bleibt — haben wir schon im Aufstellen der sechs Gleichungen und deren Auflösung nach den sechs Unbekannten kennen gelernt. Die Durchführung der Rechnung ist aber in dieser Form, wenn nicht gerade besondere Vereinfachungen vorliegen, sehr umständlich und man setzt daher, wenn es irgend angeht, lieber ein anderes Verfahren an deren Stelle, das kürzer zum Ziele führt.

Am einfachsten läßt sich die Aufgabe erledigen, wenn zufällig die sechs gegebenen Richtungslinien mit den Kanten eines Tetraeders zusammenfallen, oder überhaupt immer dann, wenn sich drei davon in einem Punkte schneiden und die drei andern in einer Ebene liegen. Man wähle dann jenen Schnittpunkt als Punkt A (im Sinne der früher gebrauchten Bezeichnungen) und die Ebene, in der die drei übrigen Richtungslinien liegen, als Ebene ε aus. Die beliebig gegebene Kraft läßt sich dann stets durch zwei Komponenten ersetzen, von denen eine durch A geht, während die andere in ε liegt. Man braucht dann nur noch die erste Komponente nach den drei mit ihr von A ausgehenden Richtungslinien und die andere nach den drei mit ihr in ε liegenden Richtungslinien zu zerlegen. Diese Konstruktionen sind früher bereits ausführlich besprochen worden und können daher hier als bekannt angesehen werden. Nach ihrer Ausführung ist die Aufgabe gelöst. Zugleich erkennt man, daß der hier besprochene Fall jedenfalls nicht zu den Ausnahmefällen gehört; die Zerlegung ist vielmehr immer möglich, so lange nicht etwa der Punkt A in die Ebene ε fällt.

Ferner ist auch klar, daß die Lösung nicht nur für die Zerlegung einer Einzelkraft anwendbar bleibt, sondern daß

man auf demselben Wege auch ein beliebig gegebenes Kräftesystem durch Kräfte ersetzen kann, die längs der sechs gegebenen Richtungslinien wirken. Dieselbe Erweiterung ist übrigens auch in allen andern Fällen möglich, denn sobald man irgend eine Kraft nach sechs Richtungslinien zu zerlegen vermag, kann man diese Zerlegung auch für alle Kräfte eines Kräftesystemes anwenden und hiermit das ganze Kräftesystem durch Kräfte längs der vorgeschriebenen Richtungslinien ersetzen.

Im allgemeinsten Falle läßt sich ein Verfahren anwenden, das als eine Verallgemeinerung der aus der Kräftezerlegung in der Ebene bekannten Ritterschen Momentenmethode betrachtet werden kann. Nach der Ritterschen Methode sucht man den Schnittpunkt von zwei der drei unbekannten Kräfte auf und schreibt für ihn eine Momentengleichung an, in der nur noch die dritte der Richtungslinie nach gegebene Kraft als Unbekannte auftritt. Wir wollen sehen, wie sich dieses Verfahren auf den Raum übertragen läßt. An Stelle des Momentenpunktes tritt hier eine Momentenachse, die man durch möglichst viele der gegebenen Richtungslinien zu ziehen sucht. Gelingt es, eine solche Momentenachse durch fünf Richtungslinien zu legen, was in praktisch vorkommenden Fällen oft ohne weiteres möglich ist (z. B. immer dann, wenn sich nur irgend drei der gegebenen Richtungslinien in einem Punkte schneiden oder auch wenn irgend drei davon in einer Ebene liegen), so erhält man die sechste Kraft genau wie bei der Ritterschen Methode aus der Momentengleichung, in der dann nur noch diese eine Unbekannte auftritt.

Im allgemeinsten Falle ist es freilich nicht möglich, eine Gerade zu ziehen, die fünf der gegebenen Richtungslinien trifft. Dagegen kann man durch vier von ihnen immer zwei Geraden legen. Man erkennt dies am einfachsten aus der Überlegung, daß durch drei windschief zueinander liegende Richtungslinien stets ein Hyperboloid gelegt werden kann, das von der vierten Richtungslinie als Fläche zweiter Ordnung in zwei Punkten getroffen wird. Durch jeden dieser Schnittpunkte geht ein

Strahl der Regelschar, der auch die drei andern trifft. Schreibt man nun für jede der beiden Schnittgeraden als Momentenachsen eine Momentengleichung an, so erhält man zwei Gleichungen, in denen die Größen der beiden letzten Kräfte als Unbekannte vorkommen. Diese muß man nun freilich immer noch nach den Unbekannten auflösen; aber es ist klar, daß die Auflösung von zwei Gleichungen viel weniger Mühe macht, als die Auflösung von sechs bei dem früher besprochenen allgemeinsten Verfahren.

Die wirkliche Aufsuchung der beiden Geraden, die man durch vier der gegebenen Richtungslinien zu legen vermag, bildet eine Aufgabe der darstellenden Geometrie, die freilich selbst soviel Schwierigkeiten machen kann, daß das Verfahren keinen Vorteil mehr bietet. Praktisch liegt aber die Sache bei solchen Fällen, wie sie in den Anwendungen vorkommen können, gewöhnlich viel einfacher: gewöhnlich kann man hier die beiden Schnittgeraden ohne weiteres angeben. Man nehme z. B. nur an, daß die sechs Richtungslinien wenigstens paarweise in einer Ebene liegen, also etwa 1 und 2 in einer Ebene und 3 und 4 in irgend einer andern. Verbindet man dann den Schnittpunkt von 1 und 2 mit dem Schnittpunkte von 3 und 4, so hat man sofort eine der beiden gesuchten Geraden. Die andere ergibt sich als Schnittlinie der Ebene 1, 2 mit der Ebene 3, 4.

Anmerkung. Auch ob etwa ein Ausnahmefall vorliegt, bei dem die Zerlegung nach den sechs Richtungslinien nicht möglich ist, muß sich beim Aufstellen der beiden Momentengleichungen herausstellen. Es kann nämlich vorkommen, daß beide Gleichungen sich widersprechen, so daß sie nicht nach den beiden Unbekannten aufgelöst werden können. Dieser Ausnahmefall tritt, wie wir schon vorher sahen, immer ein, wenn sich eine Gerade ziehen läßt, die alle sechs Richtungslinien trifft. Er kann aber auch unter andern Umständen eintreten, nämlich immer dann, wenn die Eliminationsdeterminante der beiden Momentengleichungen zu Null wird.

§ 30. Praktische Anwendungen dieser Zerlegungsaufgabe.

Die wichtigste Anwendung, die von den vorausgehenden Untersuchungen gemacht werden kann, bezieht sich auf die Ermittelung der Spannungen von Stäben, durch die zwei starre Körper fest miteinander verbunden werden. Aus den Untersuchungen des ersten Bandes ist bereits bekannt, daß ein starrer Körper relativ zu einem zweiten, der als feststehend angenommen wird, wenn gar keine Fessel zwischen beiden besteht, sechs Freiheitsgrade der Bewegung besitzt. Daraus wurde schon damals geschlossen, daß man sechs Fesseln, von denen jede einen Freiheitsgrad der Bewegung aufhebt, anlegen müsse, um beide Körper in feste Verbindung miteinander zu bringen. Solche Fesseln sind im einfachsten Falle Stäbe, die zwischen geeignet ausgewählten Punkten beider Körper angebracht werden und die eine Entfernungsänderung zwischen ihren Endpunkten verhindern.

Wollte man Stäbe verwenden, die an den Endpunkten steif mit beiden Körpern verbunden wären, so daß sie sich nicht gegen diese zu drehen vermöchten und die auch zugleich widerstandsfähig genug gegen Verbiegen und Verdrehen konstruiert wären, so würde zwar offenbar schon ein einziger Stab ausreichen, um zwei starre Körper unveränderlich miteinander zu verbinden. Hier wird aber, wie schon in früheren Fällen, vorausgesetzt, daß die Verbindungsstäbe nur gegen Zug und Druck hinreichend widerstandsfähig sind und daß sie sich daher auch namentlich an den Befestigungsstellen leicht etwas gegen die mit ihnen verbundenen Körper zu drehen vermögen, so daß man dem wirklichen Verhalten ziemlich nahe kommt, wenn man annimmt, daß die Verbindung an diesen Stellen gelenkförmig (nach Art eines Kugelgelenkes) bewirkt sei. Dies entspricht auch der konstruktiven Praxis, in der man, wenigstens bei größeren Ausführungen, Stabverbindungen immer so anzuordnen sucht, daß die Widerstandsfähigkeit der Stäbe gegen Zug und Druck schon vollständig ausreicht, um die Unverschieblichkeit des ganzen Verbandes zu sichern. In diesem

Falle wird, wie schon früher nachgewiesen wurde, durch einen Stab nur ein Freiheitsgrad der Relativbewegung vernichtet und man braucht dann mindestens sechs Stäbe, um eine steife Verbindung zwischen beiden Körpern herzustellen. Diese Zahl reicht auch, wenn Ausnahmefälle vermieden werden, zur Erreichung des Zweckes schon vollkommen aus.

Ergänzt wird diese, auf die Bewegungslehre des starren Körpers gestützte Überlegung durch die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen. Wenn nämlich die Stäbe imstande sein sollen, beide Körper wirksam gegeneinander abzustützen, müssen die Spannungen, die sie zwischen beiden übertragen, ausreichen, um gegenüber allen Lasten, die an einem von ihnen beliebig angebracht werden können, Gleichgewicht herzustellen. Von diesen Spannungen sind die Richtungslinien, die mit den Stabmittellinien zusammenfallen, gegeben. Man muß daher jede beliebig an einem der beiden Körper angebrachte Last nach den Stabrichtungslinien so zerlegen können, daß die Stabspannungen in Verbindung mit der gewählten Last an dem betreffenden starren Körper ein Gleichgewichtssystem bilden. Wir sahen aber, daß sechs Richtungslinien gegeben sein müssen, wenn die Zerlegung in jedem Falle eindeutig ausführbar sein soll. In Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnisse folgt demnach auch aus der auf die Kräftezerlegung gestützten Betrachtung, daß sechs Stäbe zur Herstellung einer ausreichenden Abstützung zwischen beiden Körpern erforderlich sind. Zugleich können wir uns auch hinsichtlich der Ausnahmefälle, die bei der Anordnung der Stäbe vermieden werden müssen, auf die darüber im vorigen Paragraphen angestellten Auseinandersetzungen beziehen.

Sehr häufig ist einer der Körper, die durch die sechs Stäbe miteinander verbunden werden sollen, die feste Erde. Der zweite soll dann durch die Verbindungsstäbe vollständig festgehalten werden, so daß er gar keine Bewegungen gegen den irdischen Raum mehr auszuführen vermag. Man denke etwa, um ein ganz einfaches Beispiel zu haben, an eine Tischplatte. Schon ein einziges Tischbein genügt, um die Tisch-

platte unverrückbar festzuhalten, wenn es steif genug konstruiert und sowohl an der Tischplatte selbst als am Fußboden fest verschraubt wird, so daß jede Drehung an den Enden vermieden ist. Freilich ist diese Stützung, weil dabei die Biegungselastizität des Beines in Frage kommt, weniger zuverlässig, falls auch kleinere Bewegungen der Platte störend empfunden werden. Wollte man das Bein nur einfach unten aufstellen, ohne es zu verschrauben, so könnte der Tisch umfallen, weil nun eine Drehung um den Fuß möglich wäre. Versieht man eine Tischplatte mit drei nicht in einer Ebene liegenden Beinen, die gegen die Platte starr verbunden sind, so ist eine Abstützung der unteren Enden gegen Drehung nicht mehr nötig. Es genügt, wenn nur dafür gesorgt wird, daß die unteren Enden sich in der Ebene des Fußbodens nicht zu verschieben und sich auch nicht von ihr abzuheben vermögen.

Bei einem solchen dreibeinigen Tische werden aber, wenn er wirklich durch Festhalten der unteren Enden unverschieblich aufgestellt ist, die Beine auf Biegung in Anspruch genommen, wenigstens immer dann, wenn an der Tischplatte horizontale Lasten oder Lasten mit horizontalen Komponenten angreifen. Der Biegungselastizität der Beine entspricht zugleich die Möglichkeit von Verschiebungen der Tischplatte von der Größenordnung der Biegungspfeile, sobald horizontale Lasten auftreten. Die sicherste Aufstellung der Tischplatte erhält man erst durch Anbringung von sechs Beinen, die nur gegen Zug und Druck zu widerstehen brauchen. Da die elastischen Längenänderungen bei Zug- oder Druckbelastung im allgemeinen viel kleiner sind, als die Biegungspfeile bei einer Inanspruchnahme auf Biegung, wird die Tischplatte bei einer passend angeordneten Stützung durch sechs Beine viel sicherer und unverrückbarer aufgestellt, als im vorigen Falle.

Natürlich müssen bei der Anordnung der Beine auch hier wieder die Ausnahmefälle vermieden werden. Es dürfen also z. B. nicht alle Beine parallel zueinander sein; vielmehr dürfen, wie wir schon früher fanden, nur höchstens drei der sechs

Stabrichtungslinien parallel zueinander (oder von einem Punkte aus) gehen. Dagegen dürfen die Beine nun nicht nur am Fußboden, sondern auch an der Tischplatte frei (etwa um Kugelgelenke) drehbar befestigt sein.

Die möglichst unverschiebliche Aufstellung einer Tischplatte ist z. B. bei geodätischen Instrumenten, etwa bei einem Meßtische, erwünscht. Betrachtet man das Meßtischgestell, so sieht man auf den ersten Blick freilich nur drei Beine. Jedes von diesen ist gegen die Tischplatte um ein Gelenk, jedoch nicht um ein Kugelgelenk, sondern um ein cylindrisches Gelenk drehbar befestigt. Hierbei treten immer noch Biegungsbeanspruchungen der Beine infolge von horizontalen Lasten an der Tischplatte auf. Tatsächlich wird aber, um diese, bezw. die ihnen entsprechenden Biegungspfeile zu vermeiden oder zu vermindern, jedes Bein nach oben hin verbreitert. Bei vollständiger konstruktiver Durchbildung in diesem Sinne wird schließlich jedes der drei Beine in zwei Stäbe aufgelöst, die unten zusammenstoßen, während sie nach oben auseinandergehen und an den beiden Enden des dann verhältnismäßig langen, gemeinsamen Gelenkbolzens befestigt sind.

In solchen Fällen sieht man oft schon sehr deutlich das Bestreben des Konstrukteurs eine Stützung durch sechs Stäbe herbeizuführen. Freilich sind die Lasten, die in horizontaler Richtung an der Tischplatte eines geodätischen Instrumentes vorkommen, so gering, daß die Stützung durch sechs Stäbe, die bloß auf Zug oder Druck in Anspruch genommen werden, immerhin keine so wichtige Rolle spielt, als in andern Fällen. Man nehme etwa an, daß eine größere Platte, auf der eine Maschine aufgestellt werden soll, oder die von Menschen begangen werden soll, in einer Höhe von einigen Metern über dem Fußboden mit den einfachsten und dabei wirksamsten Mitteln abgestützt werden soll. Dann wird man immer sechs Stäbe als Beine zu verwenden haben, wenn nicht etwa infolge einer großen horizontalen Ausdehnung der Platte die Zahl noch erhöht werden muß, um die Platte durch eine Unterstützung in mehr Punkten selbst widerstandsfähiger gegen

eigene Formänderungen zu machen, die sie etwa unter den Lasten erleiden könnte. Fällt aber ein solcher Grund weg, ist also die Platte hinreichend widerstandsfähig, um sie genau genug als starren Körper betrachten zu können, so wird man stets am besten tun, sich mit der notwendigen Anzahl von sechs Stäben zu ihrer Stützung zu begnügen.

Ein solcher Fall wird z. B. durch Abb. 70 in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Von den sechs Stäben laufen, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, je zwei in einem Punkte zusammen, hier die Stäbe 1 und 2 in einem Punkte der Tischplatte, und 3 und 4 bezw. 5 und 6 in je einem Punkte des Fußbodens. An der Tischplatte möge irgend eine beliebig gerichtete Last $\mathfrak{P}$ angreifen; man soll die dadurch in den sechs Beinen hervorgebrachten Stabspannungen ermitteln.

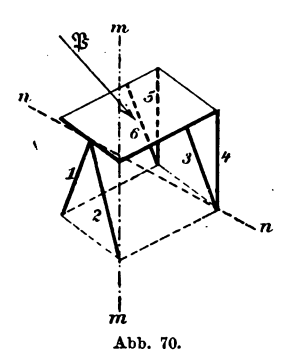


Abb. 70.

Man sucht zunächst eine Momentenachse auf, die durch mindestens vier Stäbe, etwa durch 1, 2, 3, 4 geht. Eine solche erhalten wir durch Aufsuchen der Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 3, 4. Das ist die in der Abbildung mit mm bezeichnete Gerade; sie steht hier lotrecht, weil beide Ebenen 1, 2 und 3, 4 lotrecht vorausgesetzt waren. Zugleich erlangt man hier noch von selbst den weiteren Vorteil, daß mm auch noch die Richtungslinie 5 schneidet. Sie ist nämlich parallel zu ihr, da Stab 5 lotrecht steht, und dies entspricht einem Schnitte, denn daß dieser erst im Unendlichen erfolgt, bleibt für unseren Zweck gleichgültig.

Die Spannung des Stabes 6 kann demnach sofort aus einer einzigen, für die Achse mm aufgestellten Momentengleichung berechnet werden. Hierbei erinnern wir uns, daß man die Momente in Bezug auf Achsen immer am einfachsten erhält, wenn man die Kräfte auf eine zur Achse senkrecht stehende Ebene projiziert und die Momente in dieser Ebene von den Kräfteprojektionen in Bezug auf den Punkt nimmt, in dem

die Achse die Projektionsebene trifft. Das wäre also hier die Grundriß-Ebene. In einem praktisch vorliegenden Falle wird man ohnehin schon eine Grundrißzeichnung des Tisches und der an ihm angreifenden Lasten besitzen. Die axonometrische Zeichnung dient nur als Übersichtszeichnung, die nicht im Maßstabe aufgetragen zu werden braucht, sondern bloß freihändig entworfen wird. — Für den Fußpunkt des Stabes 2 schreibt man also im Grundrisse die Bedingung an, daß das Moment der Projektion von $\mathfrak{P}$ gleich dem Momente der Projektion der Stabspannung 6 sein muß. Daraus findet man sofort die Projektion der Stabspannung 6 und hieraus auch, da die Richtungslinie des Stabes bekannt ist, (unter Zuhülfenahme des Aufrisses) die Stabspannung 6 selbst. Man sieht auch leicht schon aus der axonometrischen Zeichnung, daß Stab 6 durch die angegebene Last $\mathfrak{P}$ in Druckspannung versetzt wird.

Hätte sich *mm* nicht zufällig auch mit der Richtungslinie des Stabes 5 geschnitten, so wären in der Momentengleichung zwei unbekannte Stabspannungen vorgekommen. In diesem Falle hätte man noch die zweite Gerade aufsuchen müssen, die durch die Stäbe 1, 2, 3, 4 gelegt werden kann. Dies ist die Gerade *nn*, die den oberen Endpunkt von 1 und 2 mit dem unteren Endpunkte von 3 und 4 verbindet. Dann wird das Verfahren freilich umständlicher, da man nun $\mathfrak{P}$, 5 und 6 auf eine zu *nn* senkrechte Ebene zu projizieren und in dieser (nach Umklappen) die Momentengleichung aufzustellen hat. — Wir wollen indessen jetzt bei dem einfacheren Beispiele bleiben.

Geradeso wie 6 kann man natürlich auch die Stabspannung 3 ermitteln, indem man die Schnittlinie der Ebenen 1, 2 und 5, 6 als Momentenachse wählt. Auch dies erfordert nur das Anschreiben einer einfachen Momentengleichung im Grundrisse.

Hierauf gehe man zur Ermittelung der Stabspannungen 1 und 2 über. In diesem Falle vermag man keine Momentenachse zu ziehen, die außer den vier übrigen Stäben auch noch einen von jenen beiden schnitte. Man muß daher zwei Momentengleichungen anschreiben und sie nach den Unbekannten

1 und 2 auflösen. Diese Lösung gestaltet sich indessen hier ganz einfach.

Eine der beiden Momentenachsen, die durch die Stabrichtungslinien 3, 4, 5, 6 geht, ist die Verbindungslinie der Fußpunkte dieser vier Stäbe. Diese Achse liegt in der Grundrißebene und projiziert sich in einem rechtwinklig zur Achse gezeichneten Aufrisse als Punkt. In diesem Aufrisse decken sich ferner die Projektionen von 1 und 2. Man findet daher aus einer einfachen Momentengleichung im Aufrisse sofort die Summe der Vertikalkomponenten von 1 und 2.

Die andere durch die Linien 3, 4, 5, 6 gehende Momentenachse ist die unendlich ferne Schnittlinie der beiden durch 3 und 4 und durch 5 und 6 gelegten parallelen Ebenen. *Immer wenn man auf eine Momentengleichung für eine unendlich ferne Achse geführt wird, hat man zu beachten, daß eine solche gleichwertig mit einer Komponentengleichung ist, die für die wirkliche Ausrechnung an ihre Stelle tritt.* Die Lage einer unendlich fernen Achse wird nämlich als Schnitt eines Büschels paralleler Ebenen definiert. Ferner kommt es bei dem Momente in Bezug auf eine Achse nur auf jene Komponente der Kraft an, die im Angriffspunkte der Kraft rechtwinklig zu der von der Achse aus durch den Angriffspunkt gelegten Ebene steht. Alle diese Komponenten gehen aber bei unendlich ferner Lage der Achse in derselben Richtung und da ferner alle Hebelarme, weil sie sich nur um endliche Beträge voneinander unterscheiden, als gleich groß anzusehen sind, so vereinfacht sich die Momentengleichung in der Tat zu der Bedingung, daß die algebraische Summe der in der Richtung senkrecht zu jenem Ebenenbüschel genommenen Komponenten aller Kräfte gleich Null sein muß.

In unserem Falle erhalten wir also eine Gleichung, die ausdrückt, daß die algebraische Summe aus den Horizontalkomponenten von 1 und 2 und der parallel zur Verbindungslinie der Fußpunkte von 1 und 2 genommenen Komponente von $\mathfrak{P}$ gleich Null sein muß. Diese Gleichung in Verbindung mit der vorher schon gefundenen Momentengleichung gestattet

sofort die Auflösung nach den beiden unbekannten Stabspannungen 1 und 2.

Nimmt man z. B. an, daß die Last $\mathfrak{P}$ lotrecht gerichtet sei, so lehrt die Komponentengleichung, daß die Horizontalprojektionen der Spannungen 1 und 2 gleich groß sind und mit entgegengesetztem Pfeile an der Tischplatte angreifen. Daraus folgt zugleich, daß auch beide Stabspannungen gleich groß und von gleichem Vorzeichen sind. Dies gilt dann auch von den Vertikalkomponenten und aus der Momentengleichung in der Aufrißebene, die die Summe beider Vertikalkomponenten kennen lehrte, erhalten wir durch Halbieren des gefundenen Wertes auch die Größe einer Komponenten und hiermit die Größe der Stabspannungen.

Wäre dagegen etwa $\mathfrak{P}$ horizontal und zwar parallel zur Verbindungslinie der Fußpunkte von 1 und 2 gerichtet, so würde man zuerst aus der Momentengleichung in der Aufrißebene schließen, daß die Summe der Vertikalkomponenten von 1 und 2 Null sein muß, d. h. daß beide Stäbe Spannungen von gleicher Größe und entgegengesetztem Vorzeichen haben müssen. Aus der Komponentengleichung würde dagegen folgen, daß beide im gleichen Sinne an der Tischplatte angreifenden Horizontalkomponenten zusammen gleich der horizontalen Belastung $\mathfrak{P}$ sein müssen, so daß auf jede von ihnen die Hälfte davon entfällt. Die Stabspannungen 1 und 2 sind hiermit bekannt.

Bei der zur vorigen rechtwinkligen Lage einer Horizontalbelastung $\mathfrak{P}$ folgt — und zwar diesmal aus der Komponentengleichung —, daß die Stabspannungen gleich groß und von gleichem Vorzeichen sind, während die Momentengleichung die absoluten Beträge kennen lehrt. — Aber auch bei beliebiger Richtung von $\mathfrak{P}$ macht die Auflösung der Komponenten- und der Momentengleichung nach den beiden Unbekannten niemals Schwierigkeiten.

Nachdem man von einigen Stäben die Spannungen bereits ermittelt hat, kann man die der noch übrigen (also hier die von 4 und 5) viel einfacher berechnen. Man braucht nämlich

jetzt nicht mehr zu scheuen, daß in einer neu aufzustellenden Momentengleichung zugleich die Momente der andern Stabspannungen auftreten, weil man von diesen die Werte schon kennt. Projiziert man also den Tisch auf eine zu den Richtungen von 4 und 5 parallele Ebene, so kommen in dieser nur zwei unbekannte Kräfteprojektionen vor und indem man etwa den Momentenpunkt auf die Richtung von 4 legt, erhält man aus der Momentengleichung sofort die darin allein noch unbekannte Spannung des Stabes 5.

Schließlich möge noch darauf hingewiesen werden, daß man die Lösung der Aufgabe zuweilen erheblich abkürzen kann, wenn man eine Projektion anzugeben vermag, in der sich je zwei Stäbe decken, so daß in ihr nur noch drei voneinander verschiedene Stabrichtungen auftreten. Auch dies ist bei dem zur Erläuterung gewählten Beispiele der Abb. 70 möglich. In dem vorher schon erwähnten Aufrisse auf eine zur Verbindungslinie der Fußpunkte von 1 und 2 senkrechte Ebene decken sich die Projektionen von 1 und 2, von 4 und 5 und von 3 und 6. Da nun die Kräfteprojektionen in ihrer Ebene für sich ein Gleichgewichtssystem bilden müssen, so kann man die Projektion von $\mathfrak{P}$ ohne weiteres in der Aufrißebene nach jenen drei Richtungslinien zerlegen. Damit erhält man freilich die Stabspannungen noch nicht einzeln, sondern nur die Summe aus je zwei Projektionen von Stabkräften. Jedenfalls ist man aber damit sofort im Besitze von drei Gleichungen zwischen je zwei der sechs Unbekannten, die in Verbindung mit den übrigen Gleichgewichtsbedingungen zur Lösung benutzt werden können.

Aufgaben.

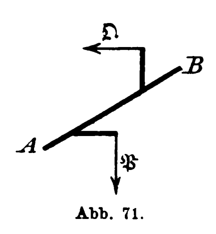


Abb. 71.

20. Aufgabe. Auf einer in zwei Punkten A und B unterstützten Welle (Abb. 71) sind zwei Arme aufgesteckt, von denen einer horizontal, der andere vertikal gerichtet ist. Am horizontalen Arme wirkt die vertikale Kraft $\mathfrak{P}$ und am vertikalen Arme die horizontale Kraft $\mathfrak{Q}$. Man soll das aus beiden Kräften gebildete Kraft-

kreuz durch ein anderes ersetzen, von dem eine Kraft durch A geht, während die zweite in der durch B senkrecht zur Welle gezogenen Ebene liegt. Unter welchen Umständen wird ferner die Wellenmittellinie AB zu einer Nulllinie?

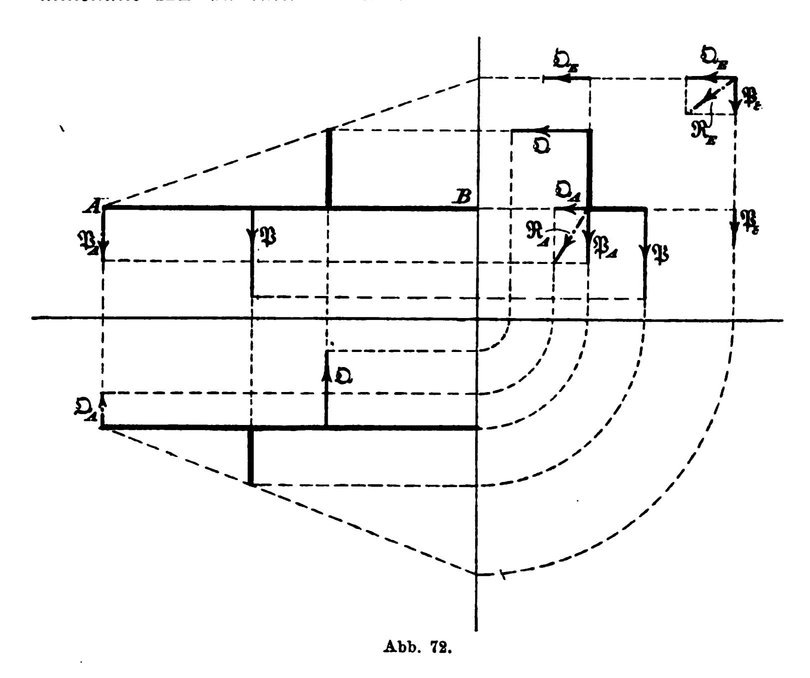


Abb. 72.

Lösung. In Abb. 72 ist die Welle in drei Rissen gezeichnet; der dritte Riß, in dem sich AB als Punkt projiziert, liegt in der durch B senkrecht zur Welle gezogenen Ebene, die wir weiterhin als die Ebene ε bezeichnen wollen. Zunächst wird von A aus durch die Richtungslinie der Kraft $\mathfrak{P}$ eine Ebene gelegt und deren Spur in der Ebene ε aufgesucht. Da $\mathfrak{P}$ parallel zu ε ist, haben wir es in zwei parallele Komponenten $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{P}_\varepsilon$ zu zerlegen, von denen $\mathfrak{P}_\varepsilon$ in die soeben erwähnte Spur fällt. Hiervon ist $\mathfrak{P}_A$ die größere Komponente, da $\mathfrak{P}$ näher bei A als bei ε liegt; $\mathfrak{P}_\varepsilon$ verhält sich zum ganzen $\mathfrak{P}$ wie der Abschnitt der Welle von A bis zu dem Arme, an dem $\mathfrak{P}$ angreift, zur ganzen Welle.

Ebenso wird auch $\mathfrak{Q}$ in die zwei Komponenten $\mathfrak{Q}_\varepsilon$ und $\mathfrak{Q}_A$ zerlegt, von denen die erste in die Spur der von A aus durch $\mathfrak{Q}$ gezogenen Ebene fällt. Alle diese Komponenten liegen entweder in der Ebene ε selbst oder sie projizieren sich auf diese Ebene in

wahrer Größe. In diesem Risse kann daher auch die Zusammensetzung von $\mathfrak{P}_A$ und $\mathfrak{Q}_A$ zu $\mathfrak{R}_A$ und von $\mathfrak{P}_\varepsilon$ und $\mathfrak{Q}_\varepsilon$ zu R_ε ohne weiteres vorgenommen werden. Hiermit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Die Wellenmittellinie AB schneidet von dem Kraftkreuze $\mathfrak{R}_A \mathfrak{R}_\varepsilon$ auf jeden Fall eine Kraft, nämlich $\mathfrak{R}_A$. Soll sie eine Nulllinie sein, so muß sie zugleich auch die andere Kraft $\mathfrak{R}_\varepsilon$ schneiden. In diesem Falle kann man $\mathfrak{R}_\varepsilon$ nach dem zweiten Stützpunkte B verlegen. Ein an den Stützpunkten A und B angreifendes Kraftkreuz kann aber die Welle nicht in Umdrehung versetzen; es bringt nur Auflagerkräfte in den Lagern hervor. Man erkennt hieraus, daß AB nur für den Fall des Gleichgewichtes der Welle zu einer Nulllinie wird. Dies hätte man auch schon daraus schließen können, daß nach der Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen um die Wellenmittellinie die Summe der Momente aller äußeren Kräfte für diese Linie als Momentenachse zu Null werden muß, wobei noch zu beachten ist, daß die Auflagerkräfte zu dieser Momentensumme nichts beitragen.

Anmerkung. Man erkennt hieraus auch, wie man die Auflagerkräfte für eine Welle ermittelt, die an beliebig aufgesteckten Rädern oder Armen irgend welche Lasten aufnimmt, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie sich an der Welle Gleichgewicht gegen Drehung halten. Man verlege jede Kraft parallel zu sich selbst in der senkrecht zur Wellenmittellinie gezogenen Ebene nach der Mittellinie. Alle bei dieser Parallelverlegung auftretenden Kräftepaare halten sich wegen der vorher genannten Bedingung im Gleichgewichte und brauchen daher nicht weiter beachtet zu werden. Dann kann man von jeder einzelnen der nach der Mittellinie verlegten Lasten die Auflagerkräfte auf gewöhnliche Weise ermitteln. Nachträglich findet man den gesamten Auflagerdruck an jeder Stütze durch geometrische Summierung aus den einzeln bestimmten und hierbei auch der Richtung nach gekennzeichneten Auflagerkräften.

21. Aufgabe. An dem in Abb. 73 in drei Rissen dargestellten zylindrischen Körper wirken die Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$. Man soll diese auf eine Einzelkraft $\mathfrak{R}$, die durch den Mittelpunkt des Zylinders geht, und ein resultierendes Moment $\mathfrak{M}$ zurückführen.

Lösung. $\mathfrak{R}$ erhält man einfach durch Parallelverlegung der Kräfte $\mathfrak{P}$ nach dem Mittelpunkte A des Zylinders, wo sie graphisch summiert werden können. Die Seiten des hierfür zu bildenden Kraftteckes sind in der Abbildung in allen drei Rissen durch punktierte Linien angegeben; nur die Seite $\mathfrak{R}$ selbst ist durch einen starken Strich hervorgehoben.

Um das Moment 𝔐 zu finden, ermittelt man in jedem Risse die Flächeninhalte der durch Schraffierung hervorgehobenen Momentendreiecke. Die algebraische Summe dieser Flächeninhalte gibt die Projektion von 𝔐 auf die zu der betreffenden Zeichenebene senkrecht stehende Achse an. 𝔐 selbst findet man als geometrische Summe der drei Komponenten M_x, M_y, M_z.

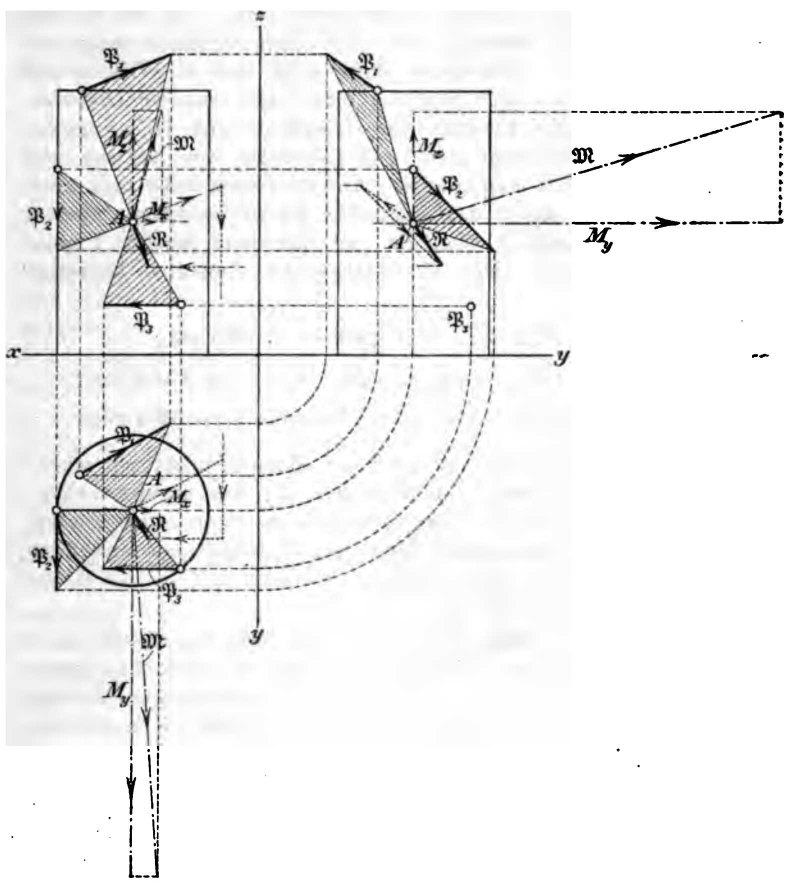


Abb. 73.

Die Abbildung ist im Maßstabe gezeichnet und zwar ist angenommen worden, daß alle Längen im Verhältnisse 1 : 40 gegen die natürliche Größe des Körpers verkleinert seien. Als Kräfte-

maßstab soll 1 mm = 20 kg gelten. Natürlich muß man, um die Größe einer Kraft hiernach aus der Zeichnung entnehmen zu können, zuerst die wahre Länge der ihr entsprechenden Strecke bestimmen, von der unmittelbar nur die Projektionen gegeben sind. Dies kann aber nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie leicht ausgefüht werden.

Aus beiden Maßstäben folgt auch der Maßstab, nach dem die Flächen der Momentendreiecke auszumessen sind. Von der Grundlinie, die die Kraft darstellt, hat jeder mm die Bedeutung von 20 kg und von dem Hebelarme stellt jeder mm in Wirklichkeit 40 mm oder 0,04 m vor. Beachtet man noch, daß der Dreiecksinhalt nur das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe angibt, so folgt, daß jeder qmm des Dreiecksinhaltes ein Moment von $2 \cdot 20 \cdot 0{,}04$ oder 1,6 mkg angibt. Anstatt dessen kann man auch für jedes Dreieck sofort den doppelten Inhalt berechnen (indem man die Division mit 2 wegläßt) und hat dann hierfür 1 qmm = 0,8 mkg zu setzen. Die Ausmessung der doppelten Dreiecksflächen lieferte

$$M_x = 78{,}8 - 97{,}5 = - 18{,}7 \text{ qmm} = - 15{,}0 \text{ mkg}$$
$$M_y = 241 + 107 - 105 = + 243 \text{ qmm} = + 194{,}4 \text{ mkg}$$
$$M_z = 102{,}5 + 77 - 105 = + 74{,}5 \text{ qmm} = + 59{,}6 \text{ mkg}.$$

Als Maßstab für das Auftragen der Momentenvektoren wurde 1 mm = 4 mkg gewählt. Dabei mußte M_x des negativen Vorzeichens wegen im Sinne der negativen X-Achse aufgetragen werden. Für die Größe des resultierenden Momentes $\mathfrak{M}$ erhält man schließlich (nach Ermittelung der wahren Länge) 204 mkg und für die Größe der Resultierenden $\mathfrak{R}$ 148 kg.

22. Aufgabe. Eine Welle (etwa die Schwungradwelle einer Dampfmaschine) ist in zwei Lagern A und B (Abb. 74) unterstützt und trägt Lasten (Gewicht, Riemenzug u. dgl.) die in drei verschiedenen Ebenen, I (vertikal), II (horizontal) und III (unter 30° gegen II geneigt) enthalten sind. Man soll das resultierende Biegungsmoment für verschiedene Querschnitte ermitteln.

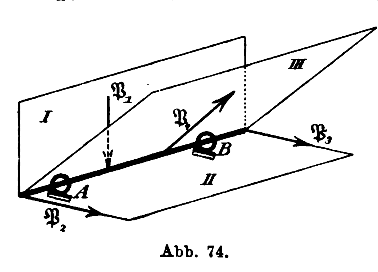


Abb. 74.

Lösung. Um das zur Berechnung auf Biegungsfestigkeit erforderliche Biegungsmoment für einen irgendwie belasteten Stab in Bezug auf einen bestimmten Querschnitt zu erhalten, denkt man

sich alle Lasten auf der einen Seite, gewöhnlich links vom Querschnitte, zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehenden Resultierenden und einem resultierenden Momente zusammengefaßt. Steht der Momentenvektor des resultierenden Momentes senkrecht zur Stabachse, so gibt er unmittelbar das Biegungsmoment für den Querschnitt an. Im andern Falle wird das Biegungsmoment durch die zur Stabachse senkrecht stehende Komponente des Momentenvektors angegeben, während die in die Richtung der Stabachse fallende Komponente das zu einer Beanspruchung auf Verdrehen führende Torsionsmoment angibt.

Wenn die Lasten, wie in Abb. 74, die Stabachse sämtlich schneiden, kommen übrigens überhaupt keine Torsionsmomente vor. Es mag indessen bemerkt werden, daß eine der Kräfte ursprünglich auch an einer auf der Welle aufgekeilten Kurbel oder sonstwie exzentrisch angegriffen haben kann; dann ist sie aber in der durch ihren Angriffspunkt senkrecht zur Welle gezogenen Ebene parallel nach der Wellenachse zu verlegen und in Abb. 74 ist angenommen, daß diese Verlegung bereits ausgeführt sei. Für das Biegungsmoment ist es nämlich ganz gleichgültig, ob die Last an einem Kurbelzapfen oder an dem ihm entsprechenden Punkte der Wellenachse angreift, da die Parallelverlegung nach der Achse nur zu einem Torsionsmomente und nicht zu einer senkrecht zur Wellenachse stehenden Komponente des Momentenvektors führt.

Am einfachsten löst man die Aufgabe derart, daß man zunächst in jeder der drei Lastebenen die darin auftretenden Lasten, Auflagerkräfte und Biegungsmomente für sich untersucht und dann die zugehörigen Momentenvektoren geometrisch summiert. In jeder Lastebene kann man mit Hülfe eines Seilpolygons, dessen Horizontalzug man in allen Fällen gleich groß wählt, die Momentenfläche auftragen, wie es in Abb. 75 (S. 188) geschehen ist. Die Momentenflächen sind schraffiert und mit den Nummern I, II, III der Lastebenen bezeichnet, zu denen sie gehören.

Oben in Abb. 75 ist eine Gesamtansicht der Welle mit Einzeichnung der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$ $\mathfrak{P}_4$ gegeben, von denen sich freilich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ als Punkte projizieren. Daneben steht eine Seitenansicht, in der sich $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ decken. Noch etwas weiter rechts sind in der Seitenansicht die Richtungen und Pfeile der Momentenvektoren $\mathfrak{M}_{I}$, $\mathfrak{M}_{II}$, $\mathfrak{M}_{III}$ angegeben, die zu den Biegungsmomenten in den Lastebenen I, II, III gehören.

Gerade diese Festsetzung der Pfeile erfordert eine sorgfältige Überlegung, zu der man sich am besten der axonometrischen Übersichtsfigur in Abb. 74 behufs Erleichterung der Vorstellung bedient. Dabei denke man daran, daß es sich um das Biegungs-

moment für einen Querschnitt zwischen den Lagern *A* und *B* handeln soll und daß man von den Kräften an jenem Teile der Welle bis zu dem betrachteten Querschnitte hin, der zum Lager *A*

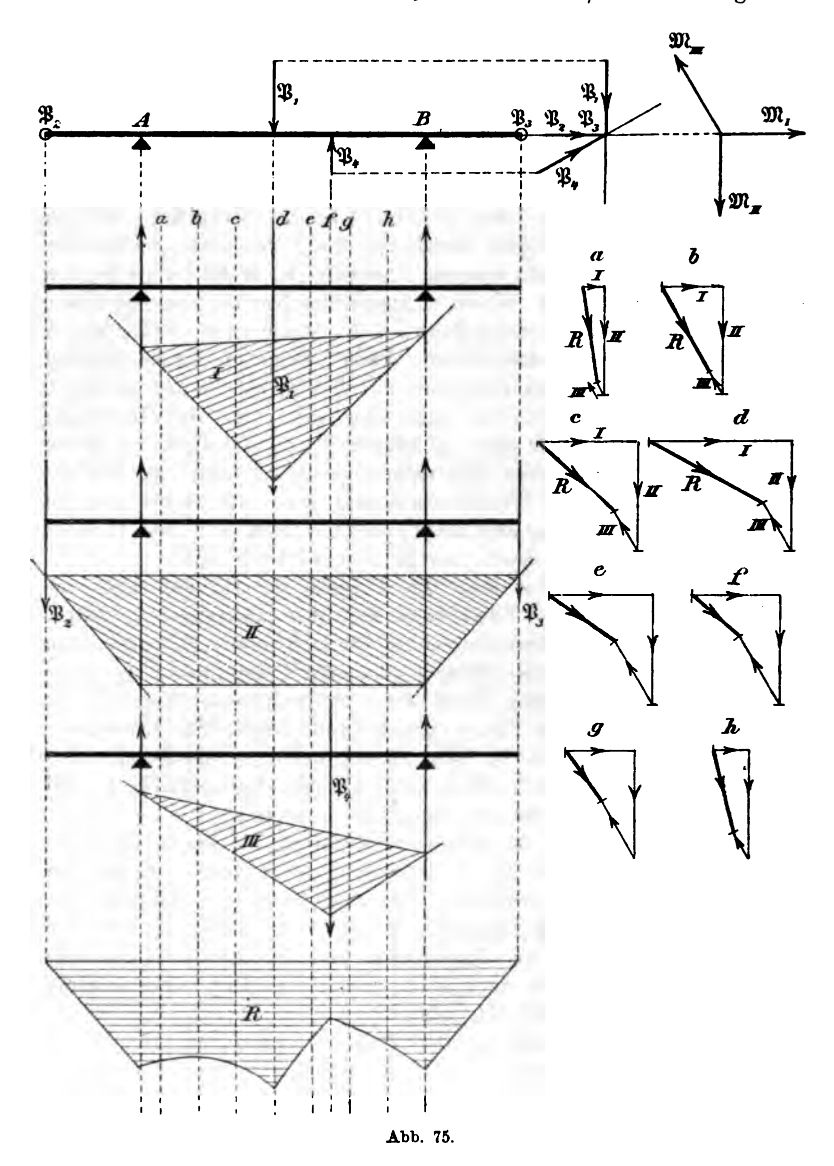


Abb. 75.

gehört, die Momente zu nehmen hat. In der Lastebene I wirkt die Kraft $\mathfrak{P}_1$ nach abwärts; der zugehörige Auflagerdruck in A geht nach oben und das Moment des Auflagerdruckes dreht im Uhrzeigersinne für einen vorn stehenden Beschauer. Nach dieser Seite ist daher $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ rechtwinklig zur Ebene I abzutragen, wie es in der rechten oberen Ecke von Abb. 75 geschehen ist. — In der Lastebene II treten die beiden Lasten $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ außerhalb der Stützpunkte auf; die zugehörigen Auflagerkräfte haben den entgegengesetzten Pfeil und wenn die Belastung symmetrisch ist ($\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_3$ und beide gleich gelegen), so sind auch die Auflagerkräfte gleich und ebenso groß wie eine der Lasten. Für einen zwischen A und B gelegenen Querschnitt hat man dann an dem nach A hin liegenden Teile der Welle ein Kräftepaar, das von oben her gesehen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Der Pfeil von $\mathfrak{M}_{\mathrm{II}}$ ist daher nach abwärts einzutragen, wie es auch auf der bereits erwähnten kleinen Übersichtsfigur geschehen ist. Auf dieselbe Weise findet man, daß der Pfeil von $\mathfrak{M}_{\mathrm{III}}$ nach links oben zeigen muß.

Diese Bemerkungen bezogen sich auf die Richtungen der Momentenvektoren, während die Größen für die verschiedenen, in der Abbildung mit a, b, c .... bezeichneten Querschnitte sofort aus den Momentenflächen I, II, III entnommen werden können. Da nämlich der Horizontalzug bei allen drei Seilpolygonen gleich groß gewählt wurde (die zu den Seilpolygonen gehörigen Kräftepläne wurden in der Abbildung fortgelassen), geben die auf den Vertikalen a, b u. s. f. durch die Momentenflächen gebildeten Abschnitte unmittelbar ein Maß für die Größen der Biegungsmomente und daher auch für die zugehörigen Momentenvektoren ab.

Nach diesen Vorbereitungen kann man zur graphischen Summierung der Momentenvektoren schreiten. Die hierzu dienenden Polygone sind auf der rechten Seite der Abbildung untergebracht und einzeln mit den Buchstaben a bis h der Querschnitte bezeichnet, zu denen sie gehören. An Stelle von $\mathfrak{M}_{\mathrm{I}}$ ist in den Polygonen kürzer I geschrieben u. s. f. Die Pfeile von I, II, III konnten unmittelbar aus der dafür vorher gegebenen Übersichtsfigur, die Größen mit dem Zirkel aus den Momentenflächen I, II, III übertragen werden. Die vierte Seite des Viereckes gibt jedesmal den resultierenden Momentenvektor an; in den Figuren ist R dazu geschrieben. Mit R kennt man zugleich das Biegungsmoment, das ermittelt werden sollte.

Hierbei ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß die resultierenden Momentenvektoren für die einzelnen Querschnitte nicht nur in den Größen, sondern auch der Richtung nach voneinander abweichen. Denkt man sich jeden Momentenvektor im zugehörigen

Punkte der Stabachse angeheftet, so bildet ihre Aufeinanderfolge eine windschiefe Fläche.

Auf die Richtungen der Momentenvektoren und auch auf die Richtung, nach der die Durchbiegung der Welle an einer bestimmten Stelle erfolgt, braucht man aber gewöhnlich nicht weiter zu achten. Bei kreisförmigem Querschnitte ist es für die Beanspruchung des Materials schon an sich gleichgültig, in welcher Richtung die Biegung erfolgt und überdies dreht sich die Welle, während die Kraftebenen fest liegen, so daß jeder Momentenvektor ohnehin der Reihe nach alle Richtungen relativ zum Querschnitte einnimmt.

Kümmert man sich hiernach nur um die absolute Größe der Biegungsmomente, so kann man diese für alle untersuchten Querschnitte in einer besonderen Figur übersichtlich zusammenstellen, indem man von jedem Punkte der Wellenachse aus eine Ordinate zieht, die gleich der Seite R im zugehörigen Momentenvektorenpolygone gemacht wird. Am unteren Ende der Abbildung ist die dadurch erhaltene Momentenfläche durch Schraffierung hervorgehoben und mit dem Buchstaben R bezeichnet. Für jeden Querschnitt der Welle findet man daraus das zugehörige Biegungsmoment durch Multiplikation der Ordinate der Momentenfläche mit dem vorher für alle Seilpolygone übereinstimmend gewählten Horizontalzuge.

Hierzu mag noch bemerkt werden, daß die untere Grenzlinie der Momentenfläche R teils durch gerade Linien, teils durch Hyperbelbögen gebildet wird. Rechnerisch läßt sich diese Behauptung, auf die aber im übrigen nicht viel ankommt, leicht beweisen.

23. *Aufgabe. Längs einer Geraden AB sind Kräfte in stetiger und der Größe nach gleichförmiger Verteilung rechtwinklig zu AB angebracht, so daß die graphische Darstellung der Kraftverteilung (axonometrische Zeichnung in Abb. 76) einen Viertelumlauf einer Schraubenfläche ausmacht. Man soll die Kräfte zu einem Kraftkreuze zusammensetzen und die Zentralachse des von ihm gebildeten Kräftesystemes aufsuchen.*

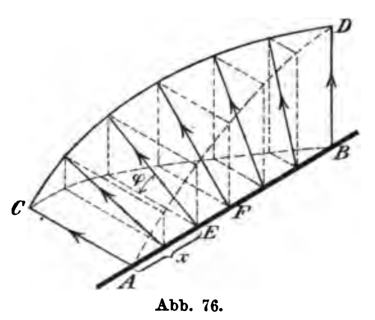


Abb. 76.

Lösung. Im vorliegenden Falle kann man jede Kraft in zwei rechtwinklige Komponenten zerlegen, die in den Ebenen BAC und BAD enthalten sind. In jeder dieser Ebenen sind alle Komponenten parallel zueinander und sie lassen sich leicht zu einer Resultierenden vereinigen. Beide

Resultierende bilden ein Kraftkreuz, das den gegebenen Kräften gleichwertig ist.

Bezeichnet man, um die Rechnung durchzuführen, AB mit l und den Abstand eines zwischen A und B liegenden Punktes E von A mit x, so ist der Winkel φ, den die Richtung der Kraft in diesem Punkte mit der horizontalen Richtung AC bildet,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{l} \cdot$$

Wenn die der Größe nach konstante Belastungsintensität mit p bezeichnet wird, so daß also $p dx$ die am Längenelemente dx angreifende Kraft angibt, erhält man für deren Vertikalprojektion

$$p dx \sin \varphi \quad \text{oder} \quad p dx \sin \frac{\pi x}{2 l} \cdot$$

Die Summe der Vertikalkomponenten V beträgt daher

$$V = p \int_0^l \sin \frac{\pi x}{2l} dx = p \frac{2l}{\pi} \cdot$$

Der Abstand zwischen A und V, der mit v bezeichnet werden mag, ergibt sich aus der Momentengleichung

$$Vv = p \int_0^l x \sin \frac{\pi x}{2l} dx = p \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2$$

und hiernach

$$v = \frac{2l}{\pi} \cdot$$

Die Resultierende der Horizontalkomponenten H wird ebenso groß als V und hat den Abstand $\frac{2l}{\pi}$ vom andern Endpunkte B. Hiermit ist das Kraftkreuz vollständig bekannt.

Verlegt man ferner, um das Kräftesystem auf eine Resultierende und ein resultierendes Moment zurückzuführen, die Kräfte H und V nach dem in der Mitte zwischen A und B liegenden Punkte F, so geben sie dort eine Resultierende, die mit der horizontalen Richtung von AC einen Winkel von 45^0 einschließt und deren Größe gleich $V\sqrt{2}$ oder

$$p \frac{2l}{\pi} \sqrt{2}$$

ist. Das bei der Parallelverlegung von V auftretende Moment hat die Größe

$$V\left(\frac{2l}{\pi} - \frac{l}{2}\right) \quad \text{oder} \quad pl^2\frac{4-\pi}{\pi^2}$$

und der Momentenvektor ist gleich gerichtet und hat gleichen Pfeil mit AC. Ebenso groß und senkrecht nach oben gerichtet ist der Momentenvektor des bei der Parallelverlegung von H nach F auftretenden Kräftepaares. Der resultierende Momentenvektor schließt daher mit der horizontalen Ebene BAC ebenfalls einen Winkel von 45^0 ein und hat die Größe

$$pl^2\frac{4-\pi}{\pi^2}\sqrt{2}.$$

Da die Resultierende und der Vektor des resultierenden Momentes auf die gleiche unter 45^0 durch F gezogene, zu AB senkrechte Linie fallen, ist diese die Zentralachse des Kräftesystemes. AB ist natürlich eine Nulllinie.

24. Aufgabe. Eine dreieckige Tischplatte wird, wie Abb. 77 im Grundrisse und Aufrisse zeigt, durch sechs Beine gehalten, von denen je zwei, die von derselben Ecke der Platte ausgehen, in einer senkrechten Ebene liegen. Auf die Tischplatte wirkt eine beliebig gegebene Kraft 𝔓; man soll die dadurch in den Beinen hervorgebrachten Stabspannungen berechnen.

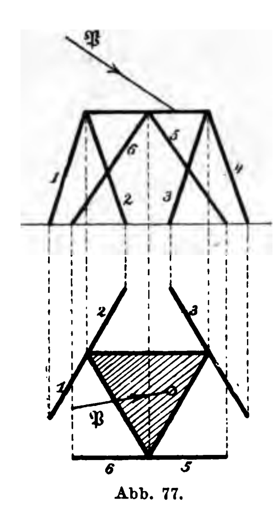


Abb. 77.

Lösung. Man denke sich jede der sieben Kräfte (𝔓 und die sechs Stabkräfte) in eine Komponente zerlegt, die in der Ebene ε der Tischplatte liegt, und in eine zweite, die rechtwinklig zu ε steht. Als Punkt A ist demnach hier der unendlich ferne Punkt einer zu ε gezogenen Normalen gewählt. Wegen der hier vorliegenden besonderen Anordnung fallen sowohl die vertikalen als die in der Ebene ε liegenden Komponenten von je zwei zusammen gehörigen Beinen (1 und 2 oder 3 und 4 oder 5 und 6) auf dieselben Geraden. Man zerlege die ε-Komponente von 𝔓 (die gleich der Strecke 𝔓 im Grundrisse ist) in bekannter Weise nach den drei Richtungslinien 1, 2; 3, 4 und 5, 6 und ebenso die Vertikalkomponente von 𝔓 nach den durch die drei Ecken der Platte gezogenen Vertikalen. Die letzte Zerlegung wird am einfachsten nach der schon im ersten Bande (in § 23, S. 160 der 2. Auflage) gegebenen Anleitung ausgeführt.

Nachdem dies geschehen ist, kennt man sowohl die vertikale

als die horizontale Komponente der Resultierenden von je zwei zusammen gehörigen Stabspannungen. Man braucht daher nur noch beide Komponenten zu einer Resultierenden zu vereinigen und diese nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen (oder auch jede einzelne Komponente nach den beiden Stabrichtungen zu zerlegen und die Spannungen zu summieren).

Anmerkung. Auch dann, wenn die durch je zwei zusammengehörige Beine gelegten Ebenen nicht senkrecht stehen, sondern ganz beliebig geneigt sind, kann man das hier angewendete Verfahren, das schneller als das früher beschriebene, allgemein anwendbare, zum Ziele führt, mit einer geringen Abänderung benutzen. Man suche den Schnittpunkt A der drei Ebenen auf und zerlege alle Kräfte in Komponenten durch A und Komponenten in ε. Auch dann fallen, worauf die Vereinfachung beruht, die Komponenten der Spannungen von je zwei zusammengehörigen Beinen paarweise auf dieselbe Gerade. Die A-Komponente von $\mathfrak{P}$ ist dann nach den drei Richtungen zu zerlegen, die von A nach den Ecken der Tischplatte gehen, während sich im übrigen an dem vorher beschriebenen Verfahren nichts ändert. — Ganz ähnlich verfährt man auch, wenn die sechs Stäbe nicht in einem Punkte der Tischplatte, sondern in einem Punkte des Fußbodens paarweise zusammentreffen. Als Ebene ε ist dann die Fußboden-Ebene und als Punkt A wie vorher der Schnittpunkt der drei durch je zwei zusammenstoßende Stäbe gelegten Ebenen zu wählen.

Vierter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

---

§ 31. Die Zahl der notwendigen Stäbe.

In der Ebene seien n Punkte gegeben, die durch Linien von unveränderlicher Länge zu einer in sich unverschieblichen Figur miteinander verbunden werden sollen. Es fragt sich, wieviel Verbindungslinien hierzu erforderlich sind. Wir denken uns zunächst drei Punkte durch drei Linien zu einem Dreiecke verbunden. Diese drei Punkte können dann ihre Lage relativ zueinander nicht mehr ändern, da die Gestalt des Dreieckes durch die Längen der drei Seiten vollständig bestimmt ist. Ein vierter Punkt kann durch zwei weitere Linien, die nach zwei Eckpunkten des Dreieckes geführt sind, an dieses angeschlossen werden. Man muß hierbei nur den Ausnahmefall vermeiden, daß die Richtungen beider Verbindungslinien auf dieselbe Gerade fallen, weil sonst immerhin noch eine unendlich kleine Beweglichkeit des angeschlossenen Punktes zurückbliebe. Auf diesen Umstand werde ich in der Folge noch ausführlicher zurückkommen.

Auch jeder weitere Punkt kann an die bereits vorhandene Figur durch zwei neue Verbindungslinien, die nach irgend zwei von deren Eckpunkten geführt sind, unverschieblich angeschlossen werden. Man erkennt daraus, daß man im allgemeinen doppelt soviel Verbindungslinien nötig hat, als Punkte angeschlossen werden sollen. Nur im Anfange, bei der Verbindung der drei ersten Punkte zu einem Dreiecke kommt man

mit weniger Linien aus: man braucht hier nur drei Verbindungslinien, während das Doppelte der Anzahl der dadurch miteinander verbundenen Punkte sechs beträgt. Man kann also sagen, daß man im Anfange drei Linien spart, im übrigen aber doppelt soviele Linien als Punkte nötig hat. Die Zahl m der zur Herstellung der unveränderlichen Figur mit n Ecken erforderlichen Verbindungslinien beträgt daher, zunächst wenigstens für die hier vorausgesetzte Bildungsweise der Figur

$$m = 2n - 3. \tag{33}$$

Der Zusammenhang dieser rein geometrischen Betrachtung mit der Lehre von den Tragkonstruktionen liegt auf der Hand: auch von einem „Binder“ wird in erster Linie verlangt, daß er eine in sich unverschiebliche Figur bilde. An Stelle der Verbindungslinien treten hier die Stäbe und an diese wird zur Aufrechterhaltung des Zusammenhanges nur die Anforderung gestellt, daß sie ebenso wie vorher die Verbindungslinien eine Entfernungsänderung ihrer Endknotenpunkte zu verhüten vermögen, d. h. es genügt, wenn sie nur gegen Zug- oder Druckbeanspruchung hinreichend widerstandsfähig sind. Gleichung (33) gibt daher zugleich die Zahl der notwendigen Stäbe in einem „Binder“ oder allgemeiner gesagt in einem ebenen Fachwerke an.

Natürlich kann man nachträglich auch noch zwischen irgend zwei andern Punkten, zwischen denen vorher noch keine unmittelbare Verbindung bestand, einen Stab einschalten, ohne dadurch an der Unverschieblichkeit der Figur etwas zu ändern. Die Figur ist dann, wie man sagt, geometrisch überbestimmt und der für den Zusammenhang entbehrliche Stab wird als ein überzähliger Stab bezeichnet. Übrigens braucht nicht gerade der zuletzt eingefügte als der überzählige Stab betrachtet zu werden; man wird, nachdem er eingesetzt ist, auch diesen oder jenen von den übrigen Stäben fortnehmen können, ohne die Unverschieblichkeit der Figur dadurch aufzuheben. Wenn man von den überzähligen Stäben redet, handelt es sich daher mehr um deren Anzahl, die nach

Gleichung (33) leicht festgestellt werden kann, als um eine bestimmte Bezeichnung jener Stäbe, die als überzählige angesehen werden sollen. In dieser Hinsicht dürfen wir vielmehr die Wahl innerhalb gewisser Grenzen nach Willkür treffen.

Wenn aber das Fachwerk auf die vorher beschriebene Weise, ohne nachträgliche Beifügung überzähliger Stäbe aufgebaut wurde, darf jedenfalls keiner von den Stäben mehr entfernt werden, ohne die Unverschieblichkeit aufzuheben. Schon aus der Art des Aufbaues geht hervor, daß alle Stäbe nötig sind, um Relativbewegungen der Punkte gegeneinander auszuschließen. Denken wir uns, um dies weiter auszuführen, einen bestimmten Stab fortgenommen und dafür, nachdem eine kleine Gestaltänderung der Figur eingetreten ist, zwischen denselben Knotenpunkten einen andern eingesetzt, der sich von dem früheren in der Länge ein wenig unterscheidet, wie es der jetzt bestehenden Entfernung beider Punkte entspricht. Dann erhalten wir eine Figur, die im übrigen geradeso aufgebaut ist, wie die vorige und die daher aus denselben Gründen wie diese selbst wieder unverschieblich ist. Die Angabe aller Stablängen genügt, um die Figur auf demselben Wege wie die erste aufzutragen.

Um beide bequem miteinander vergleichen zu können, wollen wir sie uns mit einem der Stäbe, die ihre Länge nicht änderten, zur Deckung gebracht denken. Wir haben dann die ursprüngliche Lage der Knotenpunkte und die neue Lage nach der Gestaltänderung unmittelbar nebeneinander und die Verbindungslinie gibt die Verschiebungsrichtung an, in der sich jeder Knotenpunkt während der (am besten unendlich klein zu denkenden) Gestaltänderung bewegt hat. Hierbei werden übrigens manche der Knotenpunkte überhaupt nicht von der Gestaltänderung der Figur betroffen worden, sondern während derselben in Ruhe geblieben sein. Denken wir uns den betreffenden Stab von neuem beseitigt, so gibt die erhaltene Figur genauen Aufschluß über die Bewegungen der Knotenpunkte, die im nächsten Augenblicke möglich sind. Hierbei muß man nur beachten, daß die Bewegung aller Punkte

auch im umgekehrten Sinne möglich ist, indem sich die Entfernung der Knotenpunkte, zwischen denen der beseitigte Stab ursprünglich lief, ebensogut vergrößern als verkleinern kann.

Wir wollen jetzt irgend zwei Knotenpunkte ins Auge fassen, zwischen denen kein Stab besteht und von denen sich mindestens der eine während der besprochenen Gestaltänderung der Figur bewegt. Die Entfernung dieser beiden Knotenpunkte wird sich während der Gestaltänderung im allgemeinen ebenfalls ändern. Es kann freilich auch sein, daß sich beide Punkte in der ursprünglichen Gestalt zufällig gerade im Maximum oder im Minimum der Entfernung befanden, das mit den Längen der übrigen Stäbe verträglich ist. In diesem Falle wird bei einer unendlich kleinen Gestaltänderung zunächst keine Entfernungsänderung oder wenigstens nur eine, die von der zweiten Ordnung unendlich klein ist, eintreten. Dieser Fall mag aber zunächst ausgeschlossen sein. Ändert sich dagegen die Entfernung während der Gestaltänderung, so genügt es, beide Knotenpunkte durch einen neuen Stab miteinander zu verbinden, um die Unverschieblichkeit der Figur wieder herzustellen. Denn die Art der Bewegung, die vorher noch möglich war und die einem einzigen Freiheitsgrade des ganzen Systems entsprach, hatte die Entfernungsänderung der beiden Knotenpunkte zur notwendigen Folge und sobald diese durch Anbringen des neuen Stabes ausgeschlossen wird, fällt damit auch die Möglichkeit der Bewegung selbst.

Wäre freilich der neu anzubringende Stab gerade im Maximum oder Minimum seiner Länge, so könnte er wenigstens unendlich kleine Gestaltänderungen nicht verhindern; dieser Ausnahmefall ist daher zu vermeiden. Ferner kann natürlich auch die Zufügung eines Stabes zwischen zwei Knotenpunkten, die ihren Abstand während der besprochenen Gestaltänderung überhaupt nicht ändern, die also z. B. während derselben beide in Ruhe bleiben, die Unverschieblichkeit der Figur nicht herbeiführen.

Wir sind durch diese Betrachtung zu dem Schlusse gelangt, daß ein Stab durch einen passend gewählten andern

ersetzt werden kann. Diese Stabvertauschung spielt, wie wir noch sehen werden, in der Theorie des Fachwerkes eine wichtige Rolle. Wir können dadurch von solchen Fachwerken, die nach dem bisher allein angewendeten, einfachsten Verfahren zusammengesetzt wurden, zu andern aufsteigen, die eine davon ganz abweichende Gliederung besitzen. An der Zahl der notwendigen Stäbe wird aber durch die Stabvertauschung jedenfalls nichts geändert. Wir schließen daraus, daß Gleichung (33) auch für die nach anderm Bildungsgesetze, als dem zuvor angewendeten gegliederten Fachwerke gültig bleibt. Hierfür werden wir übrigens alsbald noch einen strengeren Nachweis kennen lernen.

Außer der geometrischen Untersuchung der Fachwerkfigur, auf die wir uns bisher beschränkten, bleibt noch die statische Aufgabe zu lösen, die in den Stäben des Fachwerkes bei gegebenen Lasten auftretenden Spannungen zu ermitteln. Die Lösung gestaltet sich sehr einfach, wenn das Fachwerk so aufgebaut ist, wie es im Eingange des Paragraphen beschrieben wurde, wenn es also durch fortgesetzte Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe zuerst an ein als Ausgangsfigur dienendes Dreieck und weiter an die jedesmal schon vorhandene Figur erzeugt werden kann. In diesem Falle kann man ohne weiteres einen Kräfteplan zeichnen, indem man mit dem zuletzt angeschlossenen Knotenpunkte beginnt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen. Nachdem die Spannungen dieser Stäbe durch Zeichnen eines Kräftedreieckes ermittelt sind, wendet man sich zu dem vorher angeschlossenen Knotenpunkte, dann zu dem diesem vorausgehenden u. s. f., wobei man jedesmal nur zwei Stäbe vorfindet, deren Spannungen noch nicht aus dem bereits gezeichneten Teile des Kräfteplanes bekannt sind. Aus dem Kraftecke für den gerade vorliegenden Knotenpunkt findet man sofort die bis dahin unbekannt gebliebenen beiden Stabspannungen. Dieses Verfahren läßt sich bis zum Ausgangsdreiecke hin fortführen und auch die Stabspannungen des Ausgangsdreieckes erhält man in derselben Weise.

Wegen der einfachen Berechnung sollen die in dieser

Weise gegliederten Fachwerke als einfache Fachwerke bezeichnet werden. Zugleich werden sie auch als statisch bestimmte Fachwerke bezeichnet, weil man bei gegebenen Lasten alle Stabspannungen ohne Zuhülfenahme der Elastizitätstheorie bloß aus den Gleichgewichtsbedingungen der Statik finden kann. Nicht alle statisch bestimmten Fachwerke sind indessen zugleich einfache. Aus den einfachen Fachwerken kann man nämlich durch das zuvor besprochene Mittel der Stabvertauschung andere erhalten, die dann zwar immer noch statisch bestimmt sind, für die man aber einen Kräfteplan auf die bisher besprochene Art nicht mehr zu zeichnen vermag. Gerade mit solchen verwickelteren Fällen werden wir es in der Folge vorwiegend zu tun haben.

Statisch unbestimmt sind dagegen die vorher zugleich als „geometrisch überbestimmt" bezeichneten Fachwerke, in denen überzählige Stäbe vorkommen. Hat man auch nur einen überzähligen Stab, so vermag man sehr viele Wertsysteme für die Stabspannungen anzugeben, die an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellen und die daher vom rein statischen Gesichtspunkte aus alle gleich gut möglich sind. Man kann z. B. annehmen, daß die Spannung des überzähligen Stabes gleich Null sei. Dann ist es ebensogut, als wenn der Stab gar nicht vorhanden wäre und für den dann übrig bleibenden statisch bestimmten Rest kann man die in ihm vorkommenden Stabspannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen in eindeutiger Weise berechnen. Die Spannung des überzähligen Stabes könnte aber auch etwa gleich 1 t Zug oder 2 t Druck u. s. f. angenommen werden. Zu jeder dieser Annahmen gehört ein anderes System von Spannungen in dem statisch bestimmten Reste. Man kann sich nämlich, um dieses zu finden, den überzähligen Stab wiederum beseitigt denken, falls man nur in den beiden Knotenpunkten, die er verbindet, dafür äußere Kräfte anbringt, die gleich den von ihm auf diese Knotenpunkte übertragenen Spannungen sind.

Man erkennt daraus, daß man allgemein im geometrisch überbestimmten Fachwerke soviele Stabspannungen willkürlich

annehmen kann, als überzählige Stäbe vorkommen, worauf die übrigen so ermittelt werden können, daß an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird. Natürlich kann von allen diesen unendlich vielen Wertsystemen der Stabspannungen oder „Spannungsbildern", wie man dafür oft zu sagen pflegt, nur eines wirklich zustande kommen. Die bloßen Gleichgewichtsbedingungen genügen aber nicht, um dieses unter den zunächst als möglich erkannten herauszufinden. Dazu muß man auf die elastischen Formänderungen der Stäbe eingehen, wie später gezeigt werden wird. In diesem Abschnitte soll aber von den statisch unbestimmten Fachwerken nicht weiter die Rede sein.

Ein Verfahren, das auf alle Fälle zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten statisch bestimmten Fachwerken ausreicht, soll hier sofort angegeben werden, wenn es auch wegen der Umständlichkeit der Rechnung praktisch nicht gut verwendbar ist. Dafür hat es aber den Vorzug, eine grundsätzlich sehr einfache und darum auch besonders leicht verständliche Vorschrift anzugeben, nach der es immer möglich sein muß, die Stabspannungen zu finden. Es eignet sich daher besonders zur Anstellung allgemeiner Betrachtungen über das Spannungsproblem und findet seinen Platz am besten am Eingange zu diesen Untersuchungen. Die für die praktische Ausführung bequemeren Methoden folgen erst in den späteren Paragraphen.

Man denke sich alle Stäbe von 1 bis m numeriert. Einer dieser Stäbe mit der Nummer i hat die unbekannte Stabspannung S_i, wobei durch das Vorzeichen zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden sein soll. Nun betrachte man einen der beiden Knotenpunkte, zwischen denen der Stab i verläuft. Die Gleichgewichtsbedingung erfordert, daß die geometrische Summe aus den an ihm angreifenden Stabspannungen und der daran angebrachten Last gleich Null sein muß. Wir können diese Bedingung auch durch das Anschreiben von zwei Komponentengleichungen ersetzen. Es muß also sowohl die Summe der Horizontalkomponenten als die Summe der Vertikal-

komponenten aller Kräfte gleich Null sein. Die Horizontalkomponente von S_i finden wir aus S_i durch Multiplikation mit dem Kosinus des Neigungswinkels, den die Stabrichtung mit der Horizontalen bildet. Da die Gestalt des Fachwerkes gegeben ist, kennt man alle diese Richtungswinkel; außerdem kann auch das Vorzeichen der Horizontalkomponente von S_i sofort angegeben werden, indem man den Pfeil von S_i an dem Knotenpunkte so einträgt, wie er einer Zugspannung im Stabe i entspricht. Sollte nachher S_i in Wirklichkeit als Druckspannung gefunden werden, so kehrt sich ohnehin das Vorzeichen des Produktes aus S_i und dem Richtungskosinus um, weil S_i dann durch eine negative Zahl angegeben wird. Das unter der ersten Annahme bestimmte Vorzeichen bleibt daher auf jeden Fall richtig.

In jeder der beiden Komponentengleichungen kommen demnach nur die Spannungen S_i u. s. f. der an dem Knotenpunkte angreifenden Stäbe als Unbekannte vor. Denn auch die äußeren Kräfte oder Lasten, sowie deren Komponenten in horizontaler und vertikaler Richtung müssen als gegeben vorausgesetzt werden, wenn die von ihnen hervorgebrachten Stabspannungen berechnet werden sollen.

Nachdem in derselben Weise für alle Knotenpunkte je zwei Komponentengleichungen angeschrieben sind, hat man im ganzen $2n$ Gleichungen, in denen nur die m Stabspannungen vorkommen und die für diese sämtlich vom ersten Grade sind. Man kann also nun die Stabspannungen durch Auflösen dieser Gleichungen berechnen. Dies führt zwar zu umständlichen Zahlenrechnungen (bei der Ermittelung der Determinanten, durch die die Lösung angegeben wird) kann aber zu keinen Schwierigkeiten anderer Art Veranlassung geben.

Hierbei ist jedoch auf einen Umstand wohl zu achten. Jedenfalls müssen nämlich die äußeren Kräfte, die als Lasten an den Knotenpunkten, im übrigen zwar ganz willkürlich angebracht sind, unter sich ein Gleichgewichtssystem bilden, weil sonst überhaupt kein Gleichgewicht möglich wäre. Nachdem wir aber die Gleichgewichtsbedingungen an jedem Knoten-

punkte durch Aufstellung der Komponentengleichungen ausgedrückt haben, ist damit die Bedingung für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte schon mit ausgesprochen. Jene $2n$ Komponentengleichungen enthalten daher mehr, als nur die Bedingungen, denen die Stabspannungen genügen müssen. Drei von ihnen — denn so groß ist die Zahl der zwischen Kräften in der Ebene bestehenden Gleichgewichtsbedingungen — dienen vielmehr zum Nachweise für das Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und für die Ermittelung der Stabspannungen bleiben nur $2n - 3$ Komponentengleichungen übrig.

Am einfachsten stellt man sich die Sache so vor, daß die Lasten an allen andern Knotenpunkten bis auf zwei ganz willkürlich, ohne Rücksicht auf Gleichgewichtsbedingungen, gewählt wurden. Auch an einem der beiden übrigen Knotenpunkte mag noch die Horizontalkomponente der Last beliebig angenommen werden. Dann müssen aber, damit Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften bestehe, die beiden Komponenten der Last am letzten Knotenpunkte, sowie die Vertikalkomponente am vorhergehenden Knotenpunkte den Gleichgewichtsbedingungen entsprechend gewählt werden. Wenn man darauf achtete, daß die beiden Knotenpunkte nicht auf derselben Vertikalen lagen, können die drei Komponenten auch immer, wie man leicht einsieht, sofort in eindeutiger Weise so berechnet werden, daß das Gleichgewicht gesichert ist. Anstatt eines solchen direkten Verfahrens können wir uns dazu aber auch die drei Komponentengleichungen für die betreffenden Richtungen an den beiden Knotenpunkten benutzt denken. Man schreibe diese unter den $2n$ Komponentengleichungen etwa zuletzt an. Die vorausgehenden $2n - 3$ müssen dann zur Ermittelung der Stabspannungen ausreichen. Nachdem sie nach den Stabspannungen aufgelöst sind, bleiben dann in den drei letzten nur noch die drei Komponenten der äußeren Kräfte als Unbekannte übrig.

Durch diese Anordnung vermag man also aus den $2n$ Gleichungen jene $2n - 3$, die zur Berechnung der Stabspannungen zu verwenden sind und jene 3, die nur die Gleich-

gewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften darstellen, sofort auszusondern. Natürlich ist diese Aussonderung, wie man zugleich erkennt, noch auf sehr verschiedene Art möglich. Jedenfalls bleiben aber stets $2n - 3$ Gleichungen zwischen den m unbekannten Stabspannungen zur Verfügung.

Auch hieraus erkennt man — und zwar diesmal ohne jede Voraussetzung über die Gliederung des Fachwerkes —, daß die Zahl der Stäbe

$$m = 2n - 3$$

betragen muß, wenn das Fachwerk statisch bestimmt sein soll. Auch ob etwa ein Ausnahmefall vorliegt, muß sich beim Auflösen der $2n - 3$ Gleichungen herausstellen. Die Gleichungen genügen nämlich nur dann zur Ermittelung der Unbekannten, wenn sie alle unabhängig voneinander sind und sich nicht widersprechen. Sollte eine von ihnen schon eine notwendige Folge der übrigen sein, so müßte sich dies bei Benutzung der Determinanten zur Auflösung darin zeigen, daß die Eliminationsdeterminante (oder die Determinante aus den Koeffizienten der Unbekannten) zu Null würde. Außerdem kann diese Determinante, auch ohne daß eine solche Abhängigkeit der Gleichungen voneinander besteht, zu Null werden. Auch dies entspricht einem Ausnahmefalle. Die Stabspannungen werden dann bei beliebig gegebenen Lasten, wie aus der Lösung der Gleichungen folgt, unendlich groß. Ein solches Fachwerk wäre natürlich für die Ausführung unbrauchbar.

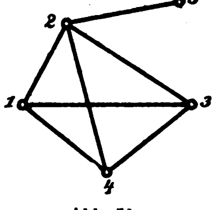


Abb. 78.

Schließlich seien noch beide Fälle an einfachen Beispielen vorgeführt. Um fünf Knotenpunkte unverschieblich miteinander zu verbinden, braucht man, wie aus Gl. (33) hervorgeht, sieben Stäbe. Wollte man diese aber etwa so verteilen, wie in Abb. 78, so würde man den Zweck trotzdem nicht erreichen. Das Viereck mit den beiden Diagonalen hat einen Stab zuviel und dieser fehlt zur Befestigung des fünften Knotenpunktes.

Der andere Fall kommt bei Abb. 79 vor. Hier sind die ersten 4 Knotenpunkte zu einem statisch und geometrisch bestimmten Fachwerke durch die zwischen ihnen gezogenen Stäbe verbunden und auch der letzte Knotenpunkt 5 ist vorschriftsmäßig durch zwei Stäbe angeschlossen. Hier wäre also gegen die Gliederung nichts einzuwenden, wenn nicht die beiden zum Knotenpunkte 5 gehenden Stäbe auf dieselbe Gerade fielen. Dadurch wird der Ausnahmefall bedingt.

Geometrisch erkennt man dies daran, daß sich Punkt 5 senkrecht zur gemeinsamen Richtungslinie beider Stäbe um eine unendlich kleine Strecke zu verschieben vermag, ohne daß sich die Stablängen um mehr als um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung zu ändern brauchten. Oder mit andern Worten: da die Stäbe praktisch ihre Längen immer um kleine Größen zu ändern vermögen, so entsprechen diesen Wege des Knotenpunktes 5, die weit größer sind, als diese Längenänderungen und jedenfalls größer, als man es bei einem Fachwerke im allgemeinen dulden kann. Die Stabverbindung ist, wie man im Volksmunde zu sagen pflegt, „wackelig“.

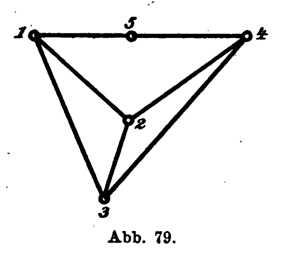


Abb. 79.

Auch vom statischen Gesichtspunkte zeigt sich, daß ein Ausnahmefall vorliegt. Sobald man eine Last am Knotenpunkte 5 anbringt, die zur Stabrichtung rechtwinklig ist, kann kein Gleichgewicht zwischen ihr und den Stabspannungen bestehen. Der Knotenpunkt wird also jedenfalls etwas ausweichen. Sobald dies geschehen ist, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht. Ist der Knotenpunkt unendlich wenig ausgewichen, was man bei unnachgiebigen Stäben allein voraussetzen kann, so kann man nachher ein Kräftedreieck zeichnen, bei dem aber der der Last gegenüberliegende Winkel unendlich klein ist. Die Stabspannungen werden dann unendlich groß.

Unendlich große Stabspannungen sind freilich nicht mehr zu befürchten, wenn man eine Belastung des Knotenpunktes 5 vermeidet, die äußeren Kräfte also nur an den vier übrigen

Knotenpunkten angreifen läßt. Dann kommt aber der Knotenpunkt 5 überhaupt nicht mehr in Betracht und die beiden von ihm ausgehenden Stäbe können durch einen einzigen, unmittelbar zwischen 1 und 4 geführten Stab ersetzt gedacht werden. Das Fachwerk 1, 2, 3, 4 ist daher für solche Lasten zwar stabil, aber zugleich statisch unbestimmt, da es einen Stab zuviel enthält. — Man tut gut, sich diese Dinge an dem einfachen Beispiele genau zu überlegen, weil in den verwickelteren Fällen, die später besprochen werden sollen, die Verhältnisse im allgemeinen ganz ähnlich liegen.

§ 32. Die Grundfigur.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk mit n Knoten enthält, wie wir sahen, $2n - 3$ Stäbe. Stellen wir nun für jeden Knotenpunkt fest, wieviel Stäbe gerade von ihm ausgehen, und addieren alle diese Zahlen, so erhalten wir, da jeder Stab dabei zweimal gezählt wird, $4n - 6$. Die durchschnittliche Anzahl der von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe beträgt hiernach

$$\frac{4n - 6}{n} \quad \text{oder} \quad 4 - \frac{6}{n}.$$

Es müssen also jedenfalls Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens drei Stäbe ausgehen. Ist n kleiner als 6, so sinkt die durchschnittliche Stabzahl unter drei und es müssen dann auch Knotenpunkte mit nur zwei Stäben vorkommen. Wenn aber n mindestens gleich 6 ist, kann es sein, daß von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen. In diesem Falle vermag man den Kräfteplan nicht in der früher besprochenen einfachen Weise zu entwerfen; der Unterschied gegenüber dem andern Falle ist daher ein sehr wesentlicher.

Enthält das gegebene Fachwerk zunächst wenigstens einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen, so mag dieser samt den beiden Stäben fortgelöscht werden. Findet man in dem Reste wiederum einen Knotenpunkt, an dem jetzt nur noch zwei Stäbe angreifen, so mag auch dieser mit seinen Stäben beseitigt werden. Dieses Verfahren soll solange fortgesetzt werden, als es möglich ist, d. h. solange man noch

auf Knotenpunkte stößt, von denen nachher nur noch zwei Stäbe ausgehen. War das Fachwerk nach der im Eingange von § 31 besprochenen Weise aufgebaut, so durchlaufen wir beim fortgesetzten Abbrechen der Knotenpunkte den Vorgang beim Aufbaue im umgekehrten Sinne, bis wir wieder bei dem Ausgangsdreiecke angelangt sind, von dem dann, wenn man will, auch noch eine Ecke abgebrochen werden kann.

Bei einer andern Gliederung des Fachwerkes gelangen wir dagegen schließlich zu einer Figur, in der von jedem Knotenpunkte noch mindestens drei Stäbe ausgehen. Diese Figur heißt die Grundfigur des Fachwerkes. Beim einfachen Fachwerke ist als Grundfigur ein Dreieck (oder, wenn man will, ein einzelner Stab) anzusehen. Die Grundfigur eines nicht einfachen, statisch bestimmten Fachwerkes muß nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen mindestens sechs Knotenpunkte umfassen. Hatte das gegebene Fachwerk überhaupt keinen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgingen, so bildet es, wie wir sagen wollen, selbst eine Grundfigur.

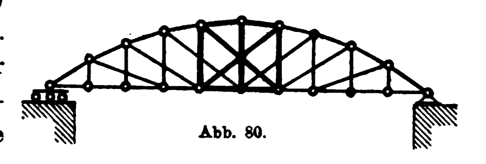
Sind die an den Knotenpunkten des Fachwerkes angreifenden Lasten gegeben, so kann man für alle Stäbe, die nicht zur Grundfigur gehören, die Spannungen ohne weiteres durch einen Kräfteplan ermitteln. Man kann dann alle diese Stäbe fortnehmen, falls man von jenen, die von Ecken der Grundfigur ausgingen, die Spannungen als äußere Kräfte oder Lasten an den Knotenpunkten der Grundfigur anbringt. In der Folge wird es sich daher nur noch darum handeln, die Stabspannungen der Grundfigur zu berechnen, wenn an deren Knotenpunkten gegebene Lasten angreifen.

Als Beispiele für nicht einfache Fachwerke können hier zunächst die schon früher besprochenen zusammengesetzten Polonçeau- oder Wiegmannbinder, Abb. 17 (S. 47) und Abb. 26 (S. 62), angeführt werden. Die Berechnung machte damals freilich, obschon sie eine besondere Überlegung oder die Anwendung eines andern Verfahrens (der Ritterschen Momentenmethode) erforderte, keine wesentlichen Schwierigkeiten. In andern Fällen können diese Schwierigkeiten aber weit größer

werden. Die Grundfigur kann in jenen Fällen leicht aufgefunden werden.

Ein anderes Beispiel führt Abb. 80 vor. Es ist zugleich jenes Beispiel, an dessen Hand sich die Theorie der Grundfiguren zuerst entwickelt hat und das früher zu zahlreichen Erörterungen Veranlassung gegeben hat, bevor die Frage endgültig entschieden war.

Man überzeugt sich zunächst leicht, daß das Fachwerk die notwendige Stabzahl enthält. Der Untergurt zählt in der Abbildung mit Einschluß der Auflagerknotenpunkte 11 Knoten und der Obergurt mit Ausschluß der Auflagerpunkte 9 Knoten. Im ganzen kommen daher 20 Knoten vor, zu deren steifer Verbindung nach Gl. (33) 37 Stäbe erforderlich sind. In der Tat hat man aber 10 Untergurt-, 10 Obergurtstäbe, 9 Vertikalstäbe und 8 Diagonalen, zusammen also 37 Stäbe. Auch wenn man die Zahl der Knoten des Untergurtes allgemeiner gleich a setzt, falls a eine ungerade Zahl bedeutet, die mindestens gleich 5 ist, läßt sich der Nachweis, daß die notwendige Zahl von Stäben bei der Gliederung nach Abb. 80 vorhanden ist, leicht erbringen.


Abb. 80.

Hierbei ist zu beachten, daß Stäbe, deren Richtungslinien sich schneiden, an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden sein sollen. Wenn sich nur zwei Stabrichtungen in einem Punkte treffen, ist es übrigens ziemlich gleichgültig, ob man sich die Stäbe in diesem Punkte verbunden denkt oder nicht. Werden sie miteinander verbunden, so zählt die Verbindungsstelle als neuer Knotenpunkt mit; zugleich zerfällt aber jeder von beiden Stäben in zwei neue, so daß man einen Knotenpunkt und zwei Stäbe mehr hat, wodurch an der Bedingung für die notwendige Stabzahl und an den Stabspannungen nichts geändert wird, solange an dem neu geschaffenen Knotenpunkte keine Lasten angreifen. Da nämlich von diesem Knotenpunkte vier Stäbe ausgehen, von denen je zwei in eine Gerade fallen,

kann nur dadurch Gleichgewicht zustande kommen, daß die Spannungen paarweise gleich groß und von gleichem Vorzeichen sind. Die Spannungen laufen also durch den Knotenpunkt genau in derselben Weise weiter, als wenn keine Verbindung vorhanden wäre und es ist daher für die Berechnung der Stabspannungen am bequemsten, von der etwa vorhandenen Verbindung ganz abzusehen.

Anders ist es aber, wenn sich drei (oder noch mehr) Stäbe in einem Punkte schneiden, wie es in der Mitte von Abb. 80 vorkommt. Vernietet man nur zwei der drei Stäbe an der Kreuzungsstelle miteinander, so wird zwar ebensowenig geändert wie im vorigen Falle. Wenn aber alle drei miteinander verbunden werden, tritt nur ein neuer Knotenpunkt auf, während drei Stäbe in je zwei zerfallen. Man erhält also einen Knotenpunkt und drei Stäbe mehr, d. h. wir haben dann einen Stab zuviel und das Fachwerk wird damit geometrisch überbestimmt und statisch unbestimmt. Hier soll aber vorausgesetzt werden, daß die Stäbe an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden sind.

Die Grundfigur finden wir, indem wir zunächst den linken Auflagerknotenpunkt, hierauf die folgenden Knotenpunkte des Obergurtes und des Untergurtes, von denen alsdann nur noch zwei Stäbe ausgehen, abtrennen und in dieser Weise fortfahren. Dann wird das Fachwerk auch vom rechten Auflagerknoten her in derselben Weise abgebaut. Man behält schließlich in der Mitte die durch starke Striche hervorgehobene Grundfigur übrig. Sie umfaßt sechs Knotenpunkte und neun Stäbe, enthält also die geringste Anzahl von Elementen, die in der Grundfigur eines nicht einfachen Fachwerkes vorkommen können. Sie kann als ein Sechseck mit drei Hauptdiagonalen aufgefaßt werden, denn daß im Untergurte zwei aufeinander folgende Seiten in eine Gerade fallen, macht hierfür keinen Unterschied. — Mit der Berechnung dieser sechseckigen Grundfigur werden wir uns in der Folge noch eingehend beschäftigen.

§ 33. Die Bildungsweisen des Fachwerkes.

Eine Bildungsweise des Fachwerkes, nämlich jene, durch die alle einfachen Fachwerke gewonnen werden können, wurde schon in § 31 eingehend besprochen. Auch jedes nicht einfache Fachwerk, das nicht schon selbst eine Grundfigur bildet, kann aus seiner Grundfigur heraus auf dieselbe Weise, also durch Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe gewonnen werden. Hier handelt es sich nur noch um die Besprechung solcher Bildungsweisen, die zu den Grundfiguren selbst führen.

Eine zweite Bildungsweise, die sehr häufig vorkommt und daher eine genauere Besprechung erfordert, besteht in der Vereinigung von zwei geometrisch und statisch bestimmten Fachwerken zu einem einzigen durch drei Verbindungsstäbe. Auf die genauere Gestalt und Gliederung der beiden Fachwerke, die miteinander verbunden werden sollen, kommt es bei dieser Betrachtung nicht an. Es ist daher am besten, wenn man von ihr zunächst ganz absieht, also nur darauf achtet, daß beide Fachwerke jedenfalls unveränderliche Figuren bilden. Um dies auch in der Ausdrucksweise hervorzuheben, bezeichnet man eine solche unveränderliche Figur als eine Scheibe und stellt sie in der Zeichnung durch einen willkürlich begrenzten Umriß dar, dessen Fläche zur Erhöhung der Übersichtlichkeit zweckmäßigerweise durch eine Schraffierung ausgefüllt wird.

Zwei Stäbe genügen nicht, um zwei Scheiben fest miteinander zu verbinden. Die eine Scheibe kann sich dann immer noch relativ zur andern, aber nur in ganz bestimmter Weise oder, wie man sagt, zwangläufig bewegen. Gehen beide Verbindungsstäbe von demselben Punkte der einen Scheibe aus, wie in Abb. 81, so besteht diese Bewegung in einer Drehung der einen Scheibe gegen die andere um diesen Punkt. Denkt man sich etwa die Scheibe I festgehalten, so kann sich II um den Knotenpunkt G, der durch die beiden Stäbe fest mit II

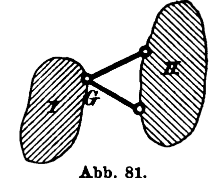


Abb. 81.

verbunden ist, drehen und jeder Punkt von *II* beschreibt dabei einen Kreis, dessen Mittelpunkt *G* ist. Man nennt dann den Knotenpunkt *G* ein Gelenk und sagt, daß beide Scheiben in diesem Gelenke miteinander zusammenhängen.

In Abb. 82 ist angenommen, daß die beiden Verbindungsstäbe nicht von einem gemeinsamen Knotenpunkte ausgehen. Denken wir uns auch jetzt wieder *I* festgehalten, so ist die Bewegung von *II* von verwickelterer Art, als im vorigen Falle. Es ist aber für unsere Zwecke nicht nötig, diese Bewegung auf eine längere Strecke hin zu verfolgen, sondern es genügt, wenn wir sie nur bis zur nächsten, unendlich nahen (oder doch sehr nahen) Lage ins Auge fassen.

Schon aus Band I (§ 20, S. 118 der 2. Aufl.) ist bekannt, daß jede unendlich kleine Bewegung einer starren Figur in ihrer Ebene als Drehung um einen bestimmten Punkt, den Pol der Bewegung, aufgefaßt werden kann. In diesem Punkte schneiden sich die Normalen aller Bahnelemente und man findet ihn daher schon als Schnittpunkt von zwei solchen Normalen.

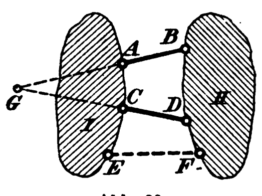


Abb. 82.

Nun kann sich Punkt *B* der beweglichen Figur wegen des Verbindungsstabes *AB* nur auf einem Kreise bewegen, dessen Mittelpunkt *A* und dessen Halbmesser *AB* ist. Hiernach ist *BA* die Normale zu dem von *B* beschriebenen Bahnelemente und ebenso *DC* die Normale zum Bahnelemente des Punktes *D*. Der Schnittpunkt *G* beider Normalen ist daher der Pol der Bewegung der Scheibe *II* relativ zur Scheibe *I* oder auch, nach den gleichen Gründen, umgekehrt der Pol der Bewegung der Scheibe *I* gegen die festgehalten gedachte Scheibe *II*. Solange es nur auf unendlich kleine Verschiebungen ankommt, verhalten sich beide Scheiben genau so, als wenn sie im Punkte *G* durch ein Gelenk zusammenhingen. Wir wollen daher den Punkt *G* als ein imaginäres Gelenk zwischen *I* und *II* bezeichnen.

In einem Gelenke kann zwischen zwei Scheiben eine Kraft von beliebiger Richtung übertragen werden. Diese Kraft heißt

der Gelenkdruck. Gleichgewicht zwischen zwei Scheiben, die in einem Gelenke zusammenhängen, ist nur möglich, wenn die Resultierende der an einer (und dann auch der andern) Scheibe angreifenden Lasten durch den Gelenkpunkt geht. Dies gilt nicht nur für die eigentlichen Gelenke, wie in Abb. 81, sondern auch für das imaginäre Gelenk G der Abb. 82. Zunächst können nämlich zwischen I und II in Abb. 82 nur zwei Stabspannungen längs der Richtungslinien AB und CD übertragen werden. Faßt man aber beide Kräfte zu einer Resultierenden zusammen, so geht diese durch den Schnittpunkt G der Richtungslinien. Sie kann daher als der im Gelenke G übertragene Gelenkdruck betrachtet werden. Kennt man diesen Gelenkdruck nach Größe und Richtung, so folgen daraus auch umgekehrt die beiden Stabspannungen durch Zerlegen nach beiden Richtungslinien.

Durch Einschalten eines dritten Stabes zwischen beiden Scheiben kann man die bis dahin noch bestehende Beweglichkeit im allgemeinen aufheben. Betrachtet man nämlich irgend zwei andere Punkte E und F der beiden Scheiben, so wird deren Entfernung bei einer Drehung von Scheibe II gegen I um das Gelenk G im allgemeinen geändert. Sobald daher E und F durch einen dazwischen eingeschalteten Stab in unveränderlicher Entfernung gehalten werden, wird die vorher noch bestehende Bewegungsmöglichkeit dadurch aufgehoben. Nur dann, wenn die Richtungslinie des Stabes EF ebenfalls durch G geht, kann sich II immer noch relativ zu I wenigstens um einen unendlich kleinen Winkel drehen, denn F bewegt sich dabei senkrecht zu EF und hiermit ist nur eine von der zweiten Ordnung kleine Änderung der Stablänge EF verbunden, der der Stab keinen ausreichenden Widerstand entgegenzuzetzen vermag. Sobald freilich II eine Bewegung gegen I ausgeführt hat, die nicht mehr als unendlich klein angesehen werden kann, schneiden sich nachher die drei Stabrichtungen nicht mehr in demselben Punkte und die weitere Bewegung wird, wenn die Stäbe hinreichend widerstandsfähig sind, von da ab verhindert.

Im Falle der Abb. 81 würde ein dritter Stab, der ebenfalls von G aus nach irgend einem Punkte von II geführt wäre, an der vorher bestehenden Bewegungsfreiheit überhaupt nichts ändern: es bliebe dann immer noch eine endliche Bewegungsfreiheit beider Scheiben bestehen. Im einen, wie im andern Falle ist aber, da auch kleine Verschiebungen in der Regel nicht geduldet werden dürfen, der Ausnahmefall zu vermeiden, daß sich die Richtungen der drei Verbindungsstäbe in demselben Punkte treffen.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch auf Grund der statischen Betrachtung. Die drei Stabspannungen müssen nämlich imstande sein, bei beliebig gegebenen Lasten, die an dem ganzen Systeme den Gleichgewichtsbedingungen genügen, an jeder Scheibe mit den an dieser angreifenden Lasten Gleichgewicht herzustellen. Die Stabspannungen folgen demnach durch Zerlegen der Resultierenden dieser Lasten nach den Richtungslinien der drei Stäbe. Eine solche Zerlegung ist aber, wie schon im ersten Abschnitte gefunden wurde, nur möglich, wenn sich die drei Richtungslinien nicht in einem Punkte schneiden. Gehen sie nicht genau durch denselben Punkt, sondern bilden sie ein unendlich kleines Dreieck miteinander, so werden die Stabspannungen unendlich groß. Auch hier entsprechen daher der unendlich kleinen Verschieblichkeit statisch unendlich große Spannungen.

Immer wenn die Grundfigur eines Fachwerkes durch Vereinigung von zwei Scheiben durch drei Verbindungsstäbe gebildet wird, kann man hiernach zunächst die Spannungen der Verbindungsstäbe auf ganz einfache Weise ermitteln. Am einfachsten wendet man die Rittersche Momentenmethode an, indem man, um z. B. die Spannung des Stabes EF in Abb. 82 zu berechnen, das aus den beiden andern Stäben gebildete imaginäre Gelenk zum Momentenpunkte wählt. Die für das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben angeschriebene Momentengleichung enthält dann die Stabspannung EF als einzige Unbekannte.

Nachdem die Spannungen der Verbindungsstäbe (oder auch

nur eines der Verbindungsstäbe) ermittelt sind, kann man gewöhnlich die in den Stäben der Scheiben auftretenden Spannungen ohne weiteres durch Zeichnen eines Kräfteplanes ermitteln. Hiervon wurde schon im ersten Abschnitte bei Berechnung des Polonçeau-Binders Gebrauch gemacht.

Eine auf diese Art erhaltene und durch Anwendung der Momentenmethode (oder auch nach dem Culmannschen Verfahren für die Zerlegung nach den drei gegebenen Richtungslinien) leicht zu berechnende Grundfigur zeigt auch Abb. 83. Sie ist aus der Vereinigung der beiden Dreiecke ABC und DEF durch die drei Verbindungsstäbe AE, BD und CF hervorgegangen. Ob eine Grundfigur überhaupt auf diese Art gebildet ist, kann man immer leicht entscheiden, indem man zusieht, ob sich ein Schnitt durch sie legen läßt, der nur drei Stäbe trifft, die nicht von demselben Punkte ausgehen. — Natürlich braucht übrigens die Verbindung von zwei Scheiben durch drei Stäbe nicht notwendig zu einer Grundfigur zu führen. Sie kann auch ein einfaches Fachwerk ergeben und in der Tat lassen sich die gewöhnlich vorkommenden einfachen Fachwerke ebenfalls auf diese Art erzeugt denken.

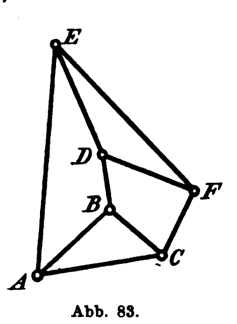


Abb. 83.

Ein Fachwerk kann ferner auch aus mehreren Scheiben mit Hülfe von Verbindungsstäben zusammengesetzt werden. Bezeichnet man die Anzahl der Scheiben mit s und die Anzahl der nicht zu ihnen gehörigen „freien“ Knotenpunkte, die etwa ebenfalls noch mit einbezogen werden sollen, mit n, so ist die Zahl m der erforderlichen Verbindungsstäbe

$$m = 2n + 3s - 3. \tag{34}$$

Um nämlich zunächst die zweite Scheibe an die erste anzuschließen, braucht man drei Stäbe und ebensoviele für jede folgende Scheibe, zu diesem Zwecke also $3(s-1)$. Dazu kommen dann noch für jeden „freien“ Knotenpunkt zwei Stäbe. Gl. (34) geht übrigens in Gl. (33) über, wenn man darin $s = 0$

setzt. — Die einfache Berechnung auf Grund der Ritterschen Momentenmethode ist in diesem Falle im allgemeinen nicht mehr möglich.

Ein weiterer Plan zum Aufbaue eines Fachwerkes besteht darin, zuerst 4, 5 oder allgemein a Knotenpunkte durch a aufeinanderfolgende Stäbe zu einem geschlossenen Vielecke zu verbinden. An diese für sich nicht steife Figur schließt man die übrigen Knotenpunkte durch je zwei Stäbe an und beseitigt schließlich die noch vorhandene Beweglichkeit durch weitere $a - 3$ Stäbe, die zwischen passend ausgewählten Knotenpunkten eingeschaltet werden. Schon die in Abb. 83 gezeichnete Grundfigur kann in dieser Weise entstanden gedacht werden. Man gehe von dem Vierecke $BCFD$ aus, schließe daran A und E durch je zwei Stäbe und beseitige die noch zurückbleibende Verschieblichkeit durch den Stab AE. Eine andere, auf diese Art gebildete Grundfigur zeigt Abb. 84. Als Ausgangsfigur kann man etwa das Viereck $ABCD$ annehmen, an das der Reihe nach die Knotenpunkte E, F, G, H durch je zwei Stäbe angeschlossen werden, worauf die Steifigkeit durch Einziehen des letzten Stabes DH hergestellt wird. Die Rittersche Momentenmethode führt hier nicht, oder jedenfalls nicht ohne weiteres, zum Ziele.

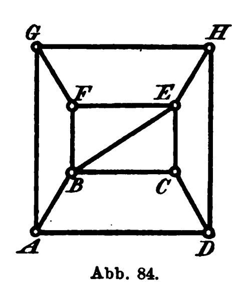


Abb. 84.

Das allgemeinste Mittel, um alle möglichen Grundfiguren zu erhalten, besteht aber in der wiederholten Anwendung der schon in § 31 besprochenen Stabvertauschung. Um dies zu beweisen, betrachte man zunächst einen von jenen Knotenpunkten einer gegebenen Grundfigur, von denen (vgl. § 31) nur drei Stäbe ausgehen. Man beseitige einen der drei Stäbe; dann müssen auch die übrigen Knotenpunkte gegeneinander verschieblich sein, denn wenn sie es nicht wären, würde auch der betrachtete Knotenpunkt durch die ihm verbliebenen beiden Stäbe fest an sie angeschlossen, was gegen die selbstverständliche Voraussetzung verstößt, daß die gegebene Grundfigur keine überzähligen Stäbe enthielt. Die Verschieblichkeit kann

durch Einziehen eines neuen Stabes wieder aufgehoben werden. Nachdem diese Stabvertauschung vorgenommen ist, hat man einen Knotenpunkt, von dem nur zwei Stäbe ausgehen. Wird er beseitigt, so behält man eine Grundfigur übrig, die mindestens einen Knotenpunkt weniger umfaßt. Mit dieser kann man nun auf dieselbe Weise verfahren u. s. f., bis schließlich ein einfaches Fachwerk übrig bleibt. Dabei macht es auch nichts aus, wenn man die Knotenpunkte, von denen nur zwei Stäbe ausgingen, in Wirklichkeit gar nicht abtrennt, sondern sie so beibehält.

Hieraus folgt zunächst, daß man durch hinreichend oft fortgesetzte Stabvertauschungen jede Grundfigur auf ein einfaches Fachwerk zurückführen kann. Wenn man denselben Weg in umgekehrter Reihenfolge zurücklegt, gelangt man aber von dem einfachen Fachwerke auch wieder zu der gegebenen Grundfigur. Die Methode der Stabvertauschungen kann daher benutzt werden, um jede beliebige Grundfigur aus einem zwischen den gegebenen Knotenpunkten als Ausgang gewählten einfachen Fachwerke abzuleiten.

Nach Henneberg, der diese Betrachtungen zuerst angestellt hat, geht man so vor, daß man aus einem einfachen Fachwerke einen Stab, der zwei Knotenpunkte A und B miteinander verbindet, herausnimmt, hierauf einen neuen Knotenpunkt C durch zwei neue Stäbe anschließt und die dann noch zurückbleibende Beweglichkeit durch einen dritten Stab von C nach irgend einem weiteren Knotenpunkte D des einfachen Fachwerkes aufhebt. Dasselbe Verfahren kann dann beliebig weiter fortgesetzt werden. Es kommt auf eine Vertauschung des Stabes CD mit dem Stabe AB in dem den Knotenpunkt C mit einschließenden Fachwerke hinaus.

Bei den in der heutigen Praxis vorkommenden Grundfiguren genügt übrigens — soweit sie mir bekannt geworden sind — stets schon eine einmalige Stabvertauschung, um den Übergang zu einem einfachen Fachwerke zu bewerkstelligen.

§ 34. Die Methode von Henneberg.

Ein allgemein anwendbares Verfahren zur Berechnung der Stabspannungen in beliebig gegliederten Grundfiguren bei gegebenen Lasten, ist im Anschlusse an die vorausgehenden Betrachtungen von Prof. Henneberg aufgestellt worden. Es gibt eine sich dem Gedächtnisse leicht einprägende Vorschrift, nach der die Stabspannungen stets mit verhältnismäßig geringer Mühe gefunden werden können und es ist daher für die praktische Anwendung wohl am meisten zu empfehlen.

Ich nehme zunächst an, daß die Grundfigur durch eine einmalige Stabvertauschung auf ein einfaches Fachwerk zurückgeführt werden kann. Man nimmt den Austausch vor und berechnet vorläufig die Stabspannungen, die von den gegebenen Lasten in dem einfachen Fachwerke hervorgerufen werden. Hierzu braucht man nur einen Kräfteplan zu zeichnen. Ich will ihn den Kräfteplan T nennen und die daraus für irgend einen Stab mit der Nummer i entnommene Stabspannung mit T_i bezeichnen. Jener Stab, der bei der Stabvertauschung an die Stelle des beseitigten tritt, soll der Ersatzstab heißen und mit dem Zeiger e versehen werden. Im Kräfteplane kommt auch T_e vor, dagegen fehlt natürlich darin die Spannung des beseitigten Stabes.

Um von dem Spannungsbilde T auf jenes zu kommen, das in dem gegebenen Fachwerke in Wirklichkeit besteht, denke man sich den zuvor beseitigten Stab in einer gewissen Mitwirkung begriffen. Dazu vergegenwärtigen wir uns zunächst, welchen Einfluß auf die Spannungen der Stäbe in dem einfachen Fachwerke eine längs jenes Stabes ganz willkürlich angenommene Spannkraft ausübt. Es ist dazu gar nicht nötig, daß wir uns den beseitigten Stab sofort wieder eingesetzt denken. Um seinen Einfluß auf die Spannungen der andern Stäbe kennen zu lernen, genügt es vielmehr, wenn wir uns nur an den beiden Endknotenpunkten Lasten von gleicher Größe und entgegengesetztem Pfeile angebracht denken, die in die Stabrichtung fallen und der Spannung in dem beseitigten

Stabe entsprechen. Denn jeden Stab kann man ohne Einfluß auf das Gleichgewicht aller übrigen beseitigen, wenn man nur dafür Sorge trägt, daß an seinen beiden Endknotenpunkten Kräfte angebracht werden, die die vorher von dem Stabe selbst übertragenen genau ersetzen.

Am besten ist es, wenn man sich längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes einstweilen eine Zugspannung angebracht denkt, die gleich der Belastungseinheit, also etwa gleich 1 Tonne ist. Die beiden Lasten an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes, die jener Einheitsspannung entsprechen, bringen in dem einfachen Fachwerke Stabspannungen hervor, die sich ebenfalls durch Zeichnen eines zweiten Kräfteplanes sofort ermitteln lassen. Alle gegebenen Lasten denkt man sich hierbei ganz von dem Fachwerke entfernt, da man nur jene Spannungen zu ermitteln wünscht, die ausschließlich durch die längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes angebrachte Spannkraft hervorgerufen werden.

Den jetzt gezeichneten Kräfteplan will ich den Kräfteplan u nennen und die daraus entnommene Spannung irgend eines Stabes i mit u_i bezeichnen. Die u_i sind nur als Verhältniszahlen aufzufassen; sie geben zunächst für die Spannungseinheit im beseitigten Stabe die zugehörigen Spannungen der übrigen Stäbe, hiermit aber zugleich auch allgemeiner die Verhältnisse zwischen diesen Stabspannungen und der durch den beseitigten Stab übertragenen Spannkraft an. Ein positives Vorzeichen von u_i drückt aus, daß die Spannung im Stabe i von gleicher Art mit der im beseitigten Stabe ist, denn sobald sich die Spannung im beseitigten Stabe umkehrt, kehren sich auch die Vorzeichen aller übrigen durch diese Belastung hervorgerufenen Stabspannungen um.

Bezeichnen wir ferner die unbekannte Spannung, die der beseitigte Stab in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke in Wirklichkeit aufzunehmen hat, mit X, so entsprechen ihr in dem nach der Stabvertauschung entstehenden einfachen Fachwerke Spannungen, die nach Größe und Vorzeichen durch das Produkt uX angegeben werden. Lassen wir die Lasten X an

den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes zugleich mit den gegebenen Lasten an dem einfachen Fachwerke angreifen, so kommt im Stabe i eine Spannung S_i zustande, die sich aus den vorher im einzelnen besprochenen Spannungen zusammensetzt, also

$$S_i = T_i + u_i X \tag{35}$$

ist. Welchen Wert wir auch für X annehmen mögen: jedenfalls wird durch das hiermit angegebene Spannungsbild S an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht zwischen den Stabspannungen und den äußeren Kräften, in die auch die Kräfte X an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes mit einzurechnen sind, hergestellt. Man kann auch sagen, daß die unendlich vielen Spannungsbilder, die verschiedenen Annahmen über X entsprechen, zu dem statisch unbestimmten Fachwerke gehören, das man erhält, wenn man den beseitigten Stab wieder einsetzt und den Ersatzstab e daneben auch noch beibehält.

Unter allen diesen Spannungsbildern muß auch jenes enthalten sein, das wir suchen und zwar ist es offenbar jenes unter allen, bei dem die Spannung des Ersatzstabes zu Null wird. Denn in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke kam der Ersatzstab überhaupt nicht vor; dessen Spannung muß daher ausfallen, ohne daß dadurch das Gleichgewicht der Kräfte an allen Knotenpunkten gestört wird. Wenden wir Gl. (35) auf den Ersatzstab e an, setzen S_e gleich Null und lösen nach X auf, so erhalten wir

$$X = -\frac{T_e}{u_e}. \tag{36}$$

Die Spannung T_e kann aus dem ersten und die Verhältniszahl u_e aus dem zweiten Kräfteplane nach Größe und Vorzeichen unmittelbar entnommen werden. Hiermit kennen wir also auch nach Gl. (36) sofort die Spannung in dem zuvor beseitigten Stabe nach Größe und Vorzeichen.

Nachdem X bekannt ist, findet man auch die Spannung in jedem andern Stabe nach Gl. (35). Oft ist es übrigens zweckmäßiger, die beiden Kräftepläne T und u nur soweit

zu zeichnen, bis man darin zu T_e und u_e gelangt ist. Denn hiermit vermag man bereits X nach Gl. (36) zu berechnen. Hierauf entwirft man einen dritten Kräfteplan, den man vollständig bis zu Ende durchführt, und aus dem sich die wirklichen Spannungen in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke ergeben. Dieser Kräfteplan kann nämlich sofort gezeichnet werden, nachdem X bereits bekannt ist. Zuletzt ergeben sich dabei noch Proben für die Richtigkeit der Bestimmung von X, indem sich die letzten Kraftecke von selbst schließen müssen.

Auch ob ein Ausnahmefall vorliegt, ergibt sich bei dieser Methode. Findet man nämlich, daß u_e zufällig den Wert Null oder doch einen sehr kleinen Wert annimmt (denn dies allein kann auf Grund einer Zeichnung, die mit unvermeidlichen Zeichenfehlern behaftet ist, unmittelbar nachgewiesen werden), so folgt nach Gl. (36), daß X sehr groß (bezw. unendlich groß) wird. Ein Spannungsbild, bei dem zu Lasten von endlicher Größe Stabspannungen von wirklich oder doch nahezu unendlicher Größe gehören, entspricht aber dem zu vermeidenden Ausnahmefalle.

Sind endlich zwei Stabvertauschungen nötig, um das gegebene Fachwerk auf ein einfaches zurückzuführen, so zeichne man zuerst, wie im vorigen Falle, den Kräfteplan T, der die Spannungen in dem einfachen Fachwerke kennen lehrt. Dann bringe man eine Zugspannung von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des ersten der beseitigten Stäbe an und zeichne hierfür, wiederum ganz wie vorher, den Kräfteplan u. Hierzu kommt dann noch ein dritter Kräfteplan v für die Spannungen in dem einfachen Fachwerke, die durch eine längs des zweiten der beseitigten Stäbe angebrachte Zugspannung von der Lasteinheit hervorgerufen werden. Wird dann die Spannung in dem ersten der beseitigten Stäbe mit X, die im zweiten mit Y bezeichnet, so ist die Spannung im Stabe i, wenn X und Y gleichzeitig mit den gegebenen Lasten angreifen

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y \tag{37}$$

Die beiden Unbekannten X und Y ergeben sich aus der Bedingung, daß die beiden Ersatzstäbe, die jetzt mit e und f bezeichnet werden sollen, in dem von uns gesuchten Spannungsbilde überhaupt nicht vorkommen, daß also die für sie nach Gl. (37) berechneten Spannungen zu Null werden müssen. Man erhält daher X und Y durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} T_e + u_e X + v_e Y = 0, \\ T_f + u_f X + v_f Y = 0, \end{array}\right\} \qquad (38)$$

in denen alle übrigen Größen außer X und Y aus den drei Kräfteplänen, die wir zeichneten, bekannt sind.

Man sieht nun auch ein, daß dasselbe Verfahren auch für drei oder noch mehr Ersatzstäbe anwendbar bleibt; aber schon der Fall mit zwei Ersatzstäben kommt, wie ich bereits erwähnte, in der technischen Praxis, soweit sie sich wenigstens bis heute entwickelt hat, kaum oder überhaupt nicht vor.*) — Ein Beispiel für die Anwendung des Verfahrens wird man unter den Aufgaben finden.

Sollte man übrigens in Verlegenheit sein, wie man bei einem sehr verwickelten Beispiele die Stabvertauschungen vorzunehmen hat, um schließlich auf ein einfaches Fachwerk zu kommen, so kann man sich dazu der von Henneberg gegebenen Vorschrift bedienen, die stets zu dem gewünschten Ziele führt. Man beseitigt nämlich zuerst einen Knotenpunkt, von dem drei Stäbe ausgehen. Die andern Endpunkte der drei Stäbe sind dann jedenfalls gegeneinander beweglich; die Verschieblichkeit läßt sich aber wieder aufheben, indem man zwei der drei Knotenpunkte durch Einfügen eines neuen Stabes miteinander verbindet. Setzt man dies oft genug fort, so muß man zuletzt stets zu einem einfachen Fachwerke gelangen, wie schon aus den Betrachtungen am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgeht.

---

*) Bei der Anwendung des Verfahrens auf die Berechnung räumlicher Fachwerkträger hat man sich indessen in neuester Zeit dazu entschlossen, auch mehr Stabvertauschungen vorzunehmen, um damit die Berechnung nach anderer Richtung hin zu vereinfachen. Vgl. hierzu den neu eingeschobenen § 45ª.

§ 35. Die Berechnung der sechseckigen Grundfigur mit Hülfe der imaginären Gelenke.

Für den Fall der aus einem Sechsecke mit seinen drei Hauptdiagonalen bestehenden Grundfigur, die das größte Interesse beansprucht, kann man die Spannungen auch noch auf verschiedene andere Arten berechnen. Man kommt dabei unter Umständen kürzer zum Ziele, als nach dem vorher beschriebenen, allgemein anwendbaren Verfahren; namentlich kann man sich dabei besser Rechenschaft darüber geben, unter welchen Umständen ein Ausnahmefall vorliegt.

Hierbei ist unter dem Ausnahmefalle, woran noch einmal erinnert werden soll, jener zu verstehen, bei dem trotz der notwendigen Stabzahl noch eine unendlich kleine Beweglichkeit besteht, indem einer der Stäbe das Maximum oder Minimum der Länge hat, das mit den übrigen Stablängen verträglich ist oder bei dem zu einem beliebig gegebenen Lastensysteme unendlich große Stabspannungen gehören. Daß beide Kennzeichen unter allen Umständen gleichwertig miteinander sind und sich gegenseitig bedingen, wird übrigens aus einer Untersuchung, die ich alsbald folgen lassen werde, noch deutlich hervorgehen.

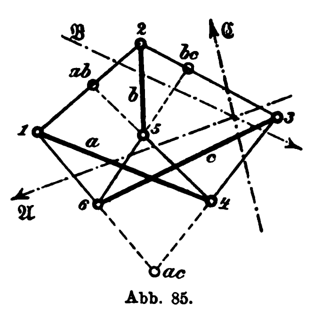


Abb. 85.

In Abb. 85 ist eine sechseckige Grundfigur dieser Art dargestellt. Die sechs Knotenpunkte $1, 2 \ldots 6$ sind in dieser Aufeinanderfolge durch sechs Stäbe verbunden, die wir als die Umfangsstäbe des Sechseckes bezeichnen wollen. Dazu kommen dann noch die drei durch stärkere Striche hervorgehobenen Diagonalstäbe a, b, c. An den sechs Knotenpunkten mögen von außen her beliebig gegebene Lasten angreifen, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie den Bedingungen für das Gleichgewicht an einem starren Körper genügen. Man soll die dadurch in den Stäben hervorgerufenen Spannungen berechnen. — Zuvor mag indessen noch bemerkt

werden, daß die Verteilung der Rollen von Umfangs- und Diagonalstäben auch in anderer Weise, als vorher angegeben, hätte durchgeführt werden können. Man hätte z. B. auch die in den Zug 1, 2, 5, 4, 3, 6, 1 fallenden Stäbe als Umfangsstäbe und die drei übrig bleibenden als Diagonalstäbe ansehen können. Wie man diese Wahl trifft, bleibt für das Folgende gleichgültig; jedenfalls wollen wir aber an der einmal getroffenen Wahl festhalten.

Wir lösen die Aufgabe auf Grund der Bedingung, daß jeder der drei Diagonalstäbe a, b, c für sich genommen unter dem Einflusse aller an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewichte stehen muß. An jedem von ihnen, z. B. an a, greifen sechs Kräfte an, zunächst nämlich die gegebenen Lasten an den Endknotenpunkten 1 und 4 und dann die Spannungen der vier Umfangsstäbe, die von 1 und 4 ausgehen. Denn wenn wir das Gleichgewicht des Stabes a für sich untersuchen wollen, müssen wir uns die vier Stäbe, die mit ihm zusammenstoßen, abgetrennt und die von ihnen übertragenen Spannungen durch Kräfte ersetzt denken, die für den Stab a als äußere anzusehen sind, wenn sie auch für die ganze Grundfigur als innere gelten. Ebenso ist es bei b und c.

Die vorher bezeichneten sechs Kräfte wollen wir paarweise zusammenfassen. Dies ist zunächst leicht möglich mit den gegebenen Lasten an den Endknotenpunkten. Diese Lasten selbst sind, um die Zeichnung nicht zu überladen, nicht eingetragen. Dafür ist sofort die Resultierende $\mathfrak{A}$ aus den an 1 und 4 angreifenden Lasten angegeben, die wir in kürzerer Ausdrucksweise als die gegebene äußere Kraft am Stabe a bezeichnen können. Ebenso sei $\mathfrak{B}$ die Resultierende aus den Lasten an 2 und 5, oder die am Stabe b angreifende äußere Kraft und $\mathfrak{C}$ die Resultierende aus den Lasten an 3 und 6.

Die drei Resultierenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ersetzen die gegebenen Lasten in bezug auf das Gleichgewicht am ganzen starren Körper vollständig und da die Lasten ein Gleichgewichtssystem bilden sollten, müssen sich die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in einem Punkte treffen und ihre geometrische Summe muß Null sein.

Wir fassen ferner auch die vier an den Enden von *a* angreifenden Stabspannungen paarweise zusammen und zwar die Spannung im Stabe 1, 2 mit 4, 5 und 1, 6 mit 3, 4. Jedenfalls muß die Resultierende aus den Spannungen 1, 2 und 4, 5 durch den mit *ab* bezeichneten Schnittpunkt beider Richtungslinien gehen und ebenso die Resultierende aus 1, 6 und 3, 4 durch den Schnittpunkt *ac*. Wie groß und wie gerichtet diese Resultierenden sind, vermag man dagegen einstweilen nicht zu sagen.

Die gewählte Art der Zusammenfassung bedarf noch einer näheren Begründung. Hierzu mache ich darauf aufmerksam, daß die Diagonalstäbe *a* und *b* durch die beiden Umfangsstäbe 1, 2 und 4, 5 in unmittelbarer Verbindung stehen. Wären die übrigen Stäbe nicht vorhanden, so könnten sich *a* und *b* relativ zueinander bewegen und zwar vermöchten sie sich, wie aus den Untersuchungen in § 33 (vgl. besonders Abb. 82) hervorgeht, um das imaginäre Gelenk *ab* gegeneinander zu drehen. Hieraus geht auch der Sinn der für diese Schnittpunkte gewählten Bezeichnungen hervor.

Wir können hiernach die Rolle der sechs Umfangsstäbe auch so auffassen, daß je zwei sich im Sechsecke gegenüber liegende ein imaginäres Gelenk darstellen, in dem zwei der Diagonalstäbe miteinander zusammenhängen. Die Resultierende aus beiden Stabspannungen bildet den im imaginären Gelenke übertragenen Gelenkdruck. Die Resultierende aus den an den Enden von *a* angreifenden Stabspannungen, die wir vorher bildeten, ist daher nichts anderes, als der im Gelenke *ab* von *b* auf *a* übertragene Gelenkdruck. Der umgekehrt von *a* auf *b* übertragene Gelenkdruck ist die Reaktion des vorigen und daher ebenso groß und entgegengesetzt gerichtet.

Alle vorausgehenden Bemerkungen dienen nur dazu, die Dinge, mit denen wir zu tun haben, in passender Weise zu ordnen, nämlich so, daß alles auf die drei Diagonalstäbe *a*, *b*, *c* bezogen wird, wodurch eine bessere Übersicht erzielt wird, so daß uns der Kern der Aufgabe deutlicher erkennbar wird. Wir sind so dazu gelangt, alle am Stabe *a* angreifenden

Kräfte auf die gegebene äußere Kraft 𝔄 und zwei durch *ab* und *ac* gehende Gelenkdrücke von unbekannter Größe und Richtung zurückzuführen. Wir können jetzt hinzufügen, daß sich die Richtungslinien der drei Kräfte in einem Punkte schneiden müssen, den wir jedenfalls auf der bereits bekannten Richtungslinie von 𝔄 zu suchen haben.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, Größe und Richtung der drei Gelenkdrücke zu ermitteln und zwar zuerst die drei Richtungslinien. Diese drei Richtungslinien bilden jedenfalls ein Dreieck, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte *ab*, *ac* und *bc* gehen. Außerdem müssen aber, wie wir soeben fanden, die drei Ecken auf den Richtungslinien von 𝔄, 𝔅, ℭ liegen. Denn was vorher über das Gleichgewicht der drei Kräfte am Stabe *a* bemerkt wurde, läßt sich natürlich ohne weiteres auch auf die Stäbe *b* und *c* übertragen.

Ein Dreieck, das die genannten sechs Bedingungen erfüllen soll, ist aber dadurch eindeutig bestimmt. Man kann es leicht nach einem zuvor schon öfters benutzten Verfahren konstruieren. In Abb. 86 ist dies ausgeführt. In diese Abbildung sind aus der vorigen nur die drei Richtungslinien 𝔄, 𝔅, ℭ und die drei Gelenkpunkte *ab*, *bc* und *ac* mit übernommen. Einfacher wäre es zwar gewesen, die Konstruktion sofort in Abb. 85 zu Ende zu führen. Die Figur wäre aber dann etwas undeutlich geworden und sie wurde daher in zwei Abbildungen auseinander gezogen, die man nachträglich, wenn man will, auch leicht wieder aufeinander decken kann.

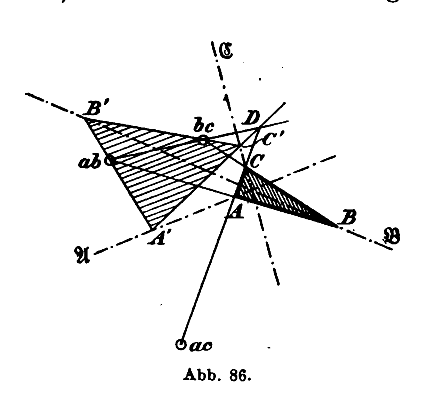


Abb. 86.

Man ziehe etwa zuerst in willkürlicher Richtung eine Linie $A'B'$ durch *ab*, dann von dem auf 𝔅 liegenden Punkte B' eine Linie $B'C'$ durch *bc* und verbinde C' mit A'. Dadurch erhält man ein Dreieck $A'B'C'$, das von den sechs Bedingungen

fünf erfüllt; nur die Seite $A'C'$ geht noch nicht durch den vorgeschriebenen Punkt ac. Wenn man nun die Anfangsseite $A'B'$ um ab dreht, verändert sich das Dreieck und man erhält unendlich viele verschiedene Dreiecke, von denen jenes auszusuchen ist, dessen Seite AC außerdem noch durch ac geht.

Da aber die drei Ecken des veränderlichen Dreieckes auf drei gegebenen Geraden fortschreiten, die sich in einem Punkte schneiden, während sich zugleich zwei Seiten um feste Punkte drehen, muß sich auch die dritte Seite um einen festen Punkt D drehen. Dieser Satz ist dem schon in § 2 angeführten und benutzten reziprok. Wir finden den Punkt D als Schnitt der dritten Seiten von irgend zwei Dreiecken. Als zweites benutzen wir dabei am bequemsten jenes, dessen drei Seiten in eine Gerade, also in die Verbindungslinie der Punkte ab und bc fallen.

Auch die Seite AC des gesuchten Dreieckes muß durch den Punkt D gehen. Da sie ferner auch durch ac gehen soll, brauchen wir nur ac mit D zu verbinden. Diese Linie schneidet die Punkte A und C auf 𝔄 und ℭ ab. Zieht man hierauf von ab und bc aus die Linien AB und CB, so muß der Schnittpunkt B von selbst auf 𝔅 fallen, was zur Prüfung für die Genauigkeit der Zeichnung dient.

Überträgt man das Dreieck ABC aus Abb. 86 nach Abb. 85, so hat man dort die Richtungslinien der drei Gelenkdrücke. Die Größen ergeben sich ohne weiteres daraus, daß die geometrische Summe von zwei Gelenkdrücken und der an demselben Diagonalstabe angreifenden gegebenen äußeren Kraft gleich Null sein muß. Man braucht also nur noch den in Abb. 87 angegebenen Kräfteplan zu zeichnen, der bei der wirklichen Ausführung natürlich unmittelbar neben Abb. 85 seinen Platz finden müßte.

Man geht aus von dem Dreiecke, das sich durch Aneinanderreihung von 𝔄, 𝔅, ℭ bilden lassen muß und zieht von den Ecken Parallelen ab, ac, bc zu den in Abb. 86 ermittelten Gelenkdruckrichtungen. Diese müssen sich von selbst in einem Punkte schneiden; die Abb. 86 und 87 sind,

wenn man in der ersten die nur zur Konstruktion dienenden Hülfslinien wegläßt, reziproke Figuren. — Nachdem die Gelenkdrücke bekannt sind, findet man die Spannungen der Umfangsstäbe des Sechseckes, indem man jeden Gelenkdruck nach den Richtungen der beiden Stabspannungen zerlegt, als deren Resultierende er betrachtet werden kann. Als gestrichelte Linien sind die am Diagonalstabe a angreifenden Stabspannungen 1, 2; 4, 5; 3, 4; 1, 6, die sich durch Zerlegen der Gelenkdrücke ab und ac ergeben, ebenfalls in Abb. 87 angegeben. Zugleich sind auch jene Pfeile darauf eingetragen, die zum Stabe a gehören. Sie ergeben sich aus dem Pfeile von 𝔄, da in dem Fünfecke 𝔄; 1, 2; 4, 5; 3, 4; 1, 6 die Pfeile stetig aufeinander folgen. Hieraus folgt also, daß in dem Beispiele, auf das sich die Abbildung bezieht, die Stäbe 1, 2 und 3, 4 gezogen, dagegen 4, 5 und 1, 6 gedrückt sind. Der Gelenkdruck bc kann natürlich ebenso nach 2, 3 und 5, 6 zerlegt werden.

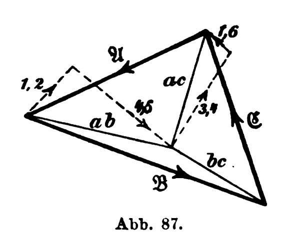


Abb. 87.

Um auch die Spannungen der Diagonalstäbe zu finden, muß man noch die Kraftecke für die Endknotenpunkte zeichnen. Hierzu kann die Kenntnis der Resultierenden 𝔄, 𝔅, 𝔈 allein nichts nützen, sondern man muß auf die an jedem Knotenpunkte für sich angreifenden gegebenen Lasten zurückgreifen. Ein Kräfteviereck aus der Last am Knotenpunkte 1, aus den beiden bereits bekannten Stabspannungen 1, 2 und 1, 6 und der unbekannten Stabspannung a liefert nicht nur a, sondern gestattet zugleich eine Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der vorhergehenden Ermittelungen, da die vierte Seite von selbst parallel zur Richtung des Stabes a gehen muß.

Wir wollen uns jetzt überlegen, unter welchen Umständen der Ausnahmefall eintritt. Aus Abb. 87 erkennt man, daß die Gelenkdrücke — und hiermit auch die Stabspannungen — nur dann unendlich groß werden können, wenn der Schnittpunkt der drei Linien ab, ac, bc ins unendliche rückt. Dann

sind aber die drei Gelenkdrücke alle gleich gerichtet und das Gelenkdruckdreieck ABC in Abb. 86 muß in eine gerade Linie übergehen. Das ist aber nur möglich, wenn die drei Gelenke ab, bc, ac in Abb. 86 in einer Geraden liegen. Umgekehrt wird auch immer dann, wenn die drei Gelenke in einer Geraden liegen, das Gelenkdruckdreieck in eine Gerade übergehen und die Stabspannungen werden bei beliebig gegebenen endlichen Lasten im allgemeinen unendlich groß.

Auch geometrisch läßt sich der Ausnahmefall leicht nachweisen. Man denke sich in der hier wieder abgedruckten Abb. 85 den Stab a festgestellt und b durch das Gelenk ab mit a verbunden. Dann kann sich b gegen a um ab drehen. Hierauf sei noch c durch das Gelenk bc an b angeschlossen, so daß sich c gegen b um bc drehen kann. Gegen a hat dann c zwei Freiheitsgrade, da sowohl eine Drehung um das Gelenk ab, als eine um das Gelenk bc, die ganz unabhängig voneinander erfolgen können, seine Lage gegen a ändern. Verbindet man ab und bc durch eine Gerade, die bis zum Schnittpunkte mit der Richtungslinie von c verlängert wird, so verschiebt sich dieser Punkt von c auf jeden Fall rechtwinklig zur Verbindungslinie beider Gelenke, gleichgültig ob nun die Drehung um ab oder um bc erfolgt. Auch wenn eine gleichzeitige Drehung um beide Gelenke eintritt, muß sich daher jener Punkt von c rechtwinklig zur Verbindungslinie verschieben. Hieraus folgt, daß eine Drehung um das Gelenk ab, verbunden mit einer zu ihr in einem beliebigen Verhältnisse stehenden Drehung um bc auf jeden Fall gleichwertig ist einer einzigen Drehung um einen Pol, der auf der Verbindungslinie der Gelenke ab und bc enthalten ist. — Der soeben abgeleitete (zuerst von Burmester aufgestellte) Satz spielt, nebenbei bemerkt, in der Kinematik eine wichtige Rolle.

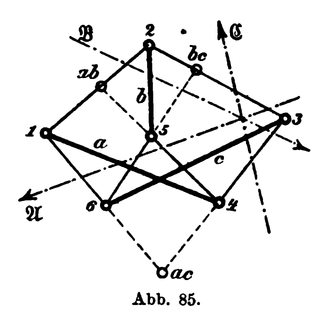


Abb. 85.

Die Verschieblichkeit, die zwischen *c* und *a* noch bestehen bleibt, wenn nur die Gelenke *ab* und *bc* vorhanden, die zum Gelenke *ac* gehörigen Umfangsstäbe 1, 6 und 3, 4 dagegen fortgelassen sind, läßt sich hiernach auf sehr einfache Art beschreiben: der Stab *c* vermag sich gegen *a*, den zwei Freiheitsgraden entsprechend, um jeden beliebigen Pol zu drehen, der auf der Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* enthalten ist. Die Lage des Poles auf der Verbindungslinie hängt nur von dem Verhältnisse der Drehungen um beide Gelenke (nach Größe und Vorzeichen) ab.

Das Gelenk *ac* gestattet dagegen für sich genommen nur Drehungen von *c* gegen *a* um *ac*. Tritt also das Gelenk *ac* zu den vorher schon bestehenden Verbindungen hinzu, so fragt es sich, ob beide Bewegungsmöglichkeiten, die vorher im einzelnen vorhanden waren, miteinander verträglich sind, oder ob sie sich widersprechen. Sie vertragen sich, wenn das Gelenk *ac* ebenfalls auf die Verbindungslinie der Gelenke *ab* und *bc* fällt, weil die Drehung um *ac* dann zu jenen Bewegungen gehört, die auch schon vor Zufügung des Gelenkes *ac* möglich waren. In jedem andern Falle widersprechen sie sich. Sobald also die drei Gelenkpunkte ein Dreieck bilden, ist jede unendlich kleine Beweglichkeit der Figur ohne eine Änderung der Stablängen, die von gleicher Größenordnung mit ihr wäre, ausgeschlossen.

Die Bedingung für den Ausnahmefall läßt sich mit Hülfe des Lehrsatzes von Pascal in eine Form bringen, die sich dem Gedächtnisse bequemer einprägt. Nach diesem Satze schneiden sich die Gegenseiten eines Sechseckes, dessen Eckpunkte auf einem Kegelschnitte enthalten sind, in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen. Umgekehrt kann man durch die Eckpunkte einen Kegelschnitt (der aber auch in zwei gerade Linien zerfallen kann) legen, wenn die genannten Schnittpunkte auf einer Geraden liegen.

Die imaginären Gelenke wurden als Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechseckes erhalten. Wir können daher die vorher gefundene Bedingung für den Ausnahmefall einfacher

dahin aussprechen, daß die aus einem Sechsecke mit drei Hauptdiagonalen gebildeten Grundfiguren trotz der genügenden Stabzahl immer dann nicht steif sind, wenn das Sechseck ein Pascalsches ist.

Zu den Pascalschen gehören u. a. auch die regelmäßigen Sechsecke. Ein solches von etwa 70 cm Durchmesser habe ich in meinem Laboratorium aus kleinen Winkeleisen (von 13 mm Schenkellänge) zusammen nieten lassen, wobei die Diagonalen an den Kreuzungsstellen übereinander weg geführt sind, so daß keine Verbindung zwischen ihnen besteht. Eine Last von 50 kg, die man in geeigneter Weise an einem Knotenpunkte angreifen läßt, bringt Formänderungen hervor, bei denen sich der Abstand anderer Knotenpunkte um 3 bis 4 mm ändert. Zum Vergleiche sei erwähnt, daß stabile Fachwerke, aus denselben Winkeleisen und in ungefähr gleichen Größen ausgeführt, Entfernungsänderungen zwischen zwei nicht durch einen Stab miteinander verbundenen Knotenpunkten von höchstens einigen Zehntelmillimetern, gewöhnlich aber noch viel weniger bei Lasten von 50 kg erkennen lassen. Auch wenn man in dem regelmäßig sechseckigen Versuchsfachwerke die Diagonalen an der Kreuzungsstelle mit Hülfe einer kräftigen Schraubzwinge fest miteinander verbindet, wodurch man zu einem stabilen Fachwerke mit einem überzähligen Stabe gelangt (vgl. den vorletzten Absatz in § 32), findet man bei einer Wiederholung des Versuches mit denselben Lasten nur noch so kleine Formänderungen, daß sie mit den gewöhnlich angewendeten einfachen Mitteln gar nicht mehr gemessen werden können, d. h. sie sind höchstens etwa von der Größe eines Zehntelmillimeters.

Hiernach läßt sich das Bestehen des Ausnahmefalles beim Pascalschen Sechsecke auch experimentell leicht nachweisen und die dabei gemachten Beobachtungen dienen zugleich dazu, eine Vorstellung davon zu geben, in welchem Maße und Grade sich der Ausnahmefall praktisch zur Geltung bringt. Hierbei erwähne ich noch, daß die zuvor angegebenen verhältnismäßig starken Formänderungen des Kreissechseckes rein elastisch

sind; bleibende Verbiegungen von erkennbarer Größe treten bei dieser Belastung noch nicht auf.

Um ein anderes Beispiel zu geben, kehre ich zur Betrachtung von Abb. 80 (S. 207) zurück. Die dort durch starke Striche hervorgehobene sechseckige Grundfigur bildet im allgemeinen kein Pascalsches Sechseck. Wenn aber der Obergurt des Trägers in der Mitte ebenfalls geradlinig ist, liegt der Ausnahmefall vor. Die drei imaginären Gelenke fallen dann alle ins unendliche, liegen also alle auf einer Geraden, nämlich auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Ein in dieser Weise aufgebauter Träger ist gegenüber beliebig gegebenen Lasten nicht widerstandsfähig. Auch schon dann, wenn die drei Punkte des Obergurtes nicht genau, sondern nur nahezu auf einer Geraden liegen, ist der Träger nicht mehr brauchbar, da dann die Stabspannungen zwar nicht unendlich groß, aber doch schon sehr groß werden. — Dagegen wird der Träger auch in diesen Fällen vollkommen stabil und tragfähig, sobald man alle drei Diagonalen in der Mitte miteinander vernietet. Er ist aber dann nicht mehr statisch bestimmt, sondern hat einen überzähligen Stab und muß nach den im 6. Abschnitte auseinander zu setzenden Lehren berechnet werden.

§ 36. Die Methode von Müller-Breslau.

Hält man in einem statisch bestimmten Fachwerke von beliebiger Gliederung einen Stab fest und entfernt irgend einen andern Stab, so ist die Figur verschieblich, aber so, daß sich alle Knotenpunkte, sofern sie nicht in Ruhe bleiben, nur längs bestimmter Kurven, also zwangläufig*) bewegen können. Man kann sich an dem in dieser Weise gebildeten Mechanismus an dessen Knotenpunkten irgendwelche Lasten angreifen, dadurch wieder Gleichgewicht hergestellt denken, daß längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes an den Endknotenpunkten

---

*) Einen besonderen Beweis dafür, daß die Bewegung unter diesen Umständen stets zwangläufig sein muß, hat Grübler in der Rig. Industr. Zeitung 1888, S. 278 gegeben.

zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte von passender Größe angebracht werden. Durch diese werden dann in Verbindung mit den gegebenen Lasten Spannungen in den Stäben hervorgerufen, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Größe und Richtungssinn der beiden Kräfte geben daher zugleich die Stabspannung an, die in dem Stabe, den man sich beseitigt dachte, in Wirklichkeit auftritt.

Aus dieser Überlegung ergibt sich ein Mittel, um die Stabspannung in irgend einem Stabe des gegebenen Fachwerkes, den man sich zu diesem Zwecke beseitigt denkt, zu berechnen. Man braucht hierzu nur das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine unendlich kleine Bewegung des Mechanismus anzuschreiben. Die Summe der Arbeitsleistungen aller äußeren Kräfte muß, damit Gleichgewicht bestehe, gleich Null sein. Zu den äußeren Kräften an dem Mechanismus gehören außer den gegebenen Lasten auch die Kräfte, die man an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes als Ersatz für dessen Stabspannung anbringen muß. Deren Größe (mit Einschluß des Vorzeichens) bildet die einzige Unbekannte in der Arbeitsgleichung, denn die Knotenpunktswege während der unendlich kleinen Lagenänderung lassen sich aus der gegebenen Gestalt des Fachwerkes und des aus ihm hervorgegangenen Mechanismus ermitteln. Die inneren Kräfte des Mechanismus, also die in ihm vorkommenden Stabspannungen leisten während der Bewegung keine Arbeit, da die Stablängen hierbei unveränderlich sind. Dies geht schon aus den Lehren des ersten Bandes hervor.

Nachdem ich selbst schon früher auf die Möglichkeit der Berechnung der Stabspannungen auf diesem Wege hingewiesen hatte, gab Müller-Breslau ein einfaches Verfahren dafür an, wie die Knotenpunktswege — zunächst wenigstens bei den gewöhnlich vorkommenden, nicht allzu verwickelten Fällen — bequem ermittelt werden können. Hierdurch wurde das Verfahren erst praktisch nutzbar gemacht.

In der Zeichnung muß man sich die Knotenpunktswege bei einer unendlich kleinen Lagenänderung, um sie auftragen

zu können, natürlich alle in demselben Verhältnisse vergrößert denken, so daß sie durch endliche Strecken zur Darstellung gebracht werden können. Man macht dies so, daß man an Stelle der Knotenpunktswege die Knotenpunktsgeschwindigkeiten abträgt. Die Knotenpunktswege können aus diesen durch Multiplikation mit dem Zeitelemente dt, während dessen man sich die Bewegung ausgeführt denkt, erhalten werden.

Man betrachte zunächst die Bewegung irgend eines Stabes AB in Abb. 88, der zu dem Mechanismus gehören mag. Jedenfalls kann die Bewegung in die unendlich benachbarte Lage als Drehung um irgend einen Pol O aufgefaßt werden. Die Geschwindigkeiten AA'' und BB'' der Endknotenpunkte — oder, wenn man will, die im gleichen Verhältnisse vergrößerten Knotenpunktswege — stehen jedenfalls senkrecht zu den vom Pole aus gezogenen Strahlen OA und OB und sie verhalten sich zueinander wie die Längen dieser Strahlen, da der Zentriwinkel, um den die Drehung erfolgt, in beiden Fällen derselbe ist.

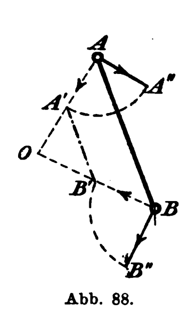


Abb. 88.

Anstatt die Geschwindigkeiten in jenen Richtungen anzutragen, die ihnen eigentlich zukommen, kann man sich auch beide um einen rechten Winkel im Sinne des Uhrzeigers gedreht denken. Nach diesem, zwar ganz willkürlichen, aber für die weiteren Untersuchungen sehr vorteilhaften Verfahren erhalten wir die auf die Polstrahlen selbst fallenden Strecken AA' und BB' als Darstellungen der Geschwindigkeiten oder auch der Knotenpunktswege bei der betrachteten Lagenänderung. Man bezeichnet diese Strecken als die „senkrechten Geschwindigkeiten“ der Knotenpunkte. Sind sie gegeben, so kann man daraus nicht nur die Größen der Geschwindigkeiten (oder die verhältnismäßigen Größen der Knotenpunktswege), sondern auch deren Richtungen erkennen. Zu diesem Zwecke muß man sie nur nachträglich um einen rechten Winkel — entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne — zurückdrehen.

Die senkrechten Geschwindigkeiten fallen, wie man sieht, stets auf die vom Pole nach den bewegten Punkten gezogenen Strahlen. Außerdem geht die Verbindungslinie der Endpunkte A' und B' parallel zur Stabrichtung AB. Denn wir erkannten vorher schon, daß sich die Geschwindigkeiten, also auch AA' und BB' wie OA und OB zueinander verhalten, und dies ist die Bedingung dafür, daß $A'B'$ zu AB parallel ist. Kennt man also von der Bewegung eines Stabes den Pol O und die senkrechte Geschwindigkeit AA' des einen Endknotenpunktes, so kann man durch Ziehen der Parallelen sofort auch die des andern erhalten.

Auf Grund dieser Bemerkungen vermag man gewöhnlich leicht die Bewegung des Mechanismus, den man durch Beseitigung eines Stabes aus einem statisch bestimmten Fachwerke erhält, deutlich und für die Berechnung auf Grund des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten ausreichend zu beschreiben. Als Beispiel dafür möge die schon vorher betrachtete sechseckige Grundfigur dienen, die in Abb. 89 von neuem dargestellt ist. Nur der in Abb. 85 mit c bezeichnete Stab zwischen den Knotenpunkten 3 und 6 ist in Abb. 89 bereits weggelassen oder wenigstens nur durch eine punktierte Linie angedeutet. Als festgehalten denkt man sich am besten einen der Stäbe, die mit dem beseitigten nicht in einem Knotenpunkte zusammenstoßen. In Abb. 89 wurde dazu Stab 1, 2 gewählt; eine daneben angebrachte Schraffierung soll daran erinnern, daß dieser Stab mit der Konstruktionsebene fest verbunden und daher als Gestell des aus den übrigen Stäben gebildeten Mechanismus anzusehen ist.

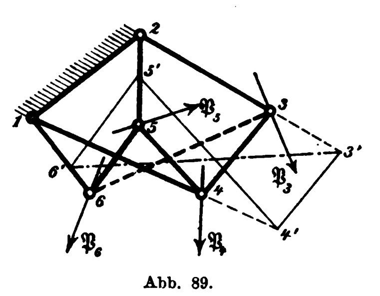


Abb. 89.

Man betrachte zunächst den Stab 5, 6. Der Knotenpunkt 5 vermag nur einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt 2 und dessen Halbmesser 2, 5 ist; ebenso kann sich der Punkt 6

nur auf einem um den Mittelpunkt 1 beschriebenen Kreise bewegen. Hieraus folgt, daß der Pol der Bewegung des ganzen Stabes 5, 6 auf dem Schnittpunkte der Richtungslinien von 2, 5 und 1, 6 liegt. Der Stab 5, 6 dreht sich, wie man auch sagen kann, gegen die Konstruktionsebene um ein imaginäres Gelenk, das aus den Stäben 2, 5 und 1, 6 gebildet wird. In der Zeichnung ist der Pol oder der Gelenkpunkt fortgelassen. Die senkrechten Geschwindigkeiten der Punkte 5 und 6 fallen auf die Richtungslinien der Stäbe 2, 5 und 1, 6 oder auf deren Verlängerungen, jenachdem man sich die Drehung im einen oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen denkt. Auf Sinn und Größe der Drehung oder der Geschwindigkeit kommt es hier nicht an, wenn wir nur darauf achten, daß die Bewegungen aller übrigen Glieder damit in Übereinstimmung stehen. Wir können daher einen Punkt 6′ beliebig auf 1, 6 annehmen, so daß 6 6′ die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 6 angibt. Zieht man 6′, 5′ parallel zu 6, 5, so gibt 5 5′ die zugehörige senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 an.

Hierauf gehe man zum Stabe 4, 5 über. Auch dessen Endpunkte können sich nur auf Kreisen um die Mittelpunkte 1 und 2 bewegen; er hängt, wie der vorige, in einem imaginären Gelenke mit dem festgestellten Stabe 1, 2 zusammen, das als Schnittpunkt der Stabrichtungen 1, 4 und 2, 5 gefunden werden kann. Die senkrechten Geschwindigkeiten von 4 und 5 müssen daher auf diesen beiden Stabrichtungen liegen. Die senkrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 bei der angenommenen Bewegung kennen wir aber bereits und wir brauchen daher nur die Parallele 5′, 4′ zu 5, 4 zu ziehen, um die senkrechte Geschwindigkeit 4 4′ auf der Richtungslinie des Stabes 1, 4 zu erhalten.

Dieselbe Betrachtung läßt sich endlich auch noch für den Stab 3, 4 wiederholen, dessen Endpunkte ebenfalls durch Stäbe mit 1 und 2 verbunden sind. Auch hier müssen die senkrechten Geschwindigkeiten beider Endpunkte auf den Richtungslinien der Verbindungsstäbe enthalten sein und da 4, 4′ bereits bekannt ist, erhalten wir die senkrechte Geschwindig-

keit 3, 3′ des Punktes 3 durch Ziehen der Parallelen 4′, 3′ zu 4, 3.

Hiermit sind die zusammengehörigen Lagenänderungen aller beweglichen Knotenpunkte des Mechanismus genau bezeichnet und wir können dazu übergehen, die Spannung des im Mechanismus beseitigten Fachwerkstabes 3, 6 auf Grund des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten zu ermitteln.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, wie man bei diesem kinematischen Verfahren erkennt, ob ein Ausnahmefall vorliegt. Zu diesem Zwecke vergleicht man die Bewegungen der Knotenpunkte 3 und 6 miteinander, zwischen denen der vorher beseitigte Stab wieder eingesetzt werden soll. Wenn die durch die senkrechten Geschwindigkeiten 3, 3′ und 6, 6′ beschriebene Bewegung der beiden Knotenpunkte durch das Einsetzen des Stabes nicht gehindert wird, liegt der Ausnahmefall vor. Nun bedenke man, daß der Stab 3, 6, falls er der bisher besprochenen unendlich kleinen Bewegung kein Hindernis bereiten soll, sich dabei jedenfalls selbst um irgend einen Pol dreht und daß die senkrechten Geschwindigkeiten seiner beiden Endpunkte auf den von diesen nach dem Pole gezogenen Strahlen enthalten sein müssen. Der Pol könnte daher nur der Schnittpunkt der Richtungslinien von 3 3′ und 6 6′ sein. Zugleich müßte aber, wie wir schon zu Anfang des Paragraphen fanden, die Verbindungslinie 3′, 6′ parallel zur Stabrichtung 3, 6 sein. Also nur dann, dann aber auch immer, wenn die Verbindungslinie 3′, 6′ parallel zu 3, 6 ausfällt, kann die vorher besprochene unendlich kleine Bewegung des Mechanismus auch noch von dem Fachwerke, das man durch Einziehen des Stabes 3, 6 erhält, ausgeführt werden, d. h. das Fachwerk ist nicht steif, sondern es liegt der Ausnahmefall vor.

Man kann diesem Schlusse auch noch eine andere, anschaulichere Deutung geben. Man vergleiche nämlich die Figur 1, 2, 3′, 4′, 5′, 6′ mit der Fachwerksfigur 1, 2, 3, 4, 5, 6. In beiden laufen alle Seiten und Diagonalen in gleicher Richtung, mit Ausnahme der letzten Seiten 3, 6 und 3′, 6′. Liegt aber der Ausnahmefall vor, so gehen auch diese in gleicher Richtung. Kann

man also zu der gegebenen Grundfigur eine zweite Figur von gleicher Gliederung zeichnen, deren Seiten sämtlich zu denen der Grundfigur parallel laufen, so liegt der Ausnahmefall vor. Das Fachwerk ist mit andern Worten steif, wenn seine Gestalt durch die Angabe der Gliederung und der Richtungen aller Stäbe bestimmt ist. Diesen Gedanken hat Schur weiter ausgeführt, indem er es als die Hauptaufgabe der allgemeinen Theorie des ebenen statisch bestimmten Fachwerkes hinstellte, die Fachwerksfigur zu zeichnen, falls die Gliederung und die Stabrichtungen, sowie die Länge eines Stabes gegeben sind.

Um die Arbeiten zu berechnen, die von den äußeren Kräften $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ u. s. f. während der unendlich kleinen Bewegung des Mechanismus geleistet werden, könnte man alle Wege 3, 3′ u. s. f. nachträglich wieder um einen rechten Winkel, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne, zurückdrehen, um sie in ihre wahren Richtungen zu bringen. Einfacher gelangt man aber auf Grund der folgenden Überlegung zum Ziele. In Abb. 90 ist von Abb. 89 nur der Knotenpunkt 6 herausgezeichnet mit der an ihm angreifenden Last $\mathfrak{P}_6$ und der senkrechten Geschwindigkeit 6, 6′, die der Deutlichkeit wegen etwas größer gezeichnet ist, als in der vorigen Figur. Zugleich ist 6 6′ zurückgedreht nach 6, 6″. Die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ ist gleich der Größe von $\mathfrak{P}_6$ multipliziert mit der Projektion von 6, 6″ auf $\mathfrak{P}_6$. Projiziert man auch 6′ auf $\mathfrak{P}_6$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, das dem mit der Hypotenuse 6, 6″ kongruent ist. Die Länge des Projektionsstrahles von 6′ auf $\mathfrak{P}_6$ ist daher gleich der Projektion des Weges 6, 6″ auf $\mathfrak{P}_6$. Wir brauchen also 6, 6″ gar nicht erst zu zeichnen, um die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ angeben zu können. Es genügt, $\mathfrak{P}_6$ mit der Länge des von 6′ aus gezogenen Projektionsstrahles zu multiplizieren. Dieses Produkt gibt aber das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}_6$ für den Momentenpunkt 6′ an.

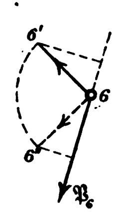


Abb. 90.

Ist die Arbeit von $\mathfrak{P}_6$ positiv, so ist auch das Moment positiv. Man erkennt dies zunächst aus Abb. 90. Es gilt aber auch für andere Lagen, wie man erkennt, wenn man sich $\mathfrak{P}_6$, das eine beliebige Richtung haben kann, in andere Lagen

gedreht denkt. Wenn die Arbeit negativ oder Null wird, wird auch das Moment negativ oder Null und das Moment kann daher weiterhin an Stelle der Arbeit der Kraft gebraucht werden.

Durch diesen Tausch geht die Methode von Müller-Breslau in eine Momentenmethode über, die sich auch als eine Verallgemeinerung der Ritterschen Methode für die Berechnung der einfachen Fachwerke ansehen läßt, indem sie bei einfachen Fachwerken geradezu in diese übergeht. Man kann sie in der Tat auch anwenden und begründen, ohne auf die vorhergehenden kinematischen Betrachtungen, aus denen sie ursprünglich abgeleitet ist, irgendwie Bezug zu nehmen.

Nachdem der Linienzug $6', 5', 4', 3'$ wie vorher konstruiert ist, schreibt man nämlich für jeden dieser Punkte eine Momentengleichung an, die das Gleichgewicht der an dem zugehörigen Knotenpunkte 6 oder 5 u. s. f. angreifenden Last mit den Stabspannungen ausdrückt. Man kann dabei der Vollständigkeit wegen auch noch die Punkte $1'$ und $2'$, die mit 1 und 2 selbst zusammenfallen, als Momentenpunkte mit aufführen, obschon für diese die Momente der dazu gehörigen Kräfte sämtlich verschwinden. Alle diese Momentengleichungen addiert man. In der Summe tritt das Moment jeder Stabspannung zweimal auf, z. B. das Moment von $5, 6$ sowohl in bezug auf $5'$ als Moment der an 5 angreifenden Stabspannung, wie auch in bezug auf $6'$ für die Stabspannung an 6. Nach der Konstruktion der Punkte $6', 5'$ u. s. f. sind aber die Hebelarme jedesmal gleich, mit Ausnahme jener, die zum Stabe $3, 6$ gehören, während die Spannungen dem Wechselwirkungsgesetze zufolge an den beiden Endknotenpunkten entgegengesetzt gerichtet sind. In der Summe heben sich daher die Momente aller Stabspannungen mit jener einen Ausnahme gegeneinander fort und man behält eine Gleichung, in der nur noch die Spannung des Stabes $3, 6$ als Unbekannte auftritt.

Um diese Gleichung in bequemer Form anschreiben zu können, möge der aus der Zeichnung in Abb. 89 zu entnehmende Hebelarm der Last $\mathfrak{P}_n$ am Knotenpunkte n in bezug auf n' mit p_n bezeichnet werden, wobei p_n positiv oder negativ

zu rechnen ist, jenachdem das Moment von $\mathfrak{P}_n$ positiv oder negativ ist. Ferner sei die Spannung des Stabes 3, 6 mit S bezeichnet, wobei ein positiver Wert eine Zugspannung bedeutet. Der Hebelarm von S in bezug auf $3'$ sei s_3 und dies sei dem Vorzeichen nach in Übereinstimmung mit dem Momente einer Zugspannung S am Knotenpunkte 3; ebenso bedeute s_6 den Hebelarm von S in bezug auf $6'$. Alle diese Hebelarme können nach Größe und Vorzeichen aus der Abbildung entnommen werden.

Die Momentengleichung (oder, genauer gesagt, die aus der Summierung aller einzelnen Momentengleichungen gewonnene Gleichung) lautet dann

$$S(s_3 + s_6) + \Sigma Pp = 0,$$

woraus

$$S = -\frac{\Sigma Pp}{s_3 + s_6} \tag{39}$$

folgt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn nachdem eine Stabspannung bekannt ist, kann man die übrigen leicht durch Zeichnen des Kräfteplanes ermitteln.

§ 37. Analytische Untersuchung des Ausnahmefalles.

Den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystemes lasse ich mit einem Knotenpunkte des Fachwerkes zusammenfallen und die Richtung der X-Achse soll stets durch einen zweiten Knotenpunkt gehen. Wenn sich das Fachwerk bewegt, folgt ihm das Koordinatensystem, so daß die beiden genannten Bedingungen in jedem Augenblicke erfüllt sind. Ich denke mir sowohl die Knotenpunkte als auch die Stäbe mit je einer besonderen Numerierung versehen. In Abb. 91 sind von dem ganzen Fachwerke nur zwei Knotenpunkte angegeben, die die Nummern i und k tragen, nebst dem zwischen ihnen verlaufenden Stabe g. Die übrigen Knotenpunkte und Stäbe möge man sich beliebig hinzudenken.

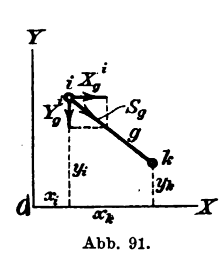


Abb. 91.

Die im Knotenpunkte i angreifende Last sei in zwei Komponenten in den Richtungen der Koordinatenachsen zerlegt, die ich mit X_0^i und Y_0^i bezeichne. Am Knotenpunkte i greifen ferner die Stabspannungen an, die man sich ebenfalls in rechtwinklige Komponenten zerlegt denken kann. Die Spannung des Stabes g sei mit S_g, die Komponenten der Spannung am Knotenpunkte i seien mit X_g^i und Y_g^i bezeichnet. Wenn man bedenkt, daß S_g positiv ist, wenn es eine Zugspannung bedeutet, erhält man aus Abb. 91

$$X_g^i = S_g \cdot \frac{x_k - x_i}{l_g} = - S_g \frac{x_i - x_k}{l_g}, \tag{40}$$

wenn unter l_g die Länge des Stabes g verstanden wird. Ebenso ist

$$Y_g^i = - S_g \frac{y_i - y_k}{l_g}. \tag{41}$$

Der Stab g greift auch am Knotenpunkte k an und für diesen erhält man die Spannungskomponenten

$$X_g^k = - S_g \frac{x_k - x_i}{l_g} \quad ; \quad Y_g^k = - S_g \frac{y_k - y_i}{l_g}. \tag{42}$$

Die Vorzeichen haben sich hier gegenüber dem vorigen Falle umgekehrt.

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze hat man ferner für jeden Stab eine Gleichung, die für Stab g

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - l_g^2 = 0 \tag{43}$$

lautet und die in der Folge kurz in der Form

$$f_g = 0 \tag{44}$$

angeschrieben sein mag. Differentiiert man f_g partiell nach x_i, so erhält man

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i} = 2\,(x_i - x_k), \quad \text{ebenso} \quad \frac{\partial f_g}{\partial x_k} = 2\,(x_k - x_i) \quad \text{u. s. f.} \tag{45}$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen (40) bis (42) auch in der Form

$$X_g^i = - \frac{1}{2} \frac{S_g}{l_g} \frac{\partial f_g}{\partial x_i} \quad ; \quad Y_g^i = - \frac{1}{2} \frac{S_g}{l_g} \frac{\partial f_g}{\partial y_i} \quad \text{u. s. f.} \tag{46}$$

anschreiben.

Die Last und die Stabspannungen am Knotenpunkte i müssen sich im Gleichgewichte halten. Die Summe der X-Komponenten aller Kräfte muß daher zu Null werden. Dies gibt eine Gleichung von der Form

$$X_0{}^i + \Sigma X_g{}^i = 0$$

oder, wenn man für die $X_g{}^i$ ihre Werte nach Gl. (46) einsetzt,

$$\sum \frac{S_g}{2\,l_g} \frac{\partial f_g}{\partial x_i} = X_0{}^i. \tag{47}$$

Die Summe auf der linken Seite ist über alle Stäbe zu erstrecken, die vom Knotenpunkte i ausgehen. Anstatt dessen kann man sie aber auch auf alle Stäbe ausdehnen, die überhaupt im Fachwerke vorkommen. Ein Stab, der nicht vom Knotenpunkte i ausgeht, vermag zwar zur Komponentengleichung (47) nichts beizusteuern; in der Tat wird aber auch das Glied, das man formell in Gl. (47) für ihn beibehält, zu Null, da der partielle Differentialquotient von f_g nach einer in dieser Funktion gar nicht vorkommenden Knotenpunkts-Koordinate stets zu Null wird. Diese Bemerkung erleichtert die weitere Betrachtung erheblich: wir brauchen uns nicht darum zu kümmern, welche Stäbe von einem Knotenpunkte, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ausgehen, sondern können so rechnen, als wenn alle Stäbe des Fachwerkes an ihm angriffen, weil der Ausdruck, den wir für die Spannungskomponenten aufgestellt haben, schon so gebaut ist, daß er von selbst für alle Stäbe verschwindet, die mit dem betreffenden Knotenpunkte nichts zu tun haben. Ausführlicher geschrieben würde demnach Gl. (47) lauten

$$\frac{S_1}{2\,l_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{S_2}{2\,l_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{S_g}{2\,l_g} \frac{\partial f_g}{\partial x_i} + \cdots + \frac{S_m}{2\,l_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = X_0{}^i, \tag{48}$$

worin sich das erste Glied der linken Seite auf den Stab mit der Nummer 1 bezieht u. s. f., so daß alle Stäbe in der Gleichung vertreten sind.

Für jeden Knotenpunkt haben wir zwei Komponentengleichungen von dieser Form, mit Ausnahme des Knoten-

punktes, der mit dem Ursprunge zusammenfällt, für den wir keine Gleichung anschreiben, und des Knotenpunktes, durch den die X-Achse gelegt wurde, für den wir nur eine Komponentengleichung in der X-Richtung bilden. Die andern $2n-3$ Gleichungen genügen nämlich, wie wir von früher her wissen, bereits, um die unbekannten Stabspannungen zu berechnen, während die drei ausgelassenen Gleichungen dazu verwendet werden können, die zugehörigen Lastkomponenten an den festgehaltenen Knotenpunkten so zu berechnen, daß sie mit den übrigen, ganz beliebig gewählten Lasten ein Gleichgewichtssystem herstellen.

Nach der Lehre von den Gleichungen erhält man aber bei beliebig gegebenen endlichen Werten der X_0^i u. s. f. nur dann eindeutige und endliche Werte für die Unbekannten, als die wir hier die $\frac{S_1}{2l_1}, \frac{S_2}{2l_2}, \ldots, \frac{S_g}{2l_g} \ldots$ auffassen können, wenn die Determinante der Koeffizienten von Null verschieden ist. Wir bilden diese Determinante; sie ist von der Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} & \cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m} \end{vmatrix}. \tag{49}$$

Darin bedeutet ξ allgemein eine Knotenpunktskoordinate, also z. B. x_i oder y_i und zwar natürlich immer jene, die zu dem Knotenpunkte und der Koordinatenrichtung gehört, worauf sich die betreffende Komponentengleichung bezieht.

Für die praktische Ausrechnung, um etwa für einen bestimmten, genau bezeichneten Fall nachzuweisen, ob der Ausnahmefall vorliegt oder nicht, wäre Gl. (49) viel zu umständlich. Für die Ableitung eines allgemein gültigen Satzes, die wir hier anstreben, ist die Determinantenform aber recht bequem.

Wir betrachten jetzt das Fachwerk nach seinem geometrischen Verhalten. Denkt man sich jede Stablänge ein wenig geändert, so wird auch die Fachwerkfigur eine kleine Gestaltänderung erfahren. Bezeichnet man mit δl_g die unendlich kleine Änderung von l_g und mit δx_i, $\delta y_i \ldots$ die Änderungen der Knotenpunktskoordinaten, so erhält man aus Gl. (43) durch Differentiieren

$$(x_i - x_k)\,\delta x_i + (x_k - x_i)\,\delta x_k + (y_i - y_k)\,\delta y_i + (y_k - y_i)\,\delta y_k = l_g\,\delta l_g. \qquad (50)$$

Wir denken uns für jeden Stab eine solche Gleichung angeschrieben, betrachten die δl als gegeben und lösen die Gleichungen nach den Unbekannten δx_i, δy_i u. s. f. oder, nach der vorher schon gebrauchten Bezeichnung, allgemeiner nach den Unbekannten $\delta \xi$ auf. Die Zahl der Unbekannten ist nämlich gleich $2n - 3$, da durch die Art, wie wir das Koordinatensystem gegen die Figur festlegten, drei Verschiebungskomponenten gleich Null sind und daher nicht unter den Unbekannten auftreten. Wir haben demnach ebensoviele Gleichungen ersten Grades, als Unbekannte vorkommen.

Mit Benutzung der durch Gl. (45) eingeführten Differentialquotienten läßt sich Gl. (50) auch schreiben

$$\frac{\partial f_g}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial f_g}{\partial x_k}\,\delta x_k + \frac{\partial f_g}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial f_g}{\partial y_k}\,\delta y_k = 2\,l_g\,\delta l_g.$$

Auch hier brauchen wir uns aber nicht darauf zu beschränken, nur jene Glieder anzuführen, die wirklich in der Gleichung vorkommen, sondern wir können, um auf eine symmetrische Form zu kommen, auch noch eine Reihe von Gliedern mit aufnehmen, von denen jedes schon seiner Definition nach den Wert Null hat. Wir schreiben also die Gleichung in der Form

$$\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\,\delta \xi_1 + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\,\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\,\delta \xi_m = 2\,l_g\,\delta l_g,$$

worin nun jede der $2n - 3$ oder m Unbekannten $\delta \xi$ durch ein Glied vertreten ist, obschon sich nur vier dieser Glieder von Null unterscheiden. Das vollständige System der $2n - 3$-

Gleichungen, die nach den $\delta \xi$ aufzulösen sind, läßt sich in dem Schema

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}\,\delta \xi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2}\,\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m}\,\delta \xi_m = 2\,l_1\,\delta\,l_1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1}\,\delta \xi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2}\,\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m}\,\delta \xi_m = 2\,l_2\,\delta\,l_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1}\,\delta \xi_1 + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2}\,\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m}\,\delta \xi_m = 2\,l_g\,d\,l_g \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial \xi_1}\,\delta \xi_1 + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2}\,\delta \xi_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m}\,\delta \xi_m = 2\,l_m\,\delta\,l_m
\end{array}\right\} \qquad (51)$$

zusammenfassen. Wenn die Gleichungen unabhängig von einander sind und sich nicht widersprechen, lassen sie sich nach den Unbekannten auflösen. Man erkennt dies daran, ob die Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m} \\
\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial f_g}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_g}{\partial \xi_m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \xi_m}
\end{vmatrix} \qquad (52)$$

von Null verschieden ist. Hat sie einen von Null verschiedenen Wert, so müssen auch alle $\delta \xi$ Null sein, wenn man alle δl gleich Null setzt. In diesem Falle sind keine unendlich kleinen Knotenpunktsverschiebungen möglich, ohne daß sich die Stablängen um Größen von derselben Ordnung änderten,

d. h. das Fachwerk ist steif. Der Ausnahmefall tritt dagegen ein, sobald die Determinante Δ' zu Null wird.

Vergleicht man Δ' in Gl. (52) mit Δ in Gl. (49), so findet man, daß sich beide Determinanten nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die Reihen mit den Zeilen vertauscht sind. Hierdurch wird aber nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie an dem Werte der Determinante nichts geändert. Die Bedingung dafür, daß die Stabspannungen für jede beliebige Belastungsart eindeutige, endliche Werte annehmen, ist daher identisch mit der Bedingung, daß das Fachwerk unverschieblich ist und wir haben damit den Satz bewiesen:

Ein Fachwerk, das nur die notwendige Zahl von Stäben enthält und stabil ist, ist auch statisch bestimmt und umgekehrt ist es stabil, wenn es statisch bestimmt ist, d. h. wenn man für jede beliebig gegebene Belastung ein System endlicher Stabspannungen anzugeben vermag, durch das an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt wird.

Zu demselben Schlusse waren wir zwar auch vorher schon in allen darauf hin untersuchten Fällen gelangt; immerhin ist es aber wertvoll, einen Beweis für den Satz zu besitzen, der ganz allgemein gültig ist. Man ist dann sicher, daß kein Fall vorkommen kann, den man etwa außer acht gelassen hätte und in dem der Satz aufhörte, gültig zu sein. — Ich bemerke noch, daß der Satz auch für räumliche Fachwerke gültig ist und genau ebenso bewiesen werden kann.

§ 38. Die Fachwerkträger.

Zu einem Träger oder „Binder“ wird ein Fachwerk erst dadurch, daß man es in der Konstruktionsebene auf geeignete Art festhält, so daß es sich nicht als Ganzes ohne Gestaltänderung verschieben kann, was bei den bisher untersuchten Fällen immer noch möglich war.

Eine starre Figur hat in ihrer Ebene drei Freiheitsgrade und wir müssen ihr daher drei Fesseln anlegen, um sie fest-

zuhalten. Eine solche Fessel, die einen Grad der Freiheit aufhebt, wird dadurch gegeben, daß wir irgend einem Knotenpunkte nur eine Verschiebung in einer bestimmten Richtung gestatten, indem wir ihn etwa längs einer Führung laufen lassen, die jede Verschiebungskomponente senkrecht zu deren Richtung unmöglich macht. Wir nennen diese Führung eine Auflagerung, die dem Fachwerke dadurch auferlegte Bewegungsbeschränkung eine Auflagerbedingung und den Knotenpunkt, dem sie vorgeschrieben wird, einen Auflagerknotenpunkt.

Wenn ein Knotenpunkt vollständig festgehalten wird, werden dadurch zwei Freiheitsgrade aufgehoben und wir sagen daher, daß einem festen Auflagerpunkte zwei Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Man kann sich die feste Auflagerung nämlich auch dadurch bewirkt denken, daß man den Knotenpunkt nötigt, gleichzeitig auf zwei voneinander verschiedenen Auflagerbahnen zu bleiben, so daß er sich wegen der andern auf keiner von beiden bewegen kann.

Jenachdem man die drei Auflagerbedingungen auf drei oder nur auf zwei Auflagerpunkte verteilt, erhält man verschiedene Trägerarten. In der heutigen Praxis kommt freilich nur der zuletzt erwähnte Fall vor. Es würde aber nichts im Wege stehen, auch den andern zur Ausführung zu bringen, und da man nicht wissen kann, was die Zukunft auf diesem Gebiete bringt, ist es immerhin nützlich, auch bei jenem für einen Augenblick zu verweilen.

Abb. 92 gibt den gewöhnlich vorkommenden Fall des „Balkenträgers" an, bei dem ein Auflagerknotenpunkt ganz

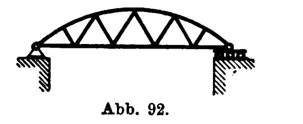


Abb. 92.

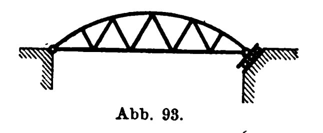


Abb. 93.

festgehalten ist, während sich der andere längs einer horizontalen Auflagerbahn verschieben kann. Von ihm unterscheidet sich der „Träger mit schiefer Auflagerung" in Abb. 93

nur durch die in anderer Richtung geführte Auflagerbahn. In beiden Fällen vermag man die durch beliebige Lasten hervorgerufenen Auflagerkräfte nach den schon früher dafür gegebenen Lehren sofort zu berechnen und nachdem dies geschehen ist, hat man es nur noch mit der Ermittelung der Stabspannungen im Fachwerke für bekannte äußere Kräfte zu tun.

Eine der möglichen Trägerarten mit drei Auflagerknotenpunkten, denen nur je eine Auflagerbedingung vorgeschrieben ist, führt Abb. 94 vor. Als Auflagerpunkte der starren Figur sind die Punkte *A*, *B*, *C* anzusehen und die Auflagerbedingungen in den Punkten *A* und B werden hier durch die Stäbe *AD* und *BE* verwirklicht, die den Punkten kreisförmige Auflagerbahnen um die Mittelpunkte *D* und *E* vorschreiben. In das Fachwerk sind daher diese Stäbe bei jener Auffassung nicht mit einzurechnen.

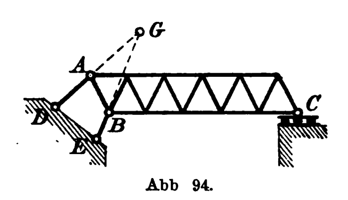


Abb 94.

Man kann aber auch sagen, daß die Stäbe *DA* und *EB* zusammen ein imaginäres Gelenk *G* ausmachen, um das sich das Fachwerk gegen die Konstruktionsebene zu drehen vermöchte, wenn die Auflagerbedingung in *C* nicht im Wege wäre. Der Gelenkdruck in *G* gibt den auf das linke Widerlager übertragenen Auflagerdruck an. Er wird dahin zwar nicht als einzelne Kraft, sondern in zwei Komponenten durch die beiden Stabspannungen in *AD* und *BE* übergeleitet.

Wenn der Träger nur senkrechte Lasten aufzunehmen hat, kann auch der Gelenkdruck in *G* immer nur senkrecht gerichtet sein, da er mit dem ebenfalls senkrecht gerichteten Auflagerdrucke in *C* und den Lasten ein Gleichgewichtssystem bilden muß. Die Gesamtlast verteilt sich daher auf die Punkte *C* und *G* so, als wenn sie an einem Balkenträger angriffe, der in *C* und einem auf der Lotrechten durch *G* gelegenen Punkte unterstützt wäre. Diese Bemerkung gestattet sofort einen ungefähren Überschlag über die Beanspruchung des Trägers.

Übrigens kann man sich auch das Walzenlager in C durch einen in lotrechter Richtung gehenden Stab von genügender Länge ersetzt denken, da es für die kleinen Bewegungen, die infolge der elastischen Formänderung des Fachwerkes tatsächlich noch möglich sind, nichts ausmacht, ob man den Knotenpunkt C nötigt, auf einem Kreisbogen von verhältnismäßig großem Halbmesser oder auf der ihn berührenden horizontalen Geraden zu bleiben. Man kann dann auch sagen, daß die von dem Fachwerke gebildete Scheibe mit der ebenfalls als Scheibe in der Konstruktionsebene erscheinenden festen Erde durch drei Stäbe verbunden ist. Die Spannungen der Verbindungsstäbe ergeben sich dann ebenfalls nach bekannten Regeln und nachdem sie ermittelt sind, hat man nur noch mit der Berechnung der Stabspannungen im Fachwerke bei gegebenen äußeren Kräften zu tun.

Wenn das Fachwerk an sich statisch bestimmt ist, erhält man in allen diesen Fällen auch statisch bestimmte Fachwerkträger. Zu solchen kann man aber auch noch auf andere Art gelangen. Schreibt man nämlich einem Fachwerke vier oder noch mehr Auflagerbedingungen vor, so erhält man zunächst einen statisch unbestimmten Fachwerkträger. Dieser kann aber dadurch wieder zu einem statisch bestimmten gemacht werden, daß man unter Beibehaltung der überzähligen Auflagerbedingungen eine entsprechende Zahl von Stäben fortnimmt.

Auf diese Art entsteht z. B. der häufig angewendete Fachwerkbogen mit drei Gelenken in Abb. 95. Die beiden Auflagerknoten A und B sind vollständig festgehalten; es sind also vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Denkt man sich den punktiert gezeichneten Stab DE zugefügt, so geht die Trägerfigur in ein einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk über. Die Berechnung der unbekannten Auflagerkräfte und

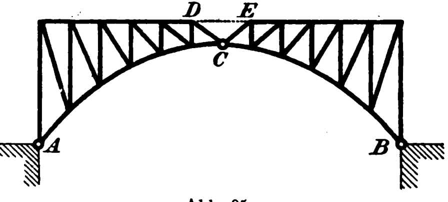


Abb. 95.

daher auch die Berechnung der Stabspannungen, die zu einer gegebenen Belastung gehören, könnte dann nur auf Grund der Elastizitätslehre erfolgen. Wenn man aber den Stab DE fortläßt, ist der Träger statisch bestimmt, weil hiermit eine der Unbekannten, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für alle Knotenpunkte ermitteln lassen müssen, wieder fortfällt, so daß wieder ebensoviele Gleichungen als Unbekannte zur Verfügung stehen. — Auf die besondere Gestalt des Trägers kommt es übrigens hierbei nicht an; wesentlich ist nur, daß der Träger aus zwei Scheiben aufgebaut ist, die für sich genommen statisch bestimmte Fachwerke darstellen, daß diese Scheiben in einem Scheitelgelenke C zusammenhängen und mit je einem Endknotenpunkte fest aufgelagert sind. Da sich die Scheiben bei einer elastischen Formänderung um ihre Auflagerpunkte ohne Widerstand zu drehen vermögen, bezeichnet man diese Auflagerpunkte ebenfalls als Gelenke und zwar als die „Kämpfergelenke“ des Dreigelenkbogens.

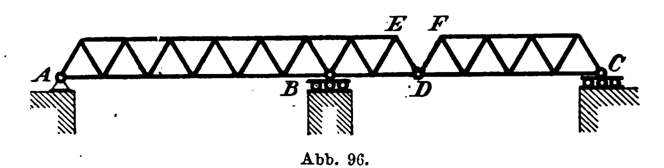


Abb. 96.

Ein anderes Beispiel zeigt Abb. 96. Hier sind vier Auflagerbedingungen auf den festgehaltenen Knotenpunkt A und die auf Walzenlager gesetzten Auflagerpunkte B und C verteilt. Auch hier wird die Trägerfigur aus zwei Scheiben gebildet, die im Gelenke D zusammenhängen. Fügte man den zwischen E und F fortgelassenen Stab hinzu, so ginge die Trägerfigur in ein statisch bestimmtes Fachwerk, der Träger selbst aber in einen statisch unbestimmten über. Der Träger in Abb. 96 ist ein Gerberscher Gelenkträger, für den die Berechnung der Auflagerkräfte bereits im zweiten Abschnitte auseinander gesetzt wurde. Nachdem die Auflagerkräfte bekannt sind, ergeben sich die Stabspannungen auf einfache Weise, z. B. durch Zeichnen eines Kräfteplanes.

Ein Beispiel mit fünf Auflagerbedingungen ist in Abb. 97 dargestellt. Als Auflagerpunkte sind der festgehaltene Knotenpunkt A, der auf Walzen verschiebliche B und die durch die Stäbe EC und FD auf Kreisbögen geführten Knotenpunkte C und D aufzufassen. Die Stäbe CE und DF sind hiernach in die Fachwerkfigur nicht mit einzurechnen, sie dienen vielmehr nur zur Verwirklichung der Auflagerbedingungen. Man überzeugt sich leicht, daß die zwischen den Auflagerpunkten A, C, D, B liegende Trägerfigur zwei Stäbe weniger hat, als zur Aussteifung nötig wären, wenn nicht zwei überzählige Auflagerbedingungen hinzukämen. Anstatt die Knotenpunkte und die Stäbe abzuzählen, kann man hierbei davon ausgehen, daß die Einschaltung eines Stabes zwischen H und J den unteren Teil, für sich betrachtet, in ein einfaches statisch bestimmtes Fachwerk umwandeln würde. Um die Knotenpunkte C und D und die zwischen ihnen liegenden hieran anzuschließen, genügen die vorhandenen Stäbe nicht. Man müßte dazu etwa noch einen Stab CK einführen. Dann hätte man aber in der Tat wieder ein einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk vor sich, denn zunächst wäre der Punkt C durch zwei Stäbe mit dem unteren Teile verbunden, an C und den unteren Teil wäre der folgende Knotenpunkt durch zwei Stäbe angeschlossen und so fort bis zum andern Ende bei D.

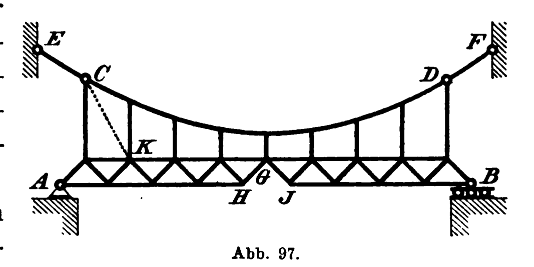


Abb. 97.

Als jene Stäbe, die aus dem statisch bestimmten Fachwerke entfernt und durch zwei überzählige Auflagerbedingungen ersetzt sind, kann man demnach HJ und CK betrachten, obschon die Wahl auch noch anders getroffen werden könnte.

Träger von der Gliederung der Abb. 97 werden bei der Errichtung von sogenannten versteiften Hängebrücken verwendet. Die die Figur nach oben hin abschließenden Stäbe

werden nur auf Zug beansprucht und man kann sie daher auch aus Seilen oder Ketten herstellen. Der von ihnen gebildete Linienzug mag daher die „Kette“ genannt werden. An der Kette ist der untere „Versteifungsträger“ durch „Hängeeisen“ angehängt. Die Hängeeisen sind hier in lotrechter Stellung angenommen und sie vermögen daher auf die Kette nur lotrechte Lasten zu übertragen.

Zwischen den Spannungen in den Hängeeisen und den Kettenspannungen bestehen die früher untersuchten einfachen Beziehungen zwischen den Lasten und den Seilspannungen in einem Seilecke. Wählt man, wie es stets zu geschehen pflegt, die Gestalt der Kette so, daß ihre Knotenpunkte auf einer Parabel liegen, so können alle Hängeeisen, wie auch der untere Träger, der zur Aufnahme der Lasten bestimmt ist, belastet sein möge, nur gleich große Spannungen aufnehmen. Nimmt der untere Träger eine gleichförmig verteilte Last auf, so wird diese ausschließlich auf die Kette übertragen. Dies folgt daraus, daß ein Spannungsbild dieser Art an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellt und daß bei einem statisch bestimmten Träger nur ein einziges Spannungsbild möglich ist, das diese Bedingung erfüllt. Die ganze Eigenlast wird daher ebenso wie die gleichförmig verteilte Gesamtlast von der Kette aufgenommen. Diese stellt daher den wichtigsten Teil der ganzen Konstruktion dar. Der untere Träger wird nur bei ungleichförmig verteilten Lasten in Mitleidenschaft gezogen; daher kommt seine Bezeichnung als Versteifungsträger der Kette.

Wird ein beliebig gegebenes Lastensystem aufgebracht, so denke man sich, um die Auflagerkräfte und Stabspannungen zu berechnen, die Hängeeisen durchschnitten und betrachte das Gleichgewicht des Versteifungsträgers, nachdem die Spannungen der Hängeeisen durch lotrechte Kräfte ersetzt sind, von denen man zunächst nur weiß, daß sie alle untereinander gleich sind. Bezeichnet man die Spannung eines Hängeeisens mit X und ihre Anzahl mit n, so bringt die von ihnen übertragene, nach oben gerichtete Gesamtlast an den Auflagern A und B für

sich genommen negative Auflagerdrücke von der Größe $\frac{nX}{2}$ hervor. Dazu kommen die von dem gegebenen Lastensysteme herrührenden positiven Auflagerdrücke, die auf gewöhnliche Art leicht berechnet werden können. Um für den Fall, daß die negativen Auflagerkräfte überwiegen, ein Abheben der Auflagerpunkte von den Lagern zu vermeiden, muß man geeignete Vorkehrungen dagegen treffen.

Zur Ermittelung der Unbekannten X dient schließlich die Bedingung, daß im Gelenke G zwischen den beiden Scheiben, die den Versteifungsträger zusammensetzen, kein Moment übertragen werden kann. Man kann diese Bedingung etwa in einer Momentengleichung in bezug auf Punkt G für das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben zum Ausdrucke bringen, in der den vorhergehenden Bemerkungen zufolge X als einzige Unbekannte auftritt. Oder man kann auch die gegebenen Lasten durch ein Seilpolygon zusammensetzen und durch Eintragen der Schlußlinie die ihnen, für sich genommen, entsprechende Momentenfläche konstruieren, worauf man ein zweites Seilpolygon darüber legt, das zu unter sich gleichen Lasten an den Hängeeisen gehört und dessen Horizontalschub so bestimmt wird, daß das Moment in G mit dem vorigen gleich groß wird. Die zwischen diesem Parabelpolygone und dem vorigen Seilpolygone eingeschlossene Fläche gibt die Momentenfläche für den Versteifungsträger an. Es würde hier zu weit führen, das Verfahren noch eingehender zu besprechen; diese Andeutungen müssen daher genügen.

Bezeichnet man allgemein die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man für die notwendige Stabzahl, also für die Zahl der Stäbe im statisch bestimmten Träger,

$$m = 2n - p; \tag{53}$$

denn diese Formel gilt zunächst für $p = 3$ und da man für jede weitere Auflagerbedingung einen Stab fortzunehmen hat, bleibt sie auch für größere Werte von p gültig. Natürlich muß man zugleich darauf achten, daß kein Ausnahmefall vorliegt.

§ 39. Der Dreigelenkbogen.

Für den schon im Anschlusse an Abb. 95 besprochenen Fachwerkbogen mit drei Gelenken soll die Betrachtung noch etwas weiter durchgeführt werden. Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Berechnung der Auflagerkräfte und des im Scheitel übertragenen Gelenkdruckes, denn die Spannungen in den beiden Scheiben können, nachdem die äußeren Kräfte gefunden sind, auf bekannte Weise ermittelt werden. Da Gestalt und Gliederung der Scheiben für die Ermittelung der Auflagerkräfte gleichgültig sind, wurden die Scheiben in Abb. 98 nur durch schraffierte Flächen von beliebigem Umrisse angegeben.

In Abb. 98 ist angenommen, daß nur eine Einzellast an einer der beiden Scheiben angebracht sei. Um die von ihr hervorgerufenen Gelenkdrücke zu ermitteln, bedenke man, daß an der unbelasteten Scheibe nur zwei Kräfte angreifen, die in den Gelenken B und C auf sie übertragen werden. Damit Gleichgewicht bestehe, müssen beide in dieselbe Richtungslinie, also in die Verbindungslinie der Punkte B und C fallen. Hiermit ist die Richtung des Gelenkdruckes in C auch für die andere Scheibe bekannt. An dieser halten sich drei Kräfte im Gleichgewichte, deren Richtungslinien sich in einem Punkte treffen müssen. Verlängert man also BC bis zum Schnitte mit der Richtungslinie der Last P, so muß durch diesen Punkt auch der in A übertragene Auflagerdruck gehen. Es bleibt nur noch übrig, die Kraft P nach den beiden Richtungslinien zu zerlegen, was etwa mit Hülfe eines Kräftedreieckes geschehen kann.

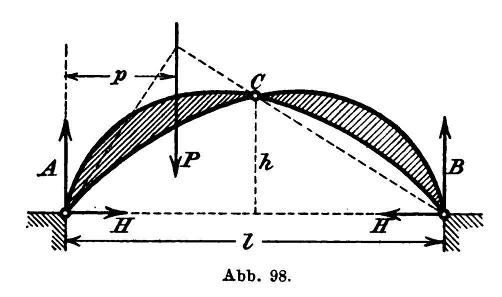


Abb. 98.

Anstatt dessen kann man die durch P hervorgerufenen Auflagerkräfte auch durch Rechnung bestimmen. Dabei sei

vorausgesetzt, daß die Auflager A und B in gleicher Höhe liegen. Zerlegt man jeden Auflagerdruck in eine vertikale und eine horizontale Komponente, so folgt zunächst aus der Bedingung für das Gleichgewicht des ganzen Trägers gegen Verschieben in der horizontalen Richtung, daß die beiden Horizontalkomponenten H von gleicher Größe sein müssen, wenigstens dann, wenn die Last P lotrecht gerichtet ist. Die vertikalen Komponenten erhält man aus Momentengleichungen für die Auflagerpunkte zu

$$A = P\frac{l-p}{l}\,; \quad B = P\frac{p}{l},$$

also ebenso groß, als wenn die Last P an einem Balkenträger angebracht wäre, der die gleiche Spannweite überdeckte.

Um den Horizontalschub H zu finden, betrachtet man das Gleichgewicht einer der beiden Scheiben für sich. In bezug auf C als Momentenpunkt erhält man für die unbelastete Scheibe die Momentengleichung

$$Hh = B\frac{l}{2} \quad \text{und daher} \quad H = \frac{Pp}{2h}.$$

Diese Gleichung gilt indessen nur so lange, als p zwischen 0 und $\frac{l}{2}$ liegt. Wird p größer, so ist dafür der Abstand $l-p$ vom andern Auflager einzuführen und der Ausdruck für H lautet

$$H = \frac{P(l-p)}{2h}.$$

Trägt man die Abstände p als Abscissen und den von der Lasteinheit, wenn sie an der Stelle p angebracht wird, hervorgerufenen Horizontalschub als Ordinate in einem beliebigen Maßstabe auf, so erhält man die in Abb. 99 gezeichnete graphische Darstellung für das Abhängigkeitsgesetz zwischen dem Horizontalschube und der Laststellung. Die gebrochene Linie, die die Endpunkte aller Ordinaten verbindet, wird als die Einflußlinie für H bezeichnet. Mit Hülfe der

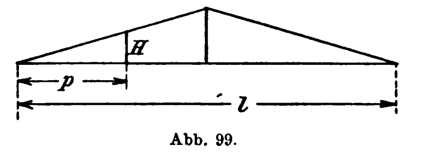


Abb. 99.

Einflußlinie kann man für jedes beliebige System lotrechter Lasten den zugehörigen Horizontalschub berechnen, indem man jede Last mit der Verhältniszahl multipliziert, die von der auf ihrer Richtungslinie gelegenen Ordinate der Einflußlinie angegeben wird, und alle Produkte addiert.

Denkt man sich bei einem beliebig gegebenen Lastensysteme den Auflagerdruck am linken Auflager mit der nächst gelegenen Last zusammengesetzt, die Resultierende mit der folgenden Last u. s. f., so erhält man ein Seileck. Da sich auch der Gelenkdruck im Scheitelgelenke und der Auflagerdruck am andern Trägerende unter diesen Resultierenden befinden, muß das Seileck auch durch diese Gelenkpunkte gehen. Die Aufgabe, die Gelenkdrücke für den Dreigelenkbogen zu ermitteln, kommt daher im wesentlichen auf dasselbe hinaus wie die Aufgabe, *zu gegebenen Lasten ein Seileck zu zeichnen, das durch drei vorgeschriebene Punkte geht.*

Für die Lösung dieser einfachen Aufgabe hat man schon viele Wege ausgedacht. Man kann z. B. mit einem Seilecke beginnen, das zunächst nur durch einen der drei Punkte geht, dann unter Benutzung des in § 11 bewiesenen Satzes durch Verschieben des Poles im Kräfteplane ein zweites daraus ableiten, das durch zwei Punkte geht und durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens ein drittes, das alle drei Bedingungen erfüllt.

Ein anderes Verfahren besteht darin, die gegebenen Lasten zunächst durch ein beliebiges Seilpolygon zu verbinden und mit dessen Hülfe (nach § 10) sowohl die Resultierenden $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ der an der linken und rechten Scheibe, einzeln genommen, angreifenden Lasten als auch die Gesamtresultierende $\mathfrak{R}$ aller Lasten zu ermitteln. Hierauf beachte man, daß sich die Gelenkdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die zu den Gelenken A, B, C gehören, paarweise auf den Richtungslinien der drei Resultierenden schneiden müssen, nämlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{R}_r$. Die Richtungslinien von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bestimmen demnach ein Dreieck, dessen Seiten durch die Punkte A, B, C

gehen und dessen Ecken auf den drei parallelen (oder bei nicht parallelen Lasten wenigstens in einem Punkte sich schneidenden) Richtungslinien $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_l$, $\mathfrak{R}_r$ liegen müssen. Wir haben also dieselbe Aufgabe zu lösen wie schon in § 35.

In Abb. 100 ist dies ausgeführt. Die Einzellasten und das zu ihrer Zusammensetzung dienende Seilpolygon sind weggelassen, die Richtungslinien der drei Resultierenden daher als unmittelbar gegeben angenommen worden. Man ziehe zuerst die Dreieckseite 1 von A aus in beliebiger Richtung, hierauf 2 durch C und 3 durch den Schnittpunkt von 1 mit $\mathfrak{R}$. Dadurch erhält man ein Dreieck 1, 2, 3, das fünf von den sechs Bedingungen erfüllt; nur die Seite 3 geht nicht durch den vorgeschriebenen Punkt B. Ein zweites Dreieck, daß dieselben fünf Bedingungen erfüllt, geht in die durch A und C gezogene Linie 4 über. Durch den Schnittpunkt D von 4 mit 3 muß daher die dritte Seite jedes andern Dreieckes gehen, das denselben fünf Bedingungen genügt, also auch jenes, das zugleich die sechste Bedingung erfüllt. Man zieht hiernach 5 von B aus durch D und erhält so das gesuchte Dreieck 5, 6, 7. Nachdem die Richtungslinien der Gelenkdrücke bekannt sind, ergeben sich ihre Größen durch einfache Kräftezerlegungen.

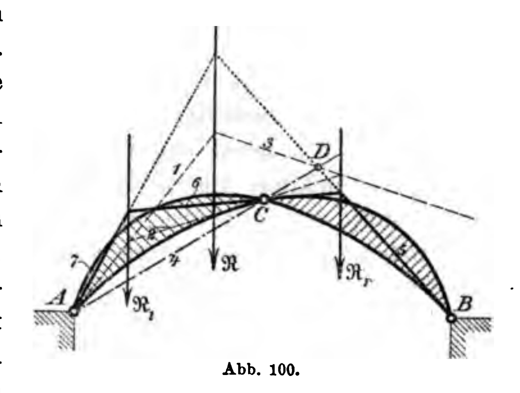


Abb. 100.

Natürlich kann man auch, nachdem $\mathfrak{R}_l$ und $\mathfrak{R}_r$ gefunden sind, nach dem vorher für eine Einzellast beschriebenen Verfahren zuerst die Gelenkdrücke ermitteln, die entstehen, wenn nur die linke Scheibe mit $\mathfrak{R}_l$ belastet, die andere aber unbelastet ist, hierauf dasselbe für $\mathfrak{R}_r$ wiederholen und die unter der ganzen Last entstehenden Gelenkdrücke durch geometrische Summierung aus den Einzelwerten bestimmen. Dieses Ver-

fahren ist vielleicht noch das einfachste, bedarf aber gerade darum hier keiner weiteren Erläuterung.

Der Begriff der Einflußlinie, der vorher bei der Berechnung des durch eine Einzellast hervorgerufenen Horizontalschubes zur Sprache kam, läßt sich auch noch weiter verwerten. Man kann sich die Aufgabe stellen, die Spannung irgend eines beliebig herausgegriffenen Stabes für wechselnde Stellungen einer Einzellast, die gleich der Belastungseinheit genommen wird, zu berechnen und diese Spannung, wie im früheren Falle H, als Ordinate zu einer Abscisse p aufzutragen, die die Laststellung angibt. Nach der Ritterschen Methode läßt sich leicht ein Ausdruck für die Stabspannung, der sie als Funktion von p darstellt, ableiten. Er ist vom ersten Grade, wechselt aber die Form, wenn die Last aus einem Gebiete (links oder rechts vom Schnitte oder links oder rechts vom Scheitelgelenke) in ein anderes übertritt. Die Einflußlinie für die Stabspannung setzt sich daher ebenfalls aus einem gebrochenen Zuge gerader Linien zusammen. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr zur Mechanik, sondern zur Konstruktionslehre.

Aufgaben.

25. Aufgabe. Die in Abb. 101[a] gezeichnete Grundfigur trägt die Lasten P und P'; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Figur zählt sechs Knotenpunkte und neun Stäbe, also die notwendige Zahl. Sie kann durch Verbindung des Stabdreieckes 2, 3, 4 mit dem Dreiecke 7, 8, 9 durch die drei Stäbe 1, 5, 6 entstanden gedacht werden. Man kann also auch einen Schnitt legen, der nur drei Stäbe trifft (nämlich die drei Verbindungsstäbe), deren Richtungslinien sich nicht in einem Punkte schneiden. Die Spannungen der Verbindungsstäbe findet man entweder nach der Ritterschen Methode oder mit Hülfe der Culmannschen Kräftezerlegung. Dabei liegt hier insofern noch ein besonderer Fall vor, als zwei der Verbindungsstäbe, nämlich 1 und 6 parallel zueinander verlaufen. In diesem Falle, der öfters vorkommt und deshalb hier noch besonders berührt werden sollte, vereinfacht sich das Culmannsche Verfahren erheblich. Denkt man sich nämlich einen horizontalen Schnitt durch die Mitte der Figur

gelegt und betrachtet das Gleichgewicht der oberen Hälfte, so folgt sofort, daß die Resultierende aus P und 5 parallel zu 1 und 6 sein muß. Man findet daher 5 durch das nebenan gezeichnete Kräftedreieck und zwar als Druckspannung.

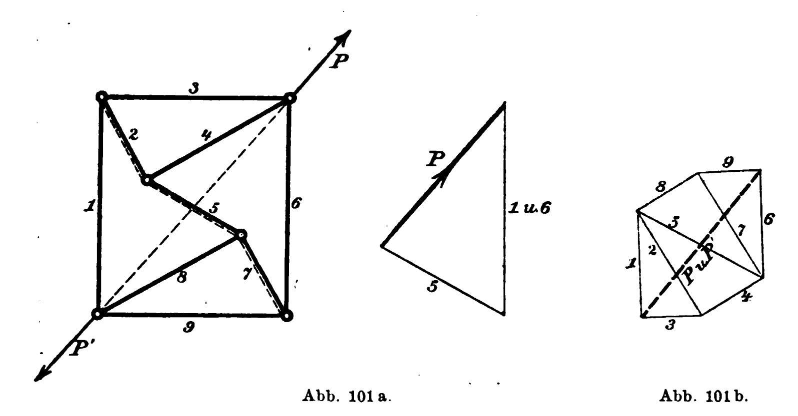


Abb. 101 a. Abb. 101 b.

Nachdem 5 bekannt ist, kann man auch den Kräfteplan in Abb. 101[b] auftragen, indem man mit den Dreiecken 5, 2, 4 und 5, 7, 8 beginnt, worauf sich die Dreiecke 2, 1, 3 und 7, 9, 6 anreihen. Der Kräfteplan ist ein reziproker. Die auf Druck beanspruchten Stäbe sind in Abb. 101[a] durch beigesetzte Schattenstriche hervorgehoben. — Natürlich könnte man ganz ähnlich verfahren, wenn beliebig gegebene andere Lasten an dem Fachwerke angriffen. Man müßte dann zuerst jene Lasten, die an der oberen Hälfte der Figur angreifen, zu einer Resultierenden vereinigen, die an Stelle von P nach 5 und 1, 6 zu zerlegen wäre.

26. Aufgabe. An dem in Abb. 102 gezeichneten Fachwerke greifen die Lasten P und P' an; man soll die Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Die Aufgabe ist der vorigen ganz ähnlich; man kann sich die Figur durch Vereinigung der Dreiecke 1, 2, 3 und 4, 5, 6 durch die drei Verbindungsstäbe 7, 8, 9 entstanden denken. Daß hier das eine Dreieck von dem andern umschlossen wird, macht nur wenig aus. Der Schnitt, den man zu führen hat, um das Rittersche oder Culmannsche Verfahren anzuwenden und der die Figur in zwei Teile zerlegen muß, die nur durch drei Stäbe zusammenhängen, die nicht durch einen Punkt gehen, muß hier freilich ringförmig zwischen den Dreiecken 1, 2, 3 und 4, 5, 6 gezogen werden. Dies hindert aber die Anwendung des Verfahrens

nicht: die Zerlegung von P nach den drei Richtungslinien 7, 8, 9 liefert sofort die Spannungen in den Verbindungsstäben.

Anstatt dessen kann man auch den Begriff des imaginären Gelenkes zur Lösung benutzen. Von den drei Stäben 7, 8, 9 z. B. hängt jeder mit dem andern durch zwei Stäbe oder, wie wir sagen können, in einem imaginären Gelenke zusammen. Die Gelenkpunkte sind in der Abbildung mit 7, 8, mit 8, 9 und mit 7, 9 bezeichnet. Auf den Stab 8 werden nur die Gelenkdrücke 7, 8 und 8, 9 übertragen; beide müssen daher gleich sein und in dieselbe Richtungslinie fallen. Zieht man die Verbindungslinie beider Gelenkpunkte, so kennt man damit auch für den Stab 9 die Richtungslinie des Gelenkdruckes 8, 9. Am Stabe 9 greifen außerdem noch die Last P und der Gelenkdruck 7, 9 an. Die drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden und hieraus erhält man auch die Richtung des Gelenkdruckes 7, 9. Mit Hülfe eines Kräftedreieckes (das in der Abbildung weggelassen wurde) erhält man auch die Größen der Gelenkdrücke und durch Zerlegung jedes Gelenkdruckes nach den Richtungen der beiden Stäbe, die das Gelenk bilden, die Stabspannungen.

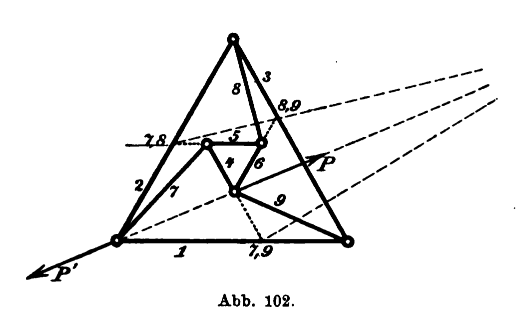


Abb. 102.

27. Aufgabe. An einer Wand ist in einer lotrechten Ebene das aus den Stäben 1 bis 8 bestehende Stabgerüst (Abb. 103) befestigt, das dazu bestimmt ist, die Last P aufzunehmen; man soll die Stabspannungen berechnen.

Lösung. Die Wand ist als eine Scheibe aufzufassen, an die vier freie Knotenpunkte angeschlossen sind. Dazu braucht man acht Stäbe und diese sind auch vorhanden. Bei der Berechnung der Stabspannungen ergibt sich jedoch, daß diese unendlich groß werden und daraus folgt, daß ein Ausnahmefall vorliegt. Das Stabgerüst ist daher gar nicht tragfähig; wenigstens vermag es Lasten nur insoweit aufzunehmen, als es die Biegungsfestigkeit der Stäbe in Verbindung mit der Steifigkeit der Knotenpunkte zuläßt, d. h. nur geringe Lasten, die schon verhältnismäßig große Formänderungen herbeiführen.

Beseitigt man nämlich etwa Stab 5, um das Hennebergsche Verfahren anzuwenden, und bringt dafür irgend einen geeignet

gewählten Ersatzstab *e* an, so ist das hierdurch entstehende Fachwerk zwar tragfähig und die Stabspannungen lassen sich leicht ermitteln. Sobald man aber dann in der Richtungslinie des Stabes 5 eine Zugspannung von der Lasteinheit anbringt und einen zweiten Kräfteplan für diesen Belastungsfall zeichnet, findet man, daß der Stab *e*, wie er nun auch gewählt sein möge, hierbei spannungslos bleibt. Dies geht schon aus der Symmetrie der Figur hervor. Die zur horizontalen Symmetrieachse symmetrisch liegenden Stäbe erfahren Spannungen gleicher Größe und gleichen Vorzeichens und man kann auf diese Weise Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne den Ersatzstab *e* in Anspruch zu nehmen. Dies ist aber bei dem Hennebergschen Verfahren das Kennzeichen für den Ausnahmefall.

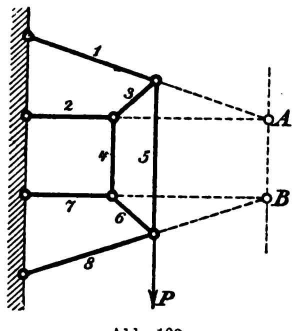


Abb. 103.

Noch einfacher und hier zugleich allgemeiner verwendbar ist die Untersuchung mit Hülfe der imaginären Gelenke. Stab 3 hängt mit der Wand im imaginären Gelenke *A* und Stab 6 mit der Wand in *B* zusammen. Außerdem sind noch 3 und 6 unter sich durch die beiden parallelen Stäbe 4 und 5 verbunden, die einem im unendlichen liegenden imaginären Gelenke *C* gleichwertig sind. Die drei Gelenke *A*, *B*, *C* liegen aber bei der in der Abbildung getroffenen Anordnung in einer Geraden und darin besteht bei dieser Art der Untersuchung das Kennzeichen des Ausnahmefalles.

Auch die Methode von Müller-Breslau führt schnell zum gleichen Ergebnisse. Man kann nämlich eine Figur zeichnen, die in der Gliederung und in allen Stabrichtungen mit der Stabfigur übereinstimmt, ohne ihr ähnlich zu sein.

Durch geeignete Änderungen in den Stabrichtungen kann man aber unter Beibehaltung der Anordnung im übrigen das Stabgerüst leicht so umgestalten, daß der Ausnahmefall vermieden wird. Man braucht hierbei nur darauf zu achten, daß die Gelenke *A*, *B*, *C* nicht auf einer Geraden liegen dürfen. Die Berechnung der durch die Last *P* hervorgerufenen Stabspannungen kann alsdann nach jeder der drei vorher schon benutzten Methoden erfolgen.

28. Aufgabe. Man soll für das in Abb. 104[a] gezeichnete Fachwerk, an dem sich die gegebenen äußeren Kräfte P, A und B im Gleichgewichte halten, die Stabspannungen nach dem Hennebergschen Verfahren berechnen.

Lösung. Man beseitigt hier am besten den Stab 1, weil sich dann die Berechnung am einfachsten gestaltet, und führt etwa den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Ersatzstab e ein. Da die Richtungslinien der Kräfte A und B hier in die Richtungen der Stäbe 2 und 12 fallen, braucht man für die zugehörigen Knotenpunkte gar keine Kräftedreiecke zu zeichnen; man weiß sofort, daß die Stäbe 3 und 13 spannungslos werden, während die Stäbe 2 und 12 die äußeren Kräfte A und B allein aufzunehmen haben. Da 3 spannungslos ist, müssen auch die beiden andern, mit ihm von demselben Knotenpunkte ausgehenden Stäbe 4 und 5 spannungslos sein und ebenso auf der andern Seite 10 und 11. Am Angriffspunkte von P bleiben hiernach nur die Spannungen von e und 8 übrig. Da aber P in die Richtung von 8 fällt, so ist auch e spannungslos. In dem einfachen Fachwerke, das wir durch die Stabvertauschung erhielten, geraten demnach unter der angegebenen Belastung nur die Stäbe 2, 6, 7, 8, 9 und 12 in Spannung.

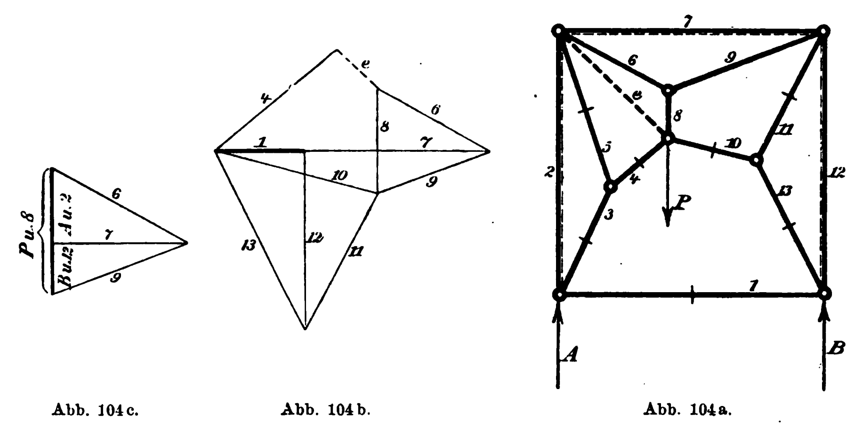


Abb. 104 c. Abb. 104 b. Abb. 104 a.

Von diesen Ergebnissen interessiert uns zunächst nur der Umstand, daß im Spannungsbilde T, wie es in § 34 genannt wurde, die Spannung T_e des Ersatzstabes gleich Null ist. Zugleich erkennt man aber auch, daß dieser besondere Wert von T_e nur zu dieser besonderen Belastung gehört; bei anderm Lastangriffe würde auch e Spannung aufzunehmen haben.

Jetzt fragt es sich, ob etwa die Spannung u_e im Ersatzstabe, die durch eine längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes 1 angebrachte Zugspannung hervorgerufen wird, ebenfalls zu Null wird. Wird sie nicht zu Null, so ist nach Gl. (36), S. 218, was

auch sonst der Wert von u_e sein möge, jedenfalls die wirklich eintretende Spannung X des beseitigten Stabes gleich Null. Der Kräfteplan u läßt sich leicht zeichnen, indem man (Abb. 104^b) zuerst 1 gleich der Lasteinheit aufträgt, hierauf das Dreieck 1, 12, 13, dann das Dreieck 13, 10, 11, das Viereck 11, 12, 7, 9, das Dreieck 9, 6, 8 und schließlich das Viereck 8, 10, 4, e zufügt. Der Kräfteplan kann zugleich, wie es in der Abbildung geschehen ist, als reziproker konstruiert werden, da sich die Fachwerkfigur ohne weiteres in Polygone zerlegen läßt, so daß in jedem Stabe zwei aneinander grenzen. Nachdem u_e gefunden ist, hat es keinen Zweck, den Kräfteplan noch weiter zu führen, obschon dies leicht geschehen könnte. Überdies brauchen wir auch den Kräfteplan u im vorliegenden Falle nur, um uns zu überzeugen, ob u_e von Null verschieden ist.

Nachdem dies nachgewiesen ist, wissen wir, daß der Stab 1 in dem ursprünglich gegebenen Fachwerke bei der gegebenen Belastung die Spannung Null hat. Der Kräfteplan S ist daher im vorliegenden Falle identisch mit dem schon vorher besprochenen, aber noch nicht gezeichneten Kräfteplane T. In Abb. 104^c ist dies nachträglich geschehen und die Stabspannungen, die in dem gegebenen Fachwerke tatsächlich auftreten, können daraus unmittelbar entnommen werden. Gezogen sind die Stäbe 6, 8, 9, gedrückt die Stäbe 2, 7, 12; alle andern, die in Abb. 104^a überdies durch kurze Querstriche gekennzeichnet sind, bleiben spannungslos.

Symmetrisch darf man das Fachwerk in Abb. 104^a freilich nicht annehmen, sonst kommt man wieder auf einen Ausnahmefall, wie bei der vorigen Aufgabe. Bei der hier vorausgesetzten Belastungsart wäre freilich auch dann noch Gleichgewicht ohne unendlich große Stabspannungen möglich. Das Gleichgewicht wäre aber labil und bei jeder Abweichung von der symmetrischen Belastung kämen unendlich große Stabspannungen vor. Man erkennt dies daraus, daß u_e bei der symmetrischen Anordnung zu Null wird, während T_e bei einer unsymmetrischen Belastung von Null verschieden ist.

Daß man gerade bei symmetrischen Figuren leicht auf Ausnahmefälle geführt wird, kann übrigens nicht überraschen, da die Symmetrie einer Figur selbst schon einen ausgezeichneten Fall bildet, der sich mit jenem andern leicht deckt.

29. Aufgabe. Der in Abb. 105^a gezeichnete Dachbinder hat in der Mitte eine sechseckige, statisch bestimmte Grundfigur, da die drei sich in der Mitte kreuzenden Sechseckdiagonalen an der Kreuzungsstelle nicht miteinander verbunden sein sollen. Jeder Knotenpunkt des Obergurtes trägt eine Last von 3000 kg; man soll die Stabspannungen berechnen.

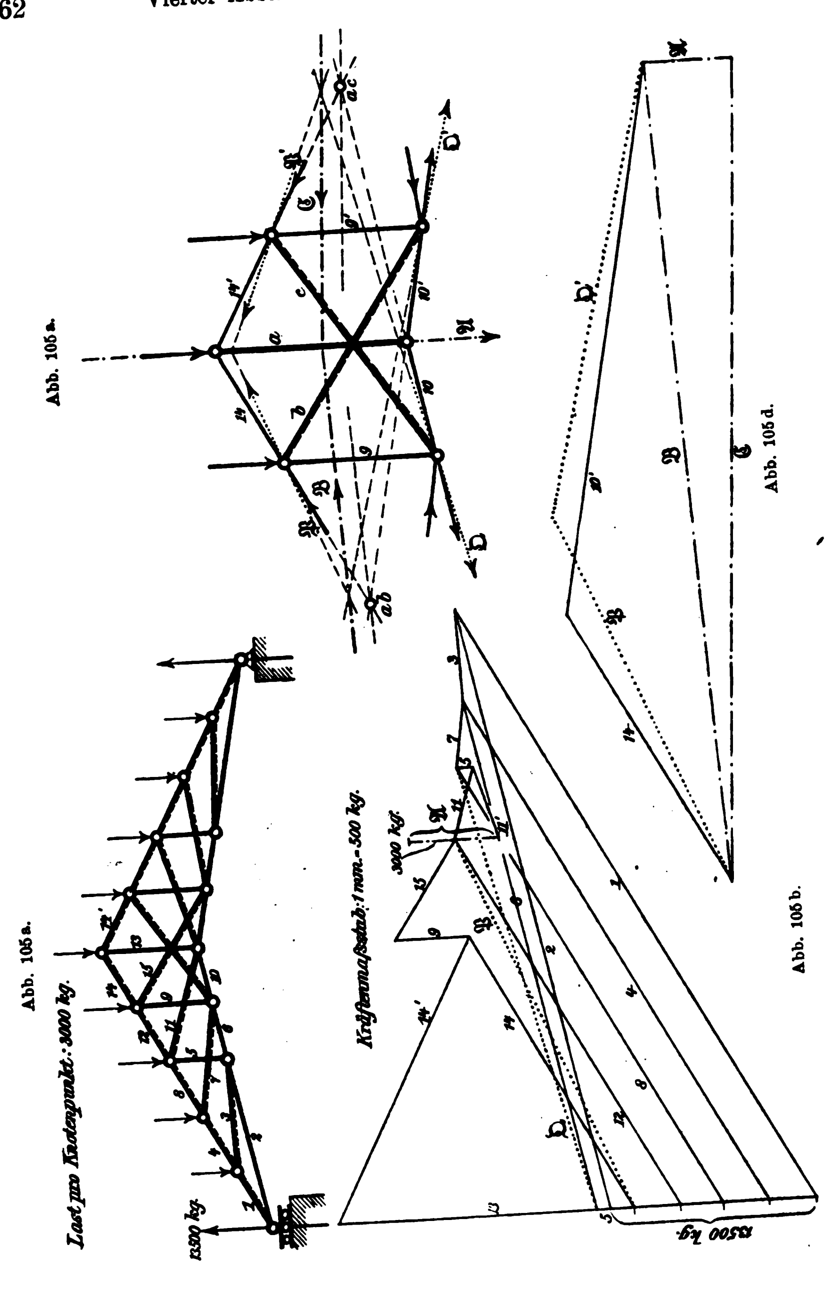


Abb. 105 a.

Abb. 105 b.

Abb. 105 a.

Abb. 105 d.

Lösung. Die Spannungen der nicht zur Grundfigur gehörenden Stäbe können sofort mit Hülfe des Kräfteplanes in Abb. 105^b gefunden werden. Wegen der symmetrischen Belastung genügte es, ihn nur für die linke Trägerhälfte bis zur Grundfigur hin fortzuführen; andernfalls müßte auch für die rechte Trägerhälfte der Kräfteplan in derselben Weise vom rechten Auflagerpunkte aus beginnend konstruiert werden.

Die Grundfigur ist in Abb. 105^c in doppelter Größe herausgezeichnet. An ihren Knotenpunkten sind vor allem die äußeren Kräfte, also sowohl die Lasten von je 3000 kg, als die bereits aus Abb. 105^b bekannten Spannungen der weggeschnittenen Stäbe anzubringen. Am links oben gelegenen Knotenpunkte ist nur der Druckstab 12 weggeschnitten. Dessen Spannung wurde im Kräfteplane Abb. 105^b mit der Last von 3000 kg zu einer Resultierenden $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt, die durch eine punktierte Linie angegeben ist. Für die Grundfigur kommt dann an diesem Knotenpunkte nur noch die Resultierende $\mathfrak{P}$ als äußere Kraft in Frage. Aus $\mathfrak{P}$ folgt sofort auch $\mathfrak{P}'$ an dem symmetrisch gelegenen Knotenpunkte der rechten Seite.

Ebenso sind auch im Kräfteplane die Spannungen der von dem links unten liegenden Knotenpunkte weggeschnittenen Stäbe 6 und 7 zu einer Resultierenden $\mathfrak{Q}$ vereinigt, die als äußere Kraft an der Grundfigur eingetragen ist. Ihr entspricht zugleich die symmetrisch dazu liegende Kraft $\mathfrak{Q}'$ auf der rechten Seite.

Vom unteren, mittleren Knotenpunkte gingen vorher noch die Stäbe 11 und 11′ aus (wenn die Stäbe der rechten Hälfte auf diese Weise bezeichnet werden). Auch ihre Spannungen sind im Kräfteplane zu einer Resultierenden vereinigt, die keine besondere Benennung erhalten hat. — Am oberen Knotenpunkte der Mitte greift nur die Last von 3000 kg an.

Nach diesen Vorbereitungen muß man sich für die Methode entscheiden, die man zur Berechnung der Stabspannungen in der Grundfigur anwenden will. Am einfachsten gestaltet sich hier die Berechnung mit Benutzung der imaginären Gelenke. Darum sind auch in Abb. 105^c die drei Sechseckdiagonalen mit den schon früher bei Besprechung dieses Verfahrens benutzten Buchstaben a, b, c bezeichnet, während sie in Abb. 105^a die Nummern 13, 15 und 15′ trugen.

Die imaginären Gelenke ab und ac sind in der Abbildung angegeben; das Gelenk bc fällt dagegen im vorliegenden Falle ins unendliche, da die Verbindungsstäbe 9 und 9′ von b und c parallel zueinander sind. Dies stört nicht, sondern vereinfacht im Gegenteile die Betrachtung.

Wir müssen ferner die an den Endpunkten der Stäbe a, b, c angreifenden äußeren Kräfte zu den Resultierenden 𝔄, 𝔅, ℭ zusammenfassen. An den Endpunkten von a greifen zwei senkrecht gerichtete Kräfte an, deren Summe die in Abb. 105[b] angegebene Resultierende 𝔄 liefert. An den Endpunkten von b wirken die Kräfte 𝔓 und 𝔔′, deren geometrische Summe 𝔅 in Abb. 105[d] gebildet ist. Die Richtungslinie von 𝔅 ist in Abb. 105[c] durch den Schnittpunkt von 𝔓 und 𝔔′ zu ziehen. Der Symmetrie wegen hat man hiermit sofort auch die Resultierende ℭ an c.

Nun ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch die Gelenke ab, ac und bc gehen und dessen Ecken auf 𝔄, 𝔅, ℭ liegen. Das Dreieck muß ferner symmetrisch sein und die durch bc geführte Seite muß daher die unendlich ferne Gerade der Ebene sein. Die beiden andern Dreieckseiten sind daher die durch die Gelenke ab und ac zu 𝔅 und ℭ gezogenen Parallelen.

Anstatt dessen kann man aber auch eine andere Überlegung benutzen, die vielleicht anschaulicher ist. Man betrachte etwa den Stab b. Die Spannungen der Stäbe 9 und 9′, die von seinen Endpunkten ausgehen, sind gleich groß und von gleichem Vorzeichen. Die Pfeile sind aber an diesen Endpunkten von entgegengesetzter Richtung, weil bei 9 der obere, bei 9′ der untere Knotenpunkt in Frage kommt. Die von 9 und 9′ auf b übertragenen Kräfte bilden daher ein Kräftepaar. Hiernach müssen auch die sonst noch auf b wirkenden Kräfte, nämlich 𝔅 und der Gelenkdruck in ab ein Kräftepaar von entgegengesetztem Momente bilden, damit Stab b im Gleichgewichte sein kann. Auch hiermit ist bewiesen, daß der Gelenkdruck ab parallel zu 𝔅 geht und gleich groß damit ist.

Nachdem man die Größe und Richtung des Gelenkdruckes ab kennt, findet man durch die in Abb. 105[d] vorgenommene Zerlegung nach den Richtungen von 14 und 10′ sofort auch die Spannungen in diesen Verbindungsstäben von b mit a. Auch die übrigen Stabspannungen in der Grundfigur können, nachdem zwei schon bekannt sind, durch Anreihung von weiteren Kraftecken an Abb. 105[d] sofort ermittelt werden. Da dies ganz einfach ist, wurden die Linien in der Abbildung weggelassen. — Die gedrückten Stäbe sind in der von früher her bekannten Weise kenntlich gemacht.

30. Aufgabe. Das in Abb. 106[a] gezeichnete Traggerüst trägt die Last P von 10000 kg. Man soll die davon hervorgerufenen Stabspannungen ermitteln.

Lösung. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte bei A und B, am einfachsten nach dem Momentensatze. Dann streicht man, falls das Hennebergsche Verfahren angewendet werden soll,

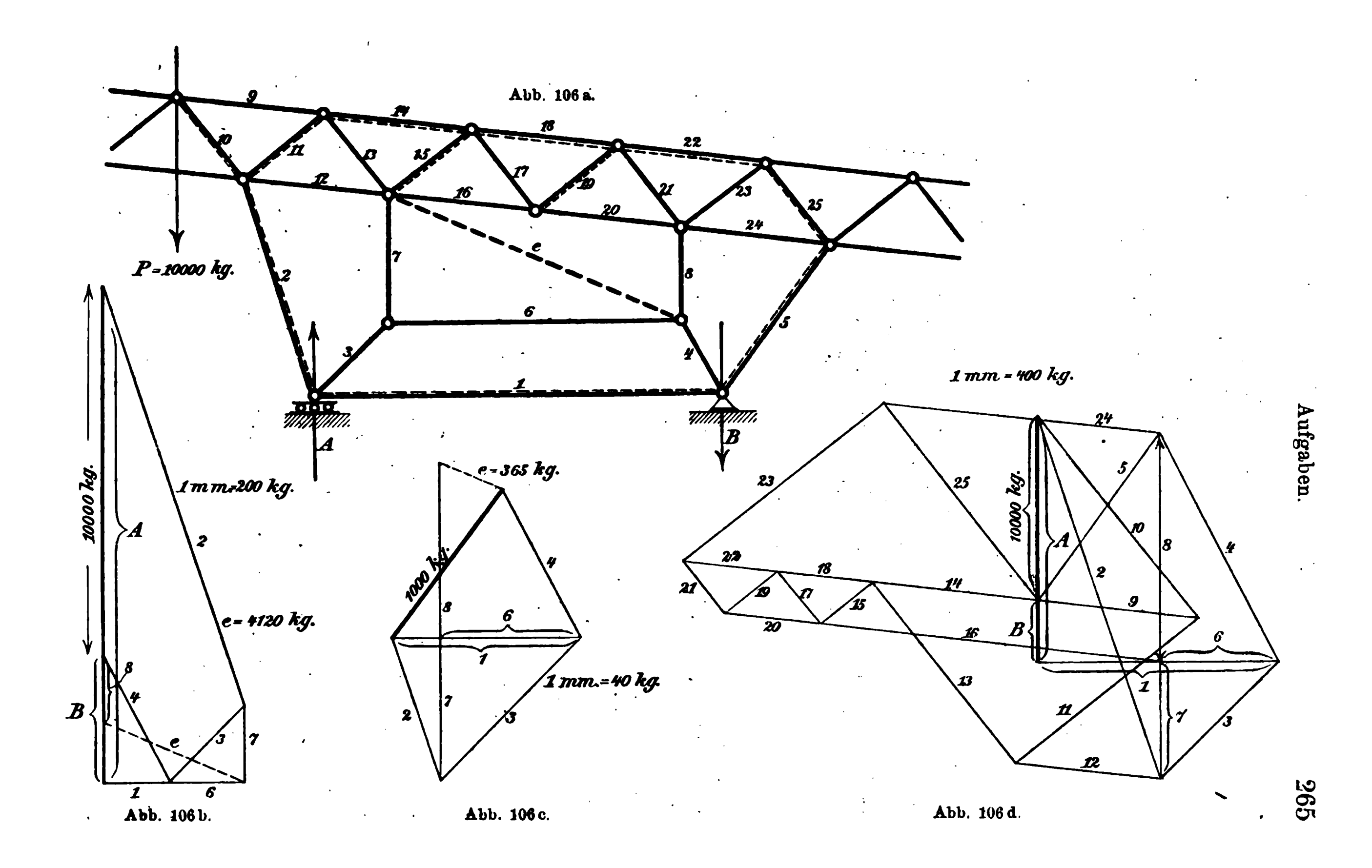


Abb. 106 a.

Abb. 106 b.

Abb. 106 c.

Abb. 106 d.

etwa den Stab 5 weg und setzt dafür den durch eine gestrichelte Linie angegebenen Stab *e* ein. Für das so erhaltene einfache Fachwerk kann der Kräfteplan in Abb. 106[b], von dem Auflagerpunkte bei *B* beginnend, ohne weiteres gezeichnet werden. Man führt die Zeichnung aber nur soweit durch, bis man aus dem Kraftecke 6, 4, 8, *e* die Spannung des Ersatzstabes *e* gefunden hat.

Hierauf wurde eine Zugspannung von 1000 kg im Stabe 5 als Belastung des einfachen Fachwerkes angenommen. Die Auflagerkräfte *A* und *B* sind für diesen Belastungsfall gleich Null. Der Kräfteplan in Abb. 106[c] kann dafür genau wie der vorige gezeichnet werden; man bricht ihn ebenfalls ab, sobald man bis zur Stabspannung *e* gelangt ist.

Aus Abb. 106[b] findet man die Spannung T_e des Stabes *e* zu $+4120$ kg und aus Abb. 106[c] $u_e = +0{,}365$, woraus nach Gl. (36), S. 218 die Spannung X des beseitigten Stabes 5

$$X = -\frac{T_e}{u_e} = -\frac{4120}{0{,}365} = 11\,300 \text{ kg Druck}$$

folgt. — Nachdem die Spannung des Stabes 5 bekannt ist, kann man zur Konstruktion des Kräfteplanes schreiten, der die in dem gegebenen Träger wirklich auftretenden Spannungen vereinigt. Dies ist in Abb. 106[d] geschehen. Man beginnt mit dem Kraftecke für den Auflagerpunkt *B*, indem man zuerst die bekannten Kräfte *B* und 5 aneinander reiht und Parallelen zu den Stabrichtungen 1 und 4 zieht. Dann folgen die Kraftecke *A*, 1, 2, 3 und 3, 6, 7. Bei dem dann folgenden Dreiecke 6, 4, 8 hat man noch eine Probe für die Richtigkeit der vorausgegangenen Bestimmung der Stabspannung 5. Von den drei Kräften sind nämlich 4 und 6 bereits bekannt und die dritte Seite des Dreieckes muß daher von selbst in die Richtung des Stabes 8 fallen. Nachher fehlen nur noch die Stabspannungen in der durch das obere Dreiecksfachwerk gebildeten Scheibe. Man zeichnet zuerst das Kräftedreieck *P*, 9, 10, dann das Viereck 10, 2, 11, 12 u. s. f. Die bereits ermittelten Stabspannungen 2, 7, 8, 5 sind nämlich neben *P* als die an der Scheibe angreifenden Lasten aufzufassen und der reziproke Kräfteplan kann daher leicht in gewöhnlicher Weise bis zum andern Ende hin fortgesetzt werden. Die nach links und rechts hin an der oberen Scheibe noch übergreifenden Stäbe, die keine Nummern erhielten, sind bei der gegebenen Laststellung spannungslos. — Die Stabspannungen 16 und 20, sowie 14, 18 und 22 überdecken sich im Kräfteplane teilweise, worauf beim Abgreifen der Strecken wohl zu achten ist.

Anmerkung. Man hätte die Aufgabe auch mit Hülfe der imaginären Gelenke lösen können. Die obere Scheibe und die Stäbe 3 und 4 hängen nämlich paarweise untereinander durch imaginäre Gelenke zusammen, die durch die Schnittpunkte der Stabrichtungen 2 und 7, ferner 5 und 8, sowie 1 und 6 gebildet werden. Man hätte dann ein Gelenkdruckdreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch diese Gelenkpunkte gehen und dessen Ecken auf den Richtungen der äußeren Kräfte P, A und B liegen. Diese Überlegung gestattet zugleich den Ausnahmefall zu erkennen, der bei der Anordnung des Stabgerüstes vermieden werden muß. Die drei Gelenke dürfen nämlich nicht auf einer Geraden liegen, d. h. die Verbindungslinie der Schnittpunkte von 2 und 7 und von 5 und 8 darf nicht parallel zu den Stabrichtungen 1 und 6 gehen. — In dieser Hinsicht gleicht übrigens, wie man leicht bemerkt, der hier besprochene Fall vollständig dem schon in Aufgabe 27 untersuchten.

Fünfter Abschnitt.*)

Das Fachwerk im Raume.

§ 40. Die Zahl der notwendigen Stäbe.

Im vorigen Abschnitte handelte es sich nur um den Widerstand, den ein ebener Stabverband gegen Formänderungen innerhalb seiner eigenen Ebene zu leisten vermag und um die Spannungen, die in den Stäben durch Lasten hervorgerufen werden, die selbst alle in der Konstruktionsebene enthalten sind. Gegen Formänderungen, bei denen die Knotenpunkte aus der Konstruktionsebene heraustreten, sind dagegen die ebenen Fachwerke an sich ganz widerstandslos oder sie vermögen wenigstens einen gewissen, geringen Widerstand gegen solche Formänderungen nur insoweit zu leisten, als der Biegungswiderstand der Stäbe und die Steifigkeit der Knotenpunkte es gestatten. Daher sind auch die Lehren des vorigen Abschnittes für die Beurteilung der Steifigkeit eines Stabverbandes nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung anwendbar, daß auf irgend eine Art ausreichende Fürsorge dafür getroffen ist, daß die Knotenpunkte nicht aus der Konstruktionsebene heraus treten können.

Hieraus erhellt, daß die Theorie des Fachwerkes erst dadurch zu einer allgemeineren Fassung gelangen kann, die allen bei ihrer praktischen Anwendung auftretenden Bedingungen

*) In diesen Abschnitt habe ich einige Abbildungen aus meiner im Jahre 1892 erschienenen Schrift „Das Fachwerk im Raume“ herüber genommen.

gerecht wird, daß man die Fachwerke als Gebilde des dreifach ausgedehnten Raumes auffaßt. Dies hindert zwar nicht, daß man, wie es auch hier geschehen ist, zuerst die einfacheren Probleme des ebenen Fachwerkes erledigt und sich erst nachher in die verwickelteren Bedingungen vertieft, die sich im dreifach ausgedehnten Raume oder kürzer im „Raume" geltend machen. Eine solche Ergänzung ist aber durchaus nötig, um Irrtümer selbst in manchen Fällen zu vermeiden, die auf den ersten Blick ausschließlich zur Lehre vom ebenen Fachwerke zu gehören scheinen.

Wenn nämlich ein ebener Träger nur mit Lasten behaftet ist, die in seiner eigenen Ebene liegen, wie es bei den Anwendungen sehr oft genau genug zutrifft, kommt zwar in erster Linie nur der Widerstand gegen Formänderungen in dieser Ebene in Betracht. Falls aber hierbei eine Anzahl aufeinander folgender Stäbe auf Druck beansprucht ist, wie z. B. beim Obergurt eines gewöhnlichen, einzeln aufgestellten Fachwerkbalkens, darf man bei der Berechnung dieser Stäbe auf Knickfestigkeit nicht dabei stehen bleiben, nur die Möglichkeit des Ausknickens in der Konstruktionsebene zu berücksichtigen. Bei einem Ausknicken in dieser Ebene ist nämlich als Knicklänge nur die Länge eines Stabes zwischen seinen beiden Knotenpunkten in Ansatz zu bringen, da diese Knotenpunkte durch den Stabverband gegen Bewegungen innerhalb der Ebene abgestützt sind. Bewegungen senkrecht zu seiner Ebene vermag dagegen der Stabverband nicht zu verhindern und als Knicklänge tritt daher für einen solchen Obergurt — freilich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Knicklast für die einzelnen Abschnitte — die ganze Länge auf. Dieser Umstand ist schon manchmal von einem Konstrukteur, der seine Erwägungen ausschließlich auf das Verhalten des Trägers innerhalb der Trägerebene zuschnitt, unberücksichtigt geblieben, was sich nachher bitter rächte.

Gewöhnlich verhindert man freilich Bewegungen senkrecht zur Konstruktionsebene durch Anordnung eines Querverbandes zwischen zwei oder mehr in parallelen Ebenen nebeneinander

stehenden Bindern. Diese Querverbände haben dann zugleich die bei Brücken z. B. durch den Winddruck hervorgerufenen, senkrecht zu den Binderebenen stehenden Lasten aufzunehmen, weshalb man sie auch als Windverbände bezeichnet. Sowie aber die Windverbände sorgfältiger ausgebildet werden, so daß auch gegen Formänderungen, die ein Heraustreten der Knotenpunkte aus den Konstruktionsebenen mit sich bringen, der Biegungswiderstand der Stäbe nicht in Anspruch genommen werden soll, sondern nur ihre Zug- und Druckfestigkeit, gelangt man zu räumlichen Fachwerken, in denen die ebenen Binder nur als Konstruktionselemente, freilich als solche, die in sich schon zu einer gewissen Einheit zusammengefaßt sind, auftreten.

Wir haben hier vor allem wieder die Frage zu beantworten, wieviel Stäbe erforderlich sind, um n Knotenpunkte, die jedenfalls nicht alle in derselben Ebene liegen dürfen, zu einer räumlichen Figur von unveränderlicher Gestalt zu verbinden. Dabei sind freilich wieder verschiedene Bildungsgesetze möglich, entsprechend jenen, die wir schon beim ebenen Fachwerke kennen lernten. Wir gehen aber wie dort zunächst von der einfachsten Art des Aufbaues oder wenigstens von jener aus, die sich bei der ersten Betrachtung als die einfachste darbietet.

Zunächst verbinden wir wieder drei der Knotenpunkte durch drei Stäbe zu einem Dreiecke, denn das Dreieck ist bei unveränderlichen Seitenlängen auch im dreifach ausgedehnten Raume keiner Gestaltänderung fähig. Ein vierter Knotenpunkt, der mit den vorigen nicht in derselben Ebene liegen darf, kann hierauf durch drei Stäbe mit diesen steif verbunden werden. Hierbei entsteht ein Tetraeder, dessen Gestalt ebenfalls unveränderlich ist, solange sich die Stablängen nicht ändern. Der Ausnahmefall kann hier nur eintreten, wenn die vier Ecken in eine Ebene fallen, das Tetraeder selbst also als solches verschwindet und einer in der Ebene geometrisch überbestimmten, im Raume aber unendlich wenig verschieblichen, ebenen Figur Platz macht. Diesen Fall hatten wir aber schon ausgeschlossen.

Auch jeder folgende Knotenpunkt kann an die vorigen durch drei Stäbe unverschieblich angeschlossen werden, wenn nur darauf geachtet wird, daß die drei Anschlußstäbe niemals in einer Ebene liegen dürfen. Dies folgt sowohl aus der geometrischen Betrachtung, wie aus der statischen Bedingung, daß die Spannungen in den Anschlußstäben ausreichen müssen, um gegen jede Last, die an dem angeschlossenen Knotenpunkte angreifen mag, das Gleichgewicht zu sichern.

Für jeden anzuschließenden Knotenpunkt müssen wir hiernach drei Stäbe aufwenden und nur im Anfange genügten zur Verbindung der drei Ausgangsknotenpunkte drei Stäbe. Hiernach ist die Zahl m der notwendigen Stäbe

$$m = 3n - 6. \tag{54}$$

Natürlich können auch hier wieder nachträglich überzählige Stäbe zwischen die bereits steif miteinander verbundenen Knotenpunkte eingeschoben werden, wodurch das räumliche Fachwerk in ein geometrisch überbestimmtes und zugleich statisch unbestimmtes übergeht. Die hierüber bereits beim ebenen Fachwerke durchgeführten Betrachtungen bleiben auch hier gültig und brauchen nicht nochmals wiederholt zu werden. In diesem Abschnitte soll übrigens nur von den geometrisch und statisch bestimmten räumlichen Fachwerken die Rede sein.

Ferner kann man auch beim räumlichen Fachwerke von den nach dem soeben besprochenen Plane aufgebauten zu Fachwerken von abweichender Gliederung durch das schon früher angewendete Mittel der Stabvertauschung übergehen. Beseitigt man nämlich einen Stab, so erhält man einen zwangläufigen Mechanismus und der damit gegebene Freiheitsgrad kann wieder beseitigt, die Steifigkeit also wieder hergestellt werden, indem man irgend zwei Knotenpunkte, die bei einer Bewegung des Mechanismus ihren Abstand ändern müßten, durch einen neuen Stab miteinander verbindet.

Die Zahl der durchschnittlich von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe folgt aus Gl. (54) zu

$$\frac{2m}{n} \quad \text{oder} \quad 6 - \frac{12}{n};$$

sie bleibt also stets kleiner als sechs. Bei den gewöhnlich vorkommenden Fachwerkformen, die eine große Zahl von Knotenpunkten enthalten, gehen von den meisten Knotenpunkten je sechs Stäbe aus, während bei einigen Knotenpunkten die Zahl geringer ist. Jedenfalls müssen bei einem statisch bestimmten räumlichen Fachwerke Knotenpunkte vorkommen, von denen höchstens fünf Stäbe ausgehen. Andererseits dürfen von keinem Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen und außerdem dürfen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe niemals alle in derselben Ebene enthalten sein, weil sonst ein Ausnahmefall (mit unendlich kleiner Verschieblichkeit des Knotenpunktes senkrecht zur Ebene der Stäbe und unendlich großen Stabspannungen beim Angriffe einer senkrecht zu dieser Ebene stehenden Last) vorläge.

Wie beim ebenen Fachwerke die Scheibe, kann man hier den starren Körper als Fachwerkelement mit einführen. Man kann sich darunter selbst wieder ein in sich steif verbundenes räumliches Fachwerk oder auch einen zusammenhängenden Körper vorstellen. Namentlich die ganze feste Erde kann als Fachwerkbestandteil aufgefaßt werden und man gewinnt damit auf einfachste Weise den Übergang von den nicht festgehaltenen, sondern nur in sich unverschieblichen Fachwerken zu zahlreichen Fachwerkträgern, nämlich zu allen, bei denen keine Walzenlager oder Gleitlager vorkommen.

Hat ein räumliches Fachwerk einen starren Körper und n freie (d. h. nicht zu jenem gehörige) Knotenpunkte, so beträgt die Zahl der notwendigen Stäbe

$$m = 3n, \tag{55}$$

denn jeder freie Knotenpunkt wird durch je drei Stäbe unverschieblich angeschlossen. Dabei ist es aber nicht nötig, daß auch wirklich von jedem Knotenpunkte drei Stäbe unmittelbar zum starren Körper geführt sind. Man kann, schon nachdem ein Knotenpunkt angeschlossen ist, einen der Verbindungsstäbe zum zweiten Knotenpunkte auch von jenem aus führen und später braucht man überhaupt keine Stäbe mehr unmittelbar

vom starren Körper ausgehen zu lassen. Außerdem kann man nachträglich auch noch Stabvertauschungen vornehmen. Es kommt also im wesentlichen nur auf die Zahl der Verbindungsstäbe an, obschon natürlich Mißgriffe in der Verteilung der Stäbe, wie sie schon beim ebenen Fachwerke besprochen wurden, oder Ausnahmefälle, die nicht durch die Gliederung im allgemeinen, sondern dadurch bedingt sind, daß ein Stab im Maximum oder Minimum seiner Länge steht, hierbei vermieden sein müssen.

Enthält das Fachwerk mehr als einen, also etwa r starre Körper, so kann man sich zunächst zwei derselben verbunden denken. Hierzu braucht man sechs Stäbe. Dies geht einerseits daraus hervor, daß ein starrer Körper gegen den andern sechs Freiheitsgrade hat, so daß sechs Fesseln nötig sind, von denen jede einen Freiheitsgrad aufhebt, und andererseits auch daraus, daß jede an dem einen Körper auftretende Last nach sechs Richtungslinien eindeutig zerlegt werden kann. Natürlich müssen dabei die schon im dritten Abschnitte besprochenen Ausnahmefälle vermieden werden: es darf sich also keine Gerade ziehen lassen, die alle sechs Stabrichtungen schneidet und namentlich dürfen nicht mehr als drei Stabrichtungen durch denselben Punkt gehen und nicht mehr als drei dürfen in derselben Ebene enthalten sein.

Auch jeder folgende starre Körper kann durch sechs Stäbe an die vorigen und jeder freie Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen werden. Im ganzen beträgt daher die Stabzahl in diesem allgemeinen Falle

$$m = 3n + 6(r - 1) = 3n - 6 + 6r, \tag{56}$$

womit auch Gleichung (54) für $r = 0$ mit umfaßt wird. Auch hier ist es natürlich nicht nötig, daß die Stäbe genau so verteilt sind, wie wir jetzt annehmen; man kann vielmehr nachträglich noch Stabvertauschungen vornehmen. Jedenfalls dürfen aber von keinem starren Körper weniger als sechs und von keinem freien Knotenpunkte weniger als drei Stäbe ausgehen.

In Verbindung hiermit soll sofort auch die Frage der Auflagerbedingungen erledigt werden. Nötigt man einen Knotenpunkt, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben, die man sich für eine unendlich kleine Verschiebung auch durch ihre Berührungsebene ersetzt denken kann, so schreibt man ihm eine Auflagerbedingung vor. Von den sechs Freiheitsgraden des starren Körpers wird nämlich dadurch, wenn sonst keine Bewegungsbeschränkung vorliegt, nur einer vernichtet. Wird der Knotenpunkt genötigt, auf einer Linie zu bleiben, so entspricht dies zwei Auflagerbedingungen und der Körper hat, wenn kein anderes Hindernis vorliegt, noch vier Freiheitsgrade. Wählt man nämlich den Auflagerknotenpunkt als Anfangspunkt für die Beschreibung der Bewegung, so müssen von den sechs Komponenten der Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{u}$, durch die der Geschwindigkeitszustand gekennzeichnet wird, zwei Komponenten von $\mathfrak{v}_0$ verschwinden, da $\mathfrak{v}_0$ nur in die Richtung der Auflagerbahn fallen kann. — Einem vollständig festgehaltenen Knotenpunkte sind drei Auflagerbedingungen vorgeschrieben.

Die Zahl der Auflagerbedingungen, die man einem starren Körper im ganzen vorschreiben muß, um ihn festzuhalten, beträgt sechs, nämlich soviel als die Zahl der Freiheitsgrade, die aufzuheben sind. Die sechs Auflagerbedingungen müssen sich auf mindestens drei Knotenpunkte verteilen. Wollte man zwei Knotenpunkte vollständig festhalten, so würde dies nur fünf voneinander unabhängigen Auflagerbedingungen entsprechen. Denkt man sich nämlich einen Knotenpunkt festgehalten und den andern längs irgend einer Linie beweglich, so kann sich dieser schon nicht mehr bewegen, da er wegen des Zusammenhanges im starren Körper seinen Abstand von dem festgehaltenen Punkte nicht zu ändern vermag.

Man kann also etwa einem Knotenpunkte eine, einem zweiten zwei und einem dritten drei Auflagerbedingungen vorschreiben. Oder man kann auch die sechs Auflagerbedingungen auf sechs Knotenpunkte verteilen, von denen dann jeder auf einer Fläche gelagert ist, längs deren er sich, wenn sonst kein Hindernis vorläge, frei zu verschieben vermöchte. Außerdem

vermag man auch, wie schon bei den ebenen Trägern, eine größere Zahl von Auflagerbedingungen einzuführen, ohne den Träger dadurch statisch unbestimmt zu machen, falls man dafür eine entsprechende Zahl von Stäben aus dem Verbande herausnimmt.

Bezeichnet man die Zahl der Auflagerbedingungen mit p, so erhält man an Stelle von Gl. (54)

$$m = 3n - p, \tag{57}$$

denn um ebensoviel als p größer wird als 6, ist m zu vermindern, damit der Träger nicht statisch unbestimmt wird.

Die Auflagerbedingungen vermag man übrigens stets auch durch Stäbe zu erfüllen, die hinreichend lang sind und von der festen Erde nach den Auflagerknotenpunkten geführt sind. Ist ein Knotenpunkt durch einen Stab mit der festen Erde verbunden, so wird er dadurch genötigt, auf einer Kugelfläche zu bleiben, deren Halbmesser gleich der Länge des Stabes ist. Zwei Stäbe führen den Knotenpunkt auf einer Linie; er muß nämlich auf dem Kreise bleiben, in dem sich die den beiden Stäben zugehörigen Kugelflächen schneiden. Drei Stäbe halten den Knotenpunkt vollständig fest. Jeder Stab entspricht daher einer Auflagerbedingung.

Infolgedessen vermag man auch die nähere Untersuchung der Auflagerbedingungen ganz zu umgehen, indem man sie sich alle durch Stäbe ersetzt denkt, abgesehen von den festgehaltenen Knotenpunkten, die man unmittelbar als Punkte der festen Erde betrachtet. Man kann dann jeden räumlichen Fachwerkträger auch als ein Fachwerk auffassen, das die Erde als starren Körper enthält und in dem nur Verbindungsstäbe, sonst aber keine Bewegungsfesseln, die als Auflagerbedingungen zu bezeichnen wären, vorkommen.

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man bei der Theorie des ebenen Fachwerkes jedem Knotenpunkte im grunde genommen eine Auflagerbedingung vorschreibt, von der dort freilich gar nicht ausdrücklich die Rede ist. Man setzt nämlich voraus, daß die Knotenpunkte genötigt

seien, in der Konstruktionsebene zu bleiben und dies entspricht in der Tat, sobald wir den Stabverband als ein räumliches System auffassen, einer Auflagerbedingung. Diese n Auflagerbedingungen bewirken einerseits, daß die Figur auch im Raume ihre Gestalt nicht ändern kann und sie führen andererseits zugleich eine Beschränkung in der Bewegungsfreiheit des unveränderlichen Stabgebildes herbei. Es kann sich nachher nur noch in der gemeinsamen Auflagerebene bewegen, hat also nur noch drei Freiheitsgrade. Berücksichtigt man dies, so gehen die Formeln für die notwendige Stabzahl beim räumlichen Fachwerke ohne weiteres in die beim ebenen Fachwerke über.

§ 41. Das Flechtwerk.

Die Formen, in denen das räumliche Fachwerk, namentlich bei einer größeren Zahl von Knotenpunkten, aufzutreten vermag, sind überaus mannichfaltig. Unter ihnen zeichnet sich aber eine bestimmte Art des Aufbaues ihrer einfachen Gesetzmäßigkeit wegen besonders aus. Auch für die Anwendungen sind Fachwerke von der Gliederung, die ich hier meine, von besonderer Wichtigkeit und es rechtfertigt sich daher, eine besondere Bezeichnung für sie einzuführen: ich nenne sie Flechtwerke.

Ein Flechtwerk ist ein räumliches Fachwerk, dessen Knotenpunkte und Stäbe sämtlich auf einem Mantel enthalten sind, der einen inneren Raum umschließt.

Um zu erkennen, daß räumliche Fachwerke von dieser Art möglich sind, geht man von dem Satze aus, den Euler über die Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen in einem Polyeder aufgestellt hat. Der Satz gilt übrigens nur für Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume und kann für diese durch eine einfache Überlegung bewiesen werden.

Beginnt man nämlich beim Aufbaue des Polyeders zunächst mit einer Seitenfläche, so hat man damit schon eine Seitenfläche, eine Anzahl Kanten und ebensoviel Ecken des

Polyeders. Setzt man eine neue Seitenfläche daran, so kommt eine neue Kante mehr dazu, als neue Ecken, weil diese zwischen jenen liegen. Dies gilt auch beim Ansetzen weiterer Seitenflächen und wir können sagen, daß die Zahl der neu hinzukommenden Kanten ebenso groß ist, als die Zahl der neu hinzukommenden Ecken, vermehrt um die Zahl der hinzukommenden Seitenflächen. Nur zuletzt, wenn der Mantel des Polyeders durch Einfügen der letzten Seitenfläche geschlossen wird, tritt weder eine neue Ecke, noch eine neue Kante, wohl aber eine neue Seitenfläche auf. Die Zahl der Ecken und der Seitenflächen bleibt also sonst immer gleich der Zahl der Kanten, mit Ausnahme des Anfanges und des Endes, wo jedesmal eine Seitenfläche mehr auftritt, als zur Herstellung des Ausgleiches zwischen jenen Zahlen erforderlich wäre. Wird also die Zahl der Kanten mit m, die Zahl der Ecken mit n, die Zahl der Seitenflächen mit f bezeichnet, so hat man

$$m = n + f - 2 \tag{58}$$

und diese Gleichung spricht den Eulerschen Satz aus.

Wir wollen den Satz auf den besonderen Fall anwenden, daß alle Seitenflächen Dreiecke sind. In diesem Falle besteht noch ein leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen m und f. Das Dreifache von f gibt nämlich die Zahl der Kanten an, die man erhält, wenn man in jedem Dreiecke die Kanten von neuem zählt. Hierbei wird aber jede Kante, die immer eine Grenze zwischen zwei Dreiecken bildet, doppelt gezählt und die Anzahl der Polyederkanten beträgt daher gerade die Hälfte von $3f$.

Mit $m = \frac{3f}{2}$ oder $f = \frac{2m}{3}$ geht aber Gl. (58) über in

$$\frac{m}{3} = n - 2 \quad \text{oder} \quad m = 3n - 6$$

und damit ist, wie ein Vergleich mit Gl. (54) lehrt, nachgewiesen, daß die Zahl der Kanten in einem von lauter Dreiecken umschlossenen Polyeder mit einfach zusammenhängendem Innenraume gerade ausreicht, um bei unveränderlicher Länge die Ecken unverschieblich miteinander zu verbinden. Hiermit

ist auch die Möglichkeit der Flechtwerke erkannt und zugleich nachgewiesen, daß sie nicht nur stabile, sondern zugleich auch statisch bestimmte Fachwerke bilden. Man muß sich nur vorbehalten, daß Ausnahmefälle, die hier natürlich ebenso gut, wie beim ebenen Fachwerke vorkommen können, vermieden werden. Dann kann man sagen:

Jede aus Dreiecken zusammengesetzte Mantelfläche, die einen einfach zusammenhängenden Raum vollständig umschließt, liefert im allgemeinen, wenn man die Kanten als Stäbe und die Ecken als Knotenpunkte auffaßt, ein stabiles und statisch bestimmtes Fachwerk, das man ein Flechtwerk nennt.

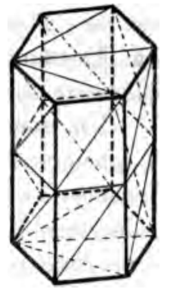
Hierbei ist nicht nötig, daß alle Dreiecke des Mantels in verschiedenen Ebenen liegen; nur dürfen nicht alle Dreiecke, die von einer Ecke ausgehen, in derselben Ebene liegen, weil dies sonst auch von den Stäben an dieser Ecke zuträfe und weil der Knotenpunkt gegen Verschiebungen senkrecht zu jener Ebene alsdann nicht genügend abgestützt wäre. — Ob im übrigen ein Ausnahmefall vorliegt oder nicht, entscheidet man am einfachsten dadurch, daß man die Stabspannungen berechnet. Bleiben diese für beliebige endliche Lasten stets endlich, so ist der Ausnahmefall vermieden.

Flechtwerkmäntel vermag man selbst wieder von sehr verschiedenen Gestalten anzugeben und man erkennt daraus leicht den Formenreichtum im Gebiete des räumlichen Fachwerkes. Von den regelmäßigen Polyedern sind z. B. das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder ohne weiteres Flechtwerke; beim Würfel und beim Dodekaeder muß man jede Seitenfläche durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke zerlegen, um Flechtwerke zu erhalten.

Zieht man auf einer Kugel eine Anzahl von Meridianen und Parallelkreisen, wie bei der Gradeinteilung auf einem Erdglobus, betrachtet die Schnittpunkte als Knotenpunkte und die zu den Kreisbögen zwischen zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten gehörigen Sehnen als Stäbe, so braucht man nur noch in jedes vierseitige Fach einen Diagonalstab einzu-

schieben, um zu einem Flechtwerke zu gelangen. Bei einem Ellipsoide oder einer geschlossenen Fläche von ähnlicher Art führt dasselbe Verfahren, das leicht auch noch ein wenig abgeändert werden kann, falls man dabei nur zu einem aus Dreiecken zusammengesetzten Mantel gelangt, ebenfalls zum Ziele.

Übrigens macht es auch nicht viel aus, wenn man bei dem in der beschriebenen Weise erhaltenen Kugelflechtwerke die Stäbe nicht geradlinig ausführt, sondern sie nach den Meridian- und Parallelkreisen, denen sie folgen, krümmt. Denn auch ein Stab, der zwischen seinen beiden Knotenpunkten ein wenig gekrümmt ist, vermag Entfernungsänderungen seiner Endpunkte zu verhüten, ohne dabei wesentlich auf Biegung beansprucht zu werden, solange nur die kreisförmige Stabachse sich von der zugehörigen Sehne nicht viel entfernt. Die Zahl der Knotenpunkte oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Zahl der Meridiane und Parallelkreise, darf also in diesem Falle nicht zu klein gewählt sein. Andererseits soll freilich die Zahl der Knotenpunkte auch nicht zu groß sein, weil sich sonst die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe zu wenig von der Tangentialebene an die Kugel abheben. Liegen die Stäbe nämlich nahezu in einer Ebene, so nähern wir uns dem Ausnahmefalle und wir erhalten für Einzellasten an einem solchen Knotenpunkte, die eine Komponente rechtwinklig zur Tangentialebene haben, große Stabspannungen.


Abb. 107.

Ein anderer Fall wird durch das in Abb. 107 an einem einfachen Beispiele vorgeführte Zylinder- oder Tonnenflechtwerk gebildet. Wie vorher die Kugel, kann man sich auch einen Zylindermantel durch eine Anzahl von Parallelkreisen und (an Stelle der Meridiane) durch Zylindererzeugende in vierseitige Fächer zerlegt denken, die durch Einschalten von Diagonalen in Dreiecke geteilt werden können. Um einen geschlossenen Flechtwerkmantel zu erhalten, muß man aber dann auch noch die beiden Basispolygone durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen.

Da die Bögen, wenn man ursprünglich von einem Zylinder ausging, nachträglich durch die zugehörigen Sehnen ersetzt werden müssen, wenn man nur geradlinige Stäbe anwenden will, erscheint der Flechtwerkmantel schließlich in der Gestalt eines Prismas. Bemerkenswert ist dabei, daß man sich das Flechtwerk auch durch Aneinanderfügen von lauter ebenen Fachwerken entstanden denken kann. Die auf jeder Seitenfläche des Prismas liegenden Stäbe bilden für sich genommen ein ebenes Fachwerk mit parallelen Gurten. Dabei haben je zwei aufeinander folgende ebene Fachwerke die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam. Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um die Berechnung der Stabspannungen im Tonnenflechtwerke bei gegebenen Lasten auf die Berechnung der Stabspannungen in den ebenen Fachwerken zurückzuführen.

Schließlich kann, um noch einen andern einfachen und wichtigen Fall hervorzuheben, das Prisma in Abb. 107 auch durch eine abgestumpfte Pyramide ersetzt werden, ohne daß sich sonst etwas änderte. Außerdem steht auch nichts im Wege, diese Pyramide bis zur Spitze hin durchzuführen. Das eine Basispolygon fällt dann fort und wird durch die Spitze ersetzt. Man gelangt so zu den bei neueren Kirchturmbauten oft zu grunde gelegten Pyramidenflechtwerken, die sich von den älteren Konstruktionen, wie alle Flechtwerke, durch den Umstand unterscheiden, daß der von dem Mantel umschlossene Innenraum von keinen Stäben durchsetzt wird.

Um von einem Flechtwerke zu einem Flechtwerkträger zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen. Zunächst kann man sechs voneinander unabhängige Auflagerbedingungen vorschreiben, durch die das Flechtwerk gegen die Erde festgehalten wird, wodurch es in einen Träger übergeht der beliebige Lasten, die nun nicht mehr in derselben Ebene zu liegen brauchen, aufnehmen kann. Am einfachsten werden diese Auflagerbedingungen gewöhnlich durch Stäbe, die von der Erde nach dem Flechtwerke geführt sind, ersetzt. Von früher her ist schon bekannt, welche Ausnahmefälle bei der Anordnung der sechs Verbindungsstäbe vermieden werden

müssen, um eine steife Verbindung herzustellen. Ein Beispiel für einen in dieser Weise gewonnenen Flechtwerkträger wird in § 45 behandelt werden. Zieht man mehr als sechs Verbindungsstäbe, so wird der Träger statisch unbestimmt; man kann aber dann, ebenso wie es schon in der Lehre vom ebenen Fachwerke besprochen wurde, durch Fortlassen einer entsprechenden Anzahl von Stäben des Flechtwerkes die statische Bestimmtheit auch wieder herstellen.

Ein anderer Weg zur Gewinnung von Flechtwerkträgern wird durch die folgende Überlegung gewiesen. Man denke sich ein Flechtwerk durch einen beliebigen Schnitt in zwei Teile getrennt. Jeder Teil für sich ist dann nicht mehr steif, wenigstens dann nicht, wenn der Schnitt, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, mehr als sechs Stäbe trifft. Nimmt man aber den einen Teil und verbindet ihn durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe mit der festen Erde, so erhält man auf jeden Fall einen unverschieblichen Stabverband. Denn schon der Zusammenhang mit dem für sich nicht steifen Reste, der bei der Führung des Schnittes wegfiel, reichte aus, um Gestaltänderungen auszuschließen. Um so mehr muß also der Zusammenhang mit einem starren Körper denselben Erfolg herbeiführen.

Zugleich macht uns diese Betrachtung freilich auch darauf aufmerksam, daß der Flechtwerkträger, den man auf solche Art erhält, geometrisch überbestimmt und darum zugleich auch statisch unbestimmt ist. Wenn man darin einen Mangel erblickt — und ein Nachteil ist die statische Unbestimmtheit zum mindesten insofern, als die Berechnung der Stabspannungen dadurch erheblich erschwert und das Auftreten von Spannungen, die unabhängig von den Lasten (infolge von Ausführungsfehlern oder infolge von Temperaturänderungen einzelner Teile) zustande kommen, ermöglicht wird —, so kann man ihm nachträglich wieder dadurch abhelfen, daß man noch eine entsprechende Anzahl von Stäben aus dem Flechtwerkverbande entfernt.

§ 42. Die Schwedlersche Kuppel.

Das älteste und bis auf den heutigen Tag wichtigste Beispiel für die praktische Ausführung eines folgerichtig aufgebauten Flechtwerkträgers bildet die von Schwedler herrührende Kuppelkonstruktion. Man gelangt zu ihr, indem man von einem Kugelflechtwerke eine Haube abschneidet und diese mit der Erde durch die vom Schnitte getroffenen Stäbe verbindet. Entfernt man nachträglich noch die Spitze mit den von ihr ausgehenden Stäben, so daß die eigentliche Tragkonstruktion in einem „Nabelringe" endet, auf den dann gewöhnlich noch ein sog. Laternenaufsatz kommt, der als bloße Sekundärkonstruktion aufzufassen ist, die mit dem Haupttragnetze nichts zu tun hat, so wird der Flechtwerkträger statisch bestimmt. Auf die besondere Gestalt des Meridians kommt es übrigens hierbei nicht an: ebenso gut als nach der Kugel, kann man den Flechtwerkmantel auch nach irgend einer andern Rotationsfläche gestalten. Der Meridian kann selbst geradlinig sein und das alsdann entstehende Kegeldach ist nur als ein besonderer Fall der Schwedlerschen Kuppel aufzufassen.

Abb. 108 zeigt eine Schwedlersche Kuppel mit offenem Nabelringe in Aufriß und Grundriß. Daß sie die zur Herstellung eines steifen Verbandes erforderliche Zahl von Stäben umfaßt, kann durch Nachzählen leicht festgestellt werden. Man hat nämlich ebensoviel Ringstäbe, ferner ebensoviel Sparrenstäbe (so sollen die längs der Meridiane verlaufenden genannt werden) und auch ebensoviel Diagonalstäbe, als freie Knotenpunkte vorkommen, also die nach Gl. (55) erforderliche Zahl. Wird außerdem noch ein Auflagerring ausgeführt, der die Auflagerpunkte miteinander verbindet, wie es gewöhnlich geschieht, so wird dadurch an der statischen Bestimmtheit der Kuppel nichts geändert, denn die Stäbe des Auflagerringes dienen nur zur Verbindung von Punkten der festen Erde, helfen also die von vornherein vorausgesetzte Starrheit des Widerlagers herstellen, die ohne sie vielleicht nicht genügend gesichert wäre.

Daß kein Ausnahmefall vorliegt, daß also die Knotenpunkte durch die Stäbe auch wirklich steif miteinander und mit der Erde verbunden sind, wird sich daraus ergeben, daß jedem beliebigen Lastensysteme durch endliche Werte der Stabspannungen entsprochen werden kann.

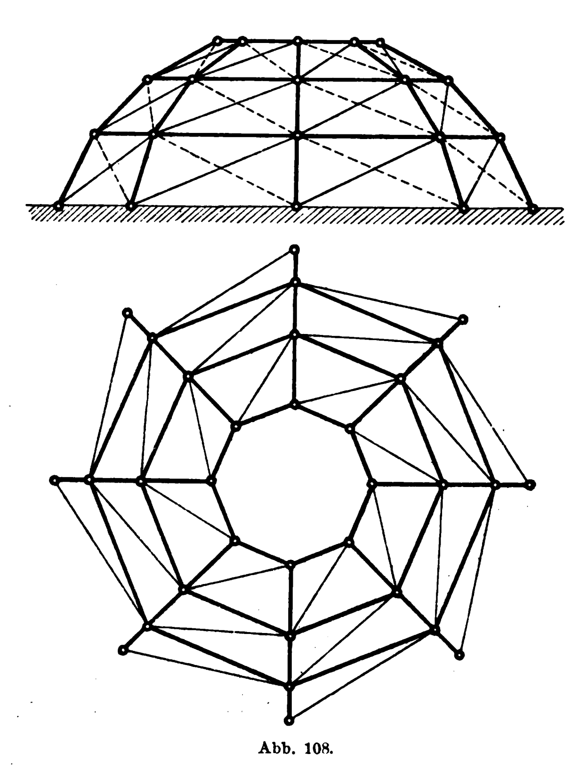


Abb. 108.

Schwedler selbst hat übrigens die richtige Lösung des Spannungsproblemes für die von ihm ausgeführten Kuppeln nur für den Fall der symmetrischen Belastung, wie sie durch das Eigengewicht oder durch eine gleichmäßig verteilte Schneelast gebildet wird, angegeben und sich im übrigen mit einer ungefähren Abschätzung der Spannungen für eine andere Lastverteilung geholfen. — Bei symmetrischer Belastung der Kuppel genügt es, die auf einer Kuppelseite liegenden Stab-

spannungen zu kennen, da die auf allen andern Seiten ebenso groß sind. Ferner kann man Gleichgewicht an jedem Knotenpunkte herstellen, ohne die Spannungen der Diagonalstäbe dabei in Anspruch zu nehmen. Da in einem statisch bestimmten Fachwerke nur ein System von Stabspannungen möglich ist, das den Gleichgewichtsbedingungen genügt, folgt daraus, daß die Diagonalstäbe bei symmetrischer Belastung spannungslos sind.

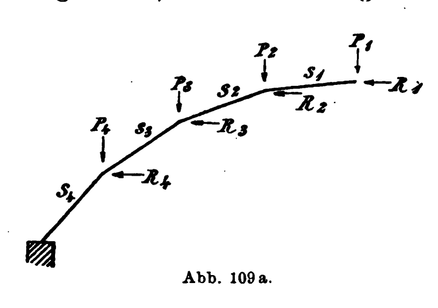


Abb. 109a.

In Abb. 109[a] ist ein einzelner, aus vier Sparrenstäben mit den dazwischen liegenden Knotenpunkten bestehender Meridian einer Schwedlerschen Kuppel herausgezeichnet. Die Lasten P_1 P_2 u. s. f. an den Knotenpunkten können und werden auch im allgemeinen voneinander verschieden sein; zur symmetrischen Belastung gehört nur, daß sie sich an allen andern Meridianen in der gleichen Weise wiederholen. An jedem Knotenpunkte greifen zwei Ringstäbe an, die gleiche Spannungen von gleichem Vorzeichen haben und die man sich durch eine in der Meridianebene liegende Resultierende ersetzt denken kann. Die Resultierenden müssen zugleich in den Ringebenen liegen, also horizontal gerichtet sein. Sie wurden in der Abbildung mit R_1 R_2 u. s. f. bezeichnet und die Pfeile sind so eingetragen, wie sie bei Druckspannungen in den Ringstäben ausfallen.

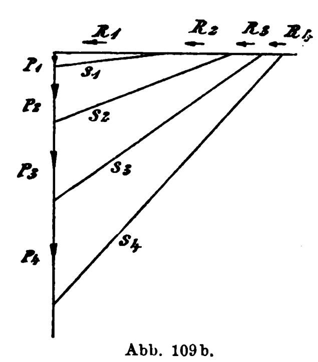


Abb. 109b.

Zur Ermittelung der Resultierenden R und der Spannungen S_1 S_2 u. s. f. in den Sparrenstäben dient der Kräfteplan in Abb. 109[b]. Man beginnt ihn mit dem Kräftedreiecke $P_1 R_1 S_1$ für den Knotenpunkt des Nabelringes, reiht daran das Kräfteviereck $S_1 P_2 R_2 S_2$

für den Knotenpunkt des unteren Ringes und fährt in dieser Weise fort. Die Sparrenstäbe sind sämtlich gedrückt und ihre Spannungen wachsen von oben nach unten. Auch die Resultierenden R entsprechen bei dem gewählten Beispiele überall Druckspannungen in den Ringstäben, die aber nach unten hin abnehmen. Es kann aber auch vorkommen, daß die Stabspannungen in den unteren Ringen Null werden oder in Zugspannungen übergehen, wenn die Gestalt des Meridians etwas anders gewählt wird, oder wenn die Lasten P nach unten hin nicht so schnell zunehmen, als hier vorausgesetzt wurde. Aus dem Kräfteplane wird der Pfeil der R und hiermit das Vorzeichen der Ringspannungen immer leicht zu erkennen sein.

Die Seitenzahl des Grundrißpolygons, zu dem die Kuppel gehört, ist bis dahin ganz gleichgültig. Um aus den Resultierenden R die Spannungen der Ringstäbe selbst zu finden, muß man aber natürlich die Seitenzahl kennen. Jedes R ist dann in der Ringebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Grundrisse nach den Richtungen der zugehörigen Ringstäbe zu zerlegen. Man kann die sich hierfür ergebenden Kräftedreiecke auch an die Strecken R in dem bereits gezeichneten Kräfteplane unmittelbar anreihen.

Schwedler hat die Berechnung der Stabspannungen rechnerisch durchgeführt; man erhält seine Formeln, indem man die betreffenden Strecken im Kräfteplane in den gegebenen Lasten P mit Zuhülfenahme der bekannten Richtungswinkel trigonometrisch ausdrückt. Da die Zeichnung weit bequemer ist, als die trigonometrische Rechnung, soll aber von dieser Umsetzung hier abgesehen werden.

Um ein Urteil darüber zu gewinnen, wie sich das Spannungsbild bei unsymmetrischer Lastverteilung gestaltet, muß man vor allem untersuchen, welche Spannungen durch eine Einzellast, die an einem beliebigen Knotenpunkte angreift, hervorgerufen werden. Zu diesem Zwecke muß ich aber zunächst eine Bemerkung über die sogenannten Gegendiagonalen vorausgehen lassen.

Zur Aussteifung genügt es, wie wir sahen, wenn in jedes vierseitige, aus Sparren- und Ringstäben gebildete Fach eine einzige Diagonale eingeschaltet wird, die das Fach in zwei Dreiecke zerlegt. Bei symmetrischer Belastung sind die Diagonalen spannungslos, bei unsymmetrischer haben sie aber Spannungen aufzunehmen. Daraus folgt schon, daß sie bei manchen Belastungen gezogen, bei andern — namentlich also bei jenen, die die vorigen zu symmetrischen Belastungen ergänzen — gedrückt sein werden. Nun vermeidet man es gerne, solche Stäbe, die ohnehin nur verhältnismäßig geringe Spannungen aufzunehmen haben, auf Druck in Anspruch zu nehmen, weil sie dann auf Zerknicken berechnet werden müßten und daher bei größerer Länge einen erheblichen Materialaufwand erforderten. Man kann dies dadurch umgehen, daß man jedes Fach mit zwei Diagonalstäben versieht, die nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen, so daß die Knickgefahr außer Betracht bleiben kann.

Freilich erhält man damit streng genommen überzählige Stäbe und ein statisch unbestimmtes Fachwerk. Die statische Unbestimmtheit ist aber hier von besonders einfacher Art und sie hindert nicht, daß die Berechnung im wesentlichen gerade so erledigt werden kann, wie für den statisch bestimmten Träger. Denkt man sich nämlich zunächst nur in einem einzigen Fache zwei Diagonalen angeordnet, so können dadurch die Spannungen aller außerhalb dieses Faches liegenden Stäbe überhaupt nicht geändert werden, wie auch der Träger belastet sein möge. Man erkennt dies, wenn man sich den überzähligen Diagonalstab durchschnitten und die in ihm herrschende Spannung durch äußere Kräfte an den beiden Endknotenpunkten ersetzt denkt. Nach Durchschneidung der Diagonale wird der Träger wieder statisch bestimmt und die zu den beiden neu auftretenden Lasten gehörigen Stabspannungen verteilen sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe, weil man hierdurch bereits Gleichgewicht an allen Knotenpunkten herstellen kann. Daraus folgt, daß es für alle übrigen Stäbe ganz gleichgültig ist, ob die zweite Diagonale

vorhanden ist oder nicht und welche Spannung in ihr auftritt, wenn sie vorhanden ist.

In Abb. 110ᵃ ist ein einzelnes Fach herausgezeichnet. Die gestrichelt angegebene Linie 6 sei als die überzählige Diagonale angesehen. Herrscht in dieser eine beliebige Spannung, so findet man die Spannungen in den Stäben 1 bis 5, die zum statisch bestimmten Träger gehören, wenn 6 durch Lasten an den Endknotenpunkten ersetzt wird, aus dem Kräfteplane in Abb. 110ᵇ. Diese Spannungen stellen in der Tat Gleichgewicht an allen Knotenpunkten mit den Lasten 6 her, ohne daß die übrigen Stäbe des ganzen Trägers dabei in Mitleidenschaft gezogen würden. Der Kräfteplan ist zur Figur des einzelnen Faches reziprok und zugleich ihr auch ähnlich, wenn sich auch die einzelnen Seiten dabei nicht in der gleichen Weise entsprechen, wie sie sonst einander zugewiesen sind.

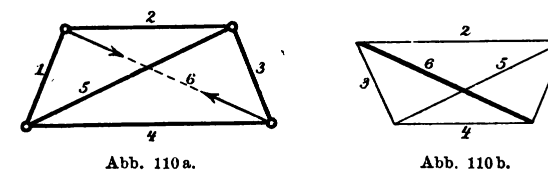


Abb. 110a. Abb. 110b.

Jedenfalls kann man aber hieraus leicht erkennen, wie groß die Spannungen in den fünf übrigen Stäben des Faches sind, die zu den Spannungen im statisch bestimmten Träger noch hinzutreten, wenn auch 6 in irgend eine Spannung gerät.

Über die Größe der Spannung in 6 kann man zunächst nichts aussagen; sie hängt vor allem davon ab, wie der Träger hergestellt wurde. Ist nämlich etwa die Diagonale 6, falls sie zuletzt eingesetzt wird, anfänglich ein wenig kürzer als die Entfernung der Knotenpunkte, so müssen diese gewaltsam ein wenig zusammengerückt werden, um die Diagonale zwischen ihnen befestigen zu können. Die Diagonale 6 gerät dann in Zugspannung und auch in den übrigen Stäben des Faches treten Montierungsspannungen auf, die dem Spannungsbilde in Abb. 110ᵇ entsprechen. Über diese Montierungsspannungen vermag natürlich die Theorie nichts auszusagen,

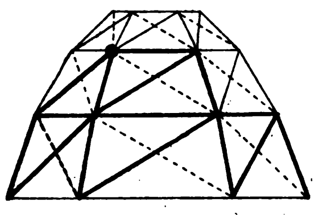
solange über den Hergang bei der Montierung nichts bekannt ist.

Nimmt man an, daß die Montierungsspannungen durch genaues Einpassen vermieden sind und daß beide Diagonalen nur gegen Zug widerstandsfähig sind, so behalte man für die Berechnung der Stabspannungen im Fachwerkträger zunächst nur eine von beiden Diagonalen bei und führe die Berechnung für den auf diese Weise erhaltenen statisch bestimmten Träger durch. Zeigt sich dann, daß die beibehaltene Diagonale bei der gegebenen Belastung auf Druck beansprucht würde, so schalte man sie aus und setze die andere an ihre Stelle. Diese muß dann, um die Druckspannung in der vorigen zu tilgen, gezogen sein und zwar ebenso stark, als jene gedrückt war. Dabei ändern sich auch die Spannungen der zu demselben Fache gehörenden Stäbe um die aus Abb. 110^b zu entnehmenden Beträge.

Was von einem Fache gesagt war, gilt ebenso von jedem andern. Hieraus folgt, daß man in der Tat die Berechnung der Stabspannungen in einem Träger mit Gegendiagonalen im wesentlichen genau so durchführen kann, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man braucht nur für jedes Fach eine Diagonale beizubehalten, falls man sich vorbehält, für jene Fächer, in denen die Diagonale gedrückt würde, nachträglich die besprochene kleine Umrechnung vorzunehmen. — In der Folge werde ich mich daher auch nur mit der Berechnung des statisch bestimmten Trägers mit einer einzigen Diagonale in jedem Fache beschäftigen.

Zunächst sucht man jene Stäbe auf, die durch die gegebene Einzellast überhaupt nicht in Spannung versetzt werden. Man beginnt mit einem unbelasteten Knotenpunkte des Nabelringes. Von einem solchen gehen vier Stäbe aus, von denen drei in derselben Ebene liegen (nämlich die zu demselben trapezförmigen Fache gehörenden). Der vierte, der nicht in dieser Ebene enthalten ist, muß notwendig spannungslos sein, weil einer etwa in ihm auftretenden Spannung durch die Resultierende der drei andern Stabspannungen, die mit diesen ebenfalls in derselben Ebene liegt, nicht Gleichgewicht gehalten werden könnte.

In dem Kuppelgrundrisse der Abb. 111 betrachte man z. B. das Gleichgewicht der Kräfte am Knotenpunkte A. Aus der soeben angestellten Überlegung folgt dann, daß der mit den drei übrigen nicht in derselben Ebene liegende Ringstab BA spannungslos sein muß. Derselbe Schluß läßt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des Nabelringes wiederholen. Wenn die gegebene Last überhaupt nicht an einem Punkte des Nabelringes angreift, wie in Abb. 111 angenommen wurde, sind alle Stäbe dieses Ringes spannungslos. Nachdem man dies erkannt hat, gehe man zum Knotenpunkte A zurück. An ihm kommen jetzt nur noch zwei Stabspannungen vor, nämlich die Spannung des Sparrenstabes AC und die Spannung des Diagonalstabes. Da diese beiden Kräfte in verschiedene Richtungslinien fallen, müssen sie, damit Gleichgewicht bestehen kann, notwendig beide gleich Null sein.



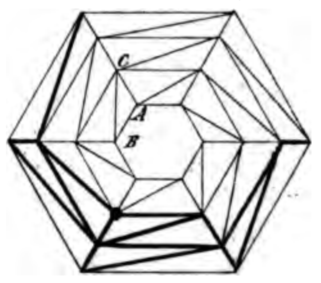


Abb. 111.

Wiederholt man diese Betrachtung für die übrigen Knotenpunkte des Nabelringes, so findet man, daß alle zum obersten Kuppelgeschosse gehörigen Stäbe an der Aufnahme einer weiter unten angebrachten Belastung unbeteiligt sind. Man kann sich daher dieses Kuppelgeschoß auch ganz entfernt denken und nun den nächst unteren Ring als Nabelring ansehen. Für ihn würden sich genau die gleichen Schlüsse wiederholen lassen, wenn nicht der Angriffspunkt der gegebenen Last zu ihm gehörte. In der Abbildung ist jener Punkt, an dem die Belastung angebracht sein soll, durch einen kleinen schwarzen Kreis hervorgehoben. Zugleich sei noch bemerkt, daß alle spannungslosen Stäbe durch feine Linien, die in Spannung versetzten durch starke Striche gekennzeichnet sind.

Immerhin lassen sich die früheren Schlüsse wenigstens

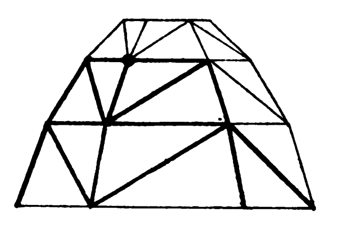
für alle nicht belasteten Knotenpunkte, also z. B. für den Knotenpunkt C wiederholen. Da das obere Kuppelgeschoß nicht mehr in Betracht kommt, greifen an C nur noch vier Stabspannungen an, von denen drei in einer Ebene liegen, so daß die vierte gleich Null sein muß. Auch von diesem Ringe sind daher alle Stäbe mit einziger Ausnahme des durch einen starken Strich angegebenen ohne Spannung. Für diesen läßt sich nämlich derselbe Schluß nicht wiederholen, da zwar die übrigen Stäbe an dem belasteten Knotenpunkte ebenfalls in einer Ebene liegen, dafür aber die gegebene Last noch hinzukommt, von der vorausgesetzt wird, daß sie nicht ebenfalls in dieselbe Ebene fällt.

Kehren wir nun wieder zum Knotenpunkte C zurück, so greifen daran jetzt nur noch zwei Stabspannungen an, die nicht in dieselbe Gerade fallen und die daher beide gleich Null sein müssen. Wiederholt man diese Schlüsse nicht nur für die Knotenpunkte desselben Ringes, sondern auch für die tiefer liegenden, so findet man nach und nach alle spannungslosen Stäbe heraus, wobei nur noch die stark ausgezogenen übrig bleiben.

Nachdem man soweit ist, kann man alle Stabspannungen durch einfache Kräftezerlegungen finden. Man beginnt mit dem Knotenpunkte, der die gegebene Last aufnimmt und an dem jetzt nur noch drei, nicht in derselben Ebene liegende Stabspannungen vorkommen. Diese erhält man mit Hülfe eines windschiefen Kräftevierecks nach einer der im ersten Abschnitte dargelegten Methoden. Von da aus kann man dann, wie bei einem einfachen ebenen Fachwerke, der Reihe nach zu den übrigen Knotenpunkten übergehen, an denen immer nur noch entweder drei nicht in derselben Ebene liegende oder auch nur zwei unbekannte Stabspannungen vorkommen. Der einzige Unterschied gegenüber dem ebenen Fachwerke besteht darin, daß der Kräfteplan ein räumlicher ist und daher in zwei Projektionen gezeichnet werden muß. Dies macht zwar mehr Mühe, bereitet aber keinerlei Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art. Die Aufgabe kann daher als gelöst betrachtet

werden. — Die Anordnung reziproker Kräftepläne, oder genauer gesagt solcher Kräftepläne, in denen jede Stabspannung nur einmal vorkommt, scheint übrigens im Raume nur in wenigen Fällen möglich zu sein, wenigstens kann man sicher nicht mit Hülfe des Nullsystemes dazu gelangen; für die Ausführung des Verfahrens bleibt dies aber gleichgültig.

Hat die Kuppel in Wirklichkeit Gegendiagonalen, so ist sie symmetrisch und wenn die Last selbst in der durch den belasteten Knotenpunkt gehenden Symmetrieebene enthalten ist, kann man nur ein symmetrisches Spannungsbild erwarten, während das in Abb. 111 vorkommende sicher unsymmetrisch ist. Symmetrisch wird es erst nach den früher beschriebenen Umrechnungen innerhalb jener Fächer, in denen gedrückte Diagonalen vorkommen.



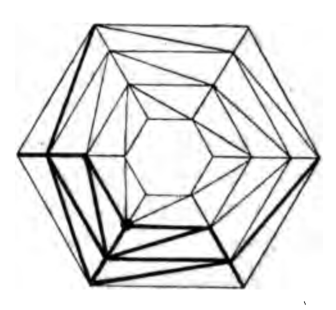


Abb. 112.

Um diese nachträglichen Umrechnungen zu vermeiden, kann man auch von vornherein die Wahl der beizubehaltenden Diagonalen so treffen, daß diese alle in Zugspannung versetzt werden. Welche dies sind, läßt sich allerdings von vornherein, d. h. ohne näheres Eingehen auf den Spannungszustand nicht wohl voraussehen. Da solche Betrachtungen schon öfters durchgeführt wurden, weiß man aber, welche beizubehalten sind. In Abb. 112, die sich im übrigen auf denselben Fall bezieht, wie Abb. 111, ist der Tausch in dieser Weise vollzogen. Auch hier sind die in Spannung versetzten Stäbe durch starke Striche angegeben. Man erzielt bei dieser Auswahl der Diagonalstäbe, auch abgesehen davon, daß die späteren Umrechnungen vermieden werden, auch noch den weiteren Vorteil, daß der Kräfteplan nur auf die eine Trägerhälfte (mit Einschluß der Mitte) aus-

gedehnt zu werden braucht und sich erheblich einfacher gestaltet.

Im wesentlichen ist hiermit das Spannungsproblem, soweit es überhaupt in das Gebiet der Mechanik gehört, als gelöst zu betrachten. Es wird aber gut sein, wenn ich noch einige Bemerkungen über die praktische Brauchbarkeit dieser Lehren hinzufüge.

In der Theorie des Fachwerkes — des ebenen, wie des räumlichen — zieht man nur den Widerstand in Rechnung, den die Stäbe einer Annäherung oder Entfernung ihrer Endpunkte entgegenzusetzen vermögen. Infolgedessen ist jede Stabspannung in der Richtungslinie des Stabes anzunehmen. In Wirklichkeit vermögen aber die Stäbe in den Fachwerkkonstruktionen, die an den Knotenpunkten miteinander vernietet sind, auch einen Biegungswiderstand zu leisten. Es ist daher nicht nötig und im allgemeinen auch nicht zu erwarten, daß die Stabspannung genau mit der Mittellinie des Stabes zusammenfällt. Denkt man sich zwei Querschnitte in der Nähe der Endpunkte durch den Stab gelegt, so mögen sich die in jedem dieser Querschnitte übertragenen Spannungen zu einer Resultierenden vereinigen lassen, deren Angriffspunkt einen gewissen Abstand von dem Querschnittsschwerpunkte hat. Verbindet man beide Angriffspunkte durch eine gerade Linie, so gibt diese die „Kraftachse" des Stabes an. Der Abstand der Kraftachse von der Stabachse mit der Stabspannung multipliziert ist gleich dem Biegungsmomente, das von dem Stabe in dem zugehörigen Querschnitte aufgenommen wird.

Wenn die Stäbe, wie es gewöhnlich der Fall ist, ziemlich lang im Verhältnisse zu ihren Querschnittsabmessungen sind, können sie freilich nur geringe Biegungsmomente aufnehmen und die Unterschiede zwischen den Richtungen der Kraftachsen und der Stabachsen können, wie es hier immer geschah, vernachlässigt werden. Freilich kommt auch dann die Zusatzspannung, die durch die Biegung hervorgerufen wird, neben der Längsspannung in Frage, wenn es sich um die größte Beanspruchung des Materials handelt. Auf die Berechnung

dieser „Sekundärspannungen“, wie man sie zu nennen pflegt, gehe ich indessen hier nicht ein, da diese Betrachtungen besser der Konstruktionslehre vorbehalten bleiben.

Abgesehen davon, daß noch Sekundärspannungen hinzutreten, die eine Erhöhung der Beanspruchung des Materials an gewissen Stellen zur Folge haben, wird aber unter gewöhnlichen Umständen an den Hauptspannungen, d. h. an den Längsspannungen der Stäbe, die ohne Rücksicht auf die Stabbiegungen berechnet sind, nicht viel geändert. In einem Falle aber, der namentlich bei den Schwedlerschen Kuppeln häufig vorkommt, bringen die Richtungsunterschiede zwischen Kraftachsen und Stabachsen auch große Abweichungen in den Längsspannungen der Stäbe hervor. Und zwar fallen die Abweichungen, um die es sich hier handelt, im Gegensatze zu den Sekundärspannungen, zu gunsten der Tragfähigkeit der Konstruktion aus. Manche Flechtwerkkonstruktionen und besonders viele Schwedlersche Kuppeln verdanken die verhältnismäßig große Steifigkeit, die sie der Erfahrung zufolge gegenüber einer Belastung durch eine Einzellast besitzen, ganz überwiegend den Abweichungen zwischen Kraftachsen und Stabachsen, d. h. dem an sich freilich gar nicht großen Biegungswiderstande ihrer Stäbe.

Der Fall, von dem ich sprach, tritt immer dann ein, wenn die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nahezu in einer Ebene liegen. Lägen sie genau in derselben Ebene, so würden die Stabspannungen, wenn man den Biegungswiderstand außer Ansatz ließe, bei einer Belastung dieses Knotenpunktes unendlich groß. Auch dann, wenn sie nur nahezu in einer Ebene liegen, erhält man schon sehr große Stabspannungen. Wenn es aber, wie man sieht, in solchen Fällen sehr wesentlich auf die geringen Abweichungen der Stabrichtungen von der im Knotenpunkte an den Flechtwerkmantel gelegten Berührungsebene ankommt, spielen ihnen gegenüber auch die an sich freilich ebenfalls nur geringen Abweichungen zwischen den Richtungen der Kraftachsen und Stabachsen eine wichtige Rolle.

Durch die von einem Knotenpunkte eines Flechtwerkmantels ausgehenden Stäbe wird ein Vielkant bestimmt, dessen körperlicher Winkel durch den Ausschnitt auf einer von dem Knotenpunkte als Mittelpunkt gezogenen Kugelfläche gemessen werden kann. Liegen die Stäbe in einer Ebene, so wird der in das Flechtwerkinnere fallende Kugelausschnitt zu einer Halbkugel. Liegen sie nur nahezu in einer Ebene, so unterscheidet sich der Kugelausschnitt nicht viel von einer Halbkugel. Für die Kräftezerlegung an dem Knotenpunkte kommt aber nicht das Vielkant aus den Stabachsen, sondern das aus den Kraftachsen gebildete in Betracht. Der zu diesem Vielkante gehörige Kugelausschnitt kann sich schon erheblich mehr von einer Halbkugel unterscheiden, wenn der andere Kugelausschnitt sich der Halbkugel nähert.

Bei einer flachen Schwedlerschen Kuppel, die über einem Grundrisse von großer Seitenzahl errichtet ist und deren aufeinander folgende Sparrenstäbe sich in der Richtung nicht viel voneinander unterscheiden, liegt der besprochene Fall vor. Wenn man hier keine Rücksicht auf die Abweichungen zwischen den Kraftachsen und den Stabachsen nimmt, rechnet man viel zu ungünstig. Schon für eine verhältnismäßig geringe Einzellast an einem Knotenpunkte findet man unter dieser Annahme sehr große Stabspannungen. Es darf als ein Glück bezeichnet werden, daß Schwedler von diesen Folgerungen nichts wußte, da er sonst wahrscheinlich Bedenken getragen hätte, seine Kuppelkonstruktionen auszuführen. Die Erfahrung lehrt aber, daß diese Kuppeln solche Lasten ganz gut aufzunehmen vermögen, die ohne die geringe Biegungssteifigkeit der Stäbe und die dadurch bewirkten Abweichungen zwischen Kraftachsen und Stabachsen einen Zusammenbruch herbeiführen müßten.

Über diese Fragen ist zwar in den letzten Jahren öfters verhandelt worden. Zu einer praktisch brauchbaren und hinreichend genauen Lösung des Spannungsproblems für Kuppeln der bezeichneten Art haben diese Erörterungen aber bisher, meiner Ansicht nach, noch nicht geführt.

§ 43. Die Netzwerkkuppel.

Ein sehr lehrreiches Beispiel für die Berechnung der Stabspannungen in räumlichen Fachwerken liefert die Netzwerkkuppel, die sich von der Schwedlerschen Kuppel in der Anordnung nur wenig unterscheidet. Sie geht aus dieser dadurch hervor, daß man jeden Ring gegen den vorhergehenden etwas dreht, so daß jedem Stabe des einen Ringes ein Knotenpunkt des andern gegenüber steht. Hierdurch fällt zugleich der Unterschied zwischen Sparrenstäben und Diagonalen fort; die an ihre Stelle tretenden sollen als „Netzwerkstäbe“ bezeichnet werden.

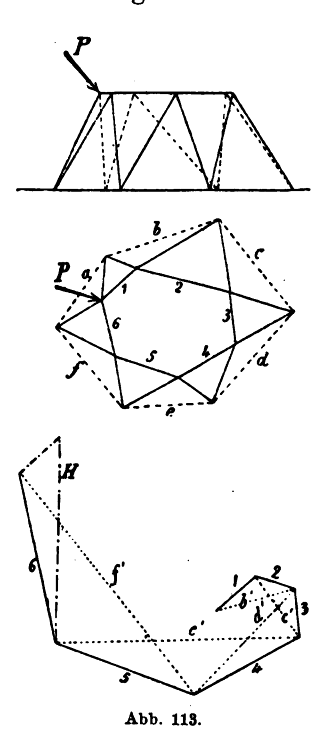


Abb. 113.

In Abb. 113 ist ein einzelnes Stockwerk einer Netzwerkkuppel über einem unregelmäßig sechsseitigen Grundrisse dargestellt. Es möge zunächst besprochen werden, wie man die Stabspannungen findet, die durch eine an einem Knotenpunkte des oberen Ringes angreifende Last P hervorgerufen werden.

Man betrachte den Knotenpunkt des oberen Ringes, von dem die Stäbe 1 und 2 ausgehen. Im Gegensatze zur Schwedlerschen Kuppel liegen von den vier Stäben dieses Knotenpunktes keine drei in einer Ebene; daher kommen auch keine spannungslosen Stäbe vor. Dagegen weiß man, daß die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 mit der Resultierenden aus den Spannungen der beiden Netzwerkstäbe im Gleichgewichte stehen und daher in die Schnittlinie der durch beide Stabpaare gelegten Ebenen fallen muß. Diese Schnittlinie geht parallel zur Grundrißseite b. Wenn aber die Resultierende aus zwei Stabspannungen

nicht in dem von den Stäben eingeschlossenen Winkelraume (oder im Scheitelwinkelraume), sondern im Nebenwinkelraume liegt, müssen beide Stabspannungen von entgegengesetztem Vorzeichen sein.

Von den beiden Ringstäben 1 und 2 ist also einer gezogen und der andere gedrückt. Derselbe Schluß läßt sich auch für die übrigen unbelasteten Knotenpunkte des inneren Ringes wiederholen und man erkennt daraus, daß die Ringstäbe abwechselnd gezogen und gedrückt sind.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Vorzeichen der Spannungen der von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe zueinander verhalten. Dies hängt offenbar davon ab, ob der Ring ein Polygon mit gerader oder mit ungerader Seitenzahl bildet. Es ist ein merkwürdiger Umstand, daß sich die Netzwerkkuppeln in diesen beiden Fällen ganz verschieden verhalten. Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind weit steifer und tragfähiger, als die mit geraden Seitenzahlen.

Bei gerader Seitenzahl, wie in dem Beispiele der Abb. 113, haben die von dem belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe 1 und 6 Spannungen von ungleichem Vorzeichen, wie aus dem vorher besprochenen regelmäßigen Wechsel folgt. Die Resultierende aus beiden Stabspannungen muß daher ebenfalls in den Nebenwinkelraum des von beiden Stäben eingeschlossenen Winkels fallen. Hierbei kann es auch vorkommen, daß die Resultierende zur Grundrißseite a parallel geht, also mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene liegt. In diesem Falle, der z. B. immer bei regelmäßigen Kuppeln von gerader Seitenzahl eintritt, hat die Last P unendlich große Stabspannungen zur Folge, d. h. der Ausnahmefall liegt vor. Regelmäßige Netzwerkkuppeln mit gerader Seitenzahl sind also nicht steif und dürfen daher nicht ausgeführt werden. Übrigens wird auch schon dann, wenn die Kuppel nicht regelmäßig ist, die Resultierende aus den beiden Ringspannungen 1 und 6 leicht wenigstens nahezu in derselben Ebene mit den beiden Netzwerkstäben liegen und auch dann treten schon verhältnismäßig sehr große Stabspannungen auf.

Ganz anders ist es bei einer Netzwerkkuppel über einem Grundrisse von ungerader Seitenzahl. Die beiden vom belasteten Knotenpunkte ausgehenden Ringstäbe haben bei ihr Spannungen gleichen Vorzeichens und die Resultierende fällt in den von den Stabrichtungen gebildeten Winkelraum. Sie liegt dann weit ab von der durch die Netzwerkstäbe gelegten Ebene und die Stabspannungen fallen klein aus. So sind besonders Netzwerkkuppeln über regelmäßigen Grundrissen von ungerader Seitenzahl durchaus stabil.

Bisher habe ich nur auf die Vorzeichen der in den Ringstäben auftretenden Spannungen geachtet. Man kann aber auch die verhältnismäßigen Größen dieser Spannungen leicht finden. Dazu zeichnet man den Kräfteplan in Abb. 113, indem man zunächst die Stabspannung 1 in beliebiger Größe abträgt. Das kommt darauf hinaus, daß man über den Maßstab des Kräfteplanes keine Angabe macht, denn unter dem Vorbehalte, daß der Maßstab nachträglich richtig ermittelt werden muß, kann jede beliebige Strecke zur Darstellung der Spannung 1 dienen. Auch das Vorzeichen dieser Spannung muß zunächst unentschieden bleiben.

Nachdem 1 aufgetragen ist, erhält man 2 aus dem Kräftedreiecke 1, 2, b', wo b' eine Parallele zur Grundrißseite b bedeutet. Hieran schließt sich das Kräftedreieck 2, 3, c', durch das ausgesprochen wird, daß die Resultierende der Ringspannungen 2 und 3 an dem zwischen ihnen liegenden Knotenpunkte parallel zu c gehen muß. Man fährt in dieser Weise fort, bis man zum letzten Ringstabe 6 gelangt ist. Daß die Stabspannungen abwechselnd Zug und Druck bedeuten, wird durch den Kräfteplan ebenfalls schon mit ausgesprochen, wenn man vorläufig auch noch nicht weiß, welche dieser Stäbe gezogen und welche gedrückt sind.

Jedenfalls haben aber wegen der geraden Seitenzahl des Grundrisses die erste und die letzte Ringspannung 1 und 6 entgegengesetzte Vorzeichen und wenn man beide an dem belasteten Knotenpunkte zu einer Resultierenden H vereinigen will, muß man die Strecke 1 an den Endpunkt von 6 so an-

tragen, wie es in der Abbildung geschehen ist. Bei ungerader Seitenzahl des Grundrisses hätte die Strecke 1 an den Endpunkt der letzten Ringspannung in entgegengesetzter Richtung angetragen werden müssen, um die Resultierende H zu erhalten.

Dieser Kunstgriff, den Kräfteplan zunächst einmal im unbestimmt gelassenen Maßstabe aufzutragen, kann auch in andern Fällen, bei denen die übrigen Knotenpunkte bis auf einen unbelastet sind, manchmal mit Vorteil gebraucht werden und zwar nicht nur beim räumlichen, sondern auch schon beim ebenen Fachwerke. Hier erfahren wir dadurch, wie die Resultierende aus den Stabspannungen 1 und 6 am belasteten Knotenpunkte gerichtet ist. Am belasteten Knotenpunkte haben wir es daher nur noch mit vier Kräften zu tun, die sich Gleichgewicht halten und von denen P vollständig gegeben ist, während man von den drei übrigen die Richtungslinien kennt. Wir brauchen daher nur P nach den drei Richtungslinien mit Hülfe eines windschiefen Kräfteviereckes zu zerlegen und finden damit die Spannungen der beiden Netzwerkstäbe, sowie die absolute Größe und den Pfeil der Resultierenden H. Damit ist auch der Maßstab des vorher gezeichneten ebenen Kräfteplanes bekannt und man kann daraus alle Ringspannungen entnehmen. Indem man schließlich noch die Resultierenden b', c' u. s. f. nach den Richtungslinien der zugehörigen Netzwerkstäbe zerlegt, findet man alle Stabspannungen.

Wenn der Grundriß regelmäßig ist, gestaltet sich der Kräfteplan ebenfalls regelmäßig. Der Endpunkt von 6 fällt dann mit dem Anfangspunkte von 1 zusammen, d. h. der Kräfteplan bildet ebenfalls ein geschlossenes, regelmäßiges Sechseck. Daraus folgt auch, daß die Richtungslinie von H in der Tat parallel zur Grundrißseite a werden muß. H liegt daher mit den beiden Netzwerkstäben in einer Ebene und die Last P kann durch diese drei Kräfte nicht im Gleichgewichte gehalten werden. Damit ist die vorher schon aufgestellte Behauptung bewiesen, daß eine regelmäßige Kuppel bei gerader Seitenzahl einen Ausnahmefall bildet.

Interessant ist hier übrigens, daß eine solche Kuppel

nicht nur unendlich kleine, sondern sogar endliche Bewegungen ausführen kann, ohne daß sich die Stablängen zu ändern brauchten, obschon deren Zahl bei Vermeidung des Ausnahmefalles ausreicht, um die Unverschieblichkeit aufrecht zu halten. Der ganze Stabverband bildet hier einen zwangläufigen, „übergeschlossenen" Mechanismus.

Aus Abb. 114, die eine Netzwerkkuppel über quadratischem Grundrisse darstellt, ist dies leicht ersichtlich. Man betrachte vorerst das durch eine Schraffierung hervorgehobene Dreieck mit der Spitze A. Denkt man sich alle andern Stäbe weggeschnitten, so kann sich das Dreieck um seine Grundlinie drehen und die Spitze bewegt sich dabei auf einem Kreisbogen. Nun nehme man das Dreieck B und den Ringstab zwischen A und B hinzu. Es ist klar, daß die vorige Bewegung von A immer noch möglich ist; nur muß sich das Dreieck B heben, wenn sich A senkt, damit die Entfernung der Dreiecksspitzen nicht geändert wird.

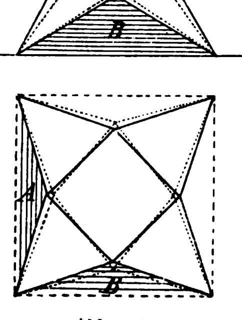


Abb. 114.

Durch punktierte Linien sind in der Abbildung die neuen Lagen der Stäbe nach einer kleinen Bewegung dieser Art angegeben.

Mit dem Anschließen der übrigen Dreiecke kann man in der gleichen Weise fortfahren. Man behält dabei immer einen zwangläufigen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Dreiecksspitzen abwechselnd heben und senken. Nun fehlt noch der letzte Ringstab, der das letzte Dreieck in der Kuppel mit dem ersten verbindet. Ist der Kuppelgrundriß von ungerader Seitenzahl, so müssen sich die Spitzen von A und vom letzten Dreiecke in dem zuvor besprochenen Mechanismus gleichzeitig heben oder gleichzeitig senken. Dabei vergrößert oder verkleinert sich ihr Abstand. Sobald man also den letzten Ringstab einfügt, der beide Spitzen in unveränderlichem Abstande hält, wird damit die zuvor noch bestehende Bewegungsfreiheit aufgehoben und man erhält eine steife Kuppelkonstruktion.

Bei gerader Seitenzahl des Grundrisses senkt sich dagegen die letzte Dreiecksspitze, wenn sich die erste hebt und umgekehrt. Dabei kann es vorkommen, daß sich der Abstand beider Spitzen ohnehin nicht ändert, wenn auch der letzte Ringstab gar nicht eingeschaltet ist. Wenn die Kuppel regelmäßig ist, wie in Abb. 114, folgt schon aus Symmetriegründen, daß sich der Abstand beider Spitzen nicht ändern kann. Die Einschaltung des letzten Ringstabes ändert daher überhaupt nichts an der vorher bestehenden Bewegungsmöglichkeit und die Kuppel bleibt ein Mechanismus von endlicher Beweglichkeit. Eine Anordnung wie in Abb. 114 ist daher unbedingt zu vermeiden.

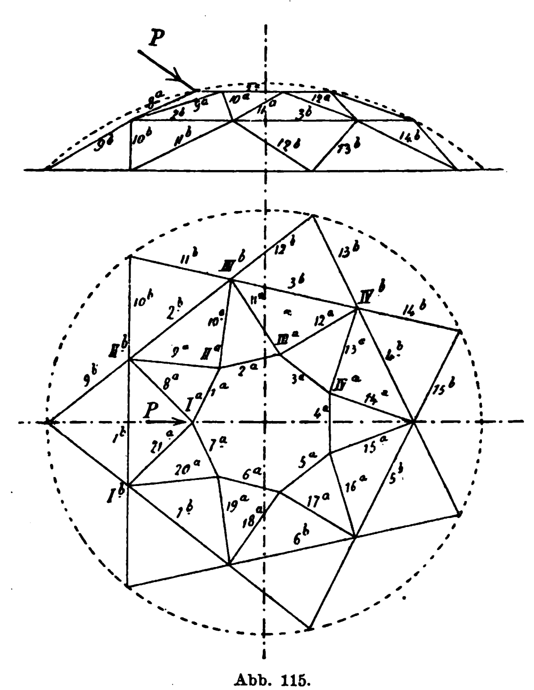


Abb. 115.

Regelmäßige Netzwerkkuppeln mit ungerader Seitenzahl sind dagegen vollkommen stabil. Das Verfahren für die Berechnung der Stabspannungen sei an dem Beispiele der Abb. 115, die eine siebenseitige Kuppel darstellt, erläutert.

Zunächst weiß man, daß die Stäbe des Nabelringes abwechselnd gezogen und gedrückt sind und zwar sind diese Spannungen des regelmäßigen Grundrisses wegen alle von gleicher Größe. Die Resultierende der Stabspannungen 1^a und 7^a an dem belasteten Knotenpunkte I^a fällt also in die durch diesen Punkt gelegte Symmetrieebene der Kuppel. Die Kräfte-

zerlegung an diesem Punkte kann daher ohne weiteres vorgenommen werden. Abb. 116 zeigt den Kräfteplan in Aufriß und Grundriß. Man beginnt im Aufrisse mit dem Dreiecke aus P, der horizontalen Resultierenden von 1^a und 7^a und einer zu 8^a und 21^a, die sich im Aufrisse decken, parallelen Seite. Das Dreieck ist zugleich als Aufriß eines räumlichen Kräftefünfeckes aufzufassen, dessen Grundriß gefunden wird, indem man die aus dem Aufrisse herabgetragene Resultierende von 1^a und 7^a nach den Richtungen dieser beiden Stäbe zerlegt und aus den Endpunkten von P und 7^a Parallelen zu 8^a und 21^a im Grundrisse zieht. Projiziert man die Ecken, in denen 1^a und 7^a sowie 8^a und 21^a aneinander stoßen, nach oben, so geht auch das Dreieck im Aufrisse in ein Fünfeck über, von dem nur zweimal zwei Seiten in eine Gerade fallen.

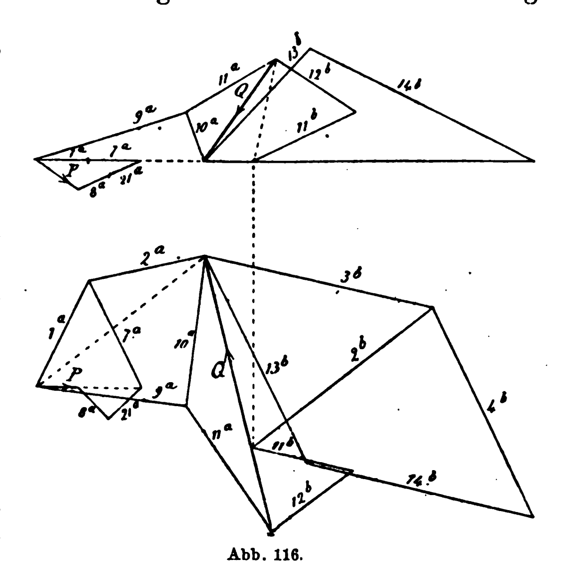


Abb. 116.

Hierauf geht man zum Knotenpunkte II^a über, indem man im Grundrisse 2^a an 1^a in gleicher Größe anreiht und dann die Parallelen zu 9^a und 10^a zieht. Die gestrichelt gezogene Resultierende aus 1^a und 2^a geht parallel zum Stabe 2^b des unteren Ringes. Auch in den Aufriß kann das Kräfteviereck $1^a 2^a 9^a 10^a$ sofort übertragen werden und für die Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung dient dabei die Bemerkung, daß die Eckpunkte, in denen 9^a und 10^a aneinander stoßen, in Aufriß und Grundriß senkrecht übereinander liegen müssen.

Es ist nicht nötig, noch weitere Knotenpunkte des Nabel-

ringes ins Auge zu fassen, da an allen andern dieselben Stabspannungen wie an II^a auftreten, nur mit dem Unterschiede, daß vom einen zum andern jedesmal die Vorzeichen der Stabspannungen wechseln.

Wenn wir jetzt zum unteren Stockwerke übergehen, können wir uns das obere Stockwerk ganz beseitigt und die Spannungen der Netzwerkstäbe des oberen Geschosses an dem dazwischen liegenden Ringe als äußere Kräfte angebracht denken. Freilich greifen dann an allen Knotenpunkten dieses Ringes fünf Kräfte, nämlich die Resultierende der äußeren Kräfte und vier Stabspannungen an und direkt läßt sich daher die Zerlegung nicht weiter führen. Man kommt aber über diese Schwierigkeit leicht hinweg. — Zunächst stelle man Größe und Richtung der in Abb. 116 mit Q bezeichneten Resultierenden der äußeren Kräfte am Knotenpunkte III^b fest, indem man an 10^a die nach Größe und Vorzeichen gleiche Netzwerkspannung 11^a anträgt. Die Richtung von Q muß übrigens, wie man leicht einsieht, in der durch III^b gelegten Symmetrieebene der Kuppel enthalten sein und daher mit der Schnittlinie dieser Ebene und der durch die beiden Netzwerkstäbe gelegten Ebene zusammenfallen.

Am Knotenpunkte IV^b trifft in bezug auf Größe und Richtung der zugehörigen Resultierenden Q dasselbe zu; nur der Pfeil ist entgegengesetzt und wenn wir zum folgenden Knotenpunkte weiter gehen, kehrt er sich immer wieder um. Nur die Knotenpunkte I^b und II^b machen eine Ausnahme. An ihnen stößt jedesmal ein gezogener und ein gedrückter Netzwerkstab zusammen und die Resultierende Q' an II^b aus 8^a und 9^a konnte in dem besonderen Kräfteplane Abb. 117 aus den bekannten Strecken sofort gefunden werden.

Man untersucht nun, welche Spannungen in den Stäben des unteren Stockwerkes durch eine einzige Last Q, die am Knotenpunkte III^b angreift, hervorgerufen werden. Dies geschieht genau so wie vorher die Ermittelung der Stabspannungen im oberen Geschosse unter der Last P. Man zieht in Abb. 115 einen Durchmesser durch III^b, projiziert den Schnitt mit dem

Auflagerkreise in den Aufriß und verbindet diesen Punkt mit III^b im Aufrisse. In diese Linie fällt die Resultierende aus den Stabspannungen 11^b und 12^b unter der Last Q; die Resultierende aus den Ringspannungen 2^b und 3^b ist horizontal und fällt ebenfalls in die Durchmesserebene. Hiernach konnte das Dreieck aus Q, der horizontalen Richtung und der vorher konstruierten Richtung der Resultierenden von 11^b und 12^b im Aufrisse gezeichnet werden. Im Grundrisse projiziert sich das Dreieck als Gerade. Dann zerlegt man die Resultierenden nach den Richtungen der Stabspannungen 2^b, 3^b und 11^b, 12^b, aus denen sie zusammengesetzt waren. Außerdem ist in Abb. 116 noch ein Kräfteviereck für den Knotenpunkt IV^b angeschlossen. Weiter zu gehen, ist nicht mehr nötig, da man wie im vorigen Falle nun schon alle durch Q hervorgerufenen Spannungen anzugeben vermag.

Hierauf wiederhole man in Abb. 117 dieselbe Untersuchung für die am Knotenpunkte II^b angreifende Belastung Q', die als Resultierende der Stabspannungen 8^a und 9^a gefunden war. Auch hier genügt es, die Kraftecke für die Knotenpunkte II^b und III^b aufzutragen.

Abb. 117.

Nun bleibt uns nur noch übrig, die Spannungen aus allen Lasten Q und Q' zusammenzuzählen. Die Spannung jedes Stabes im unteren Kuppelstockwerke wird als eine Summe von sieben Gliedern gefunden, deren Werte sich aus den gezeichneten Kräfteplänen sämtlich entnehmen lassen. Man betrachte z. B. den Stab 3^b. Die Last Q am Knotenpunkte III^b versetzt ihn, wie aus dem Kräfteplane Abb. 116 hervorgeht, in eine Zugspannung, deren Betrag mit s bezeichnet sein möge. Am Knotenpunkte IV^b greift eine Last $-Q$ an, deren Pfeil nach oben hin gekehrt ist und die, da sich sonst alles gleich bleibt, die Spannung $-s$ in Stab 3^b hervorbringt. Am folgenden Knotenpunkte V^b geht der Pfeil von Q wieder nach abwärts und der Ringstab 4^b erfährt daher eine Zugspannung vom Betrage s. Der Stab 3^b, den wir jetzt ins Auge gefaßt haben, wird daher gedrückt und der vom Knotenpunkte

V^b herrührende Beitrag zur Spannung in 3^b ist gleich $-s$. Dieselben Überlegungen lehren, daß auch von VI^b und VII^b her die Spannungen $-s$ in 3^b erzeugt werden.

Die Last Q' am Knotenpunkte II^b bringt in 3^b, wie aus dem Kräfteplane folgt, eine Zugspannung hervor. Die entsprechende und symmetrisch zur vorigen liegende Last Q' am Knotenpunkte I^b versetzt den Stab I^b in Druckspannung, daher 2^b in Zug- und 3^b wieder in Druckspannung und zwar vom gleichen Betrage wie vorher die Zugspannung.

Zählen wir alle sieben Posten zusammen, so finden wir die Spannung des Stabes 3^b gleich $-3s$, d. h. der Stab 3^b wird im ganzen mit einer dreifach so großen Kraft gedrückt, als sie aus Abb. 116 zu entnehmen ist. — Ähnlich läßt sich die Betrachtung auch für alle übrigen Stäbe durchführen. Außerdem kann man auch, nachdem die Spannung eines Stabes auf diese Art ermittelt ist, den Kräfteplan für das untere Kuppelgeschoß unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller darauf von oben her übertragenen Lasten konstruieren. Man umgeht dadurch die Zusammenziehung der sieben Posten, von denen vorher die Rede war, für alle übrigen Stäbe, wofür man freilich die Konstruktion eines neuen Kräfteplanes mit in den Kauf nehmen muß.

§ 44. Das Tonnenflechtwerkdach.

Abb. 118 zeigt einen Teil eines Tonnenflechtwerkdaches in axonometrischer Zeichnung. Nach vorn hin muß man sich den Stabverband in derselben Weise bis zu einer zweiten Stirnmauer hin, an der er ebenso wie an der hinteren aufgelagert wird, fortgesetzt denken.

Die Konstruktion entsteht aus dem geschlossenen Tonnenflechtwerke auf die schon in § 41 näher beschriebene Weise. Die statische Bestimmtheit kann durch nachträgliche Fortlassung der Diagonalstäbe in den beiden untersten Seitenflächen der Tonne und durch längsverschiebliche Auflagerung der Knotenpunkte auf einer der beiden Stirnmauern herbeigeführt werden. Diagonalen, die etwa in den Fächern der unteren

Tonnenseiten beibehalten werden, machen den Träger zwar statisch unbestimmt; die Unbestimmtheit erstreckt sich aber dann nur auf die zu diesen unteren Tonnenseiten gehörigen Stäbe, da eine Spannung in einer solchen überzähligen Diagonale, wenn sie als Last an dem statisch bestimmten Träger aufgefaßt wird, nur in diesen Stäben Spannungen hervorrufen kann. Daher ist es für den Gang der Berechnung ziemlich gleichgültig, ob der Träger auf diese Art wirklich statisch bestimmt gemacht wurde, oder ob man die überzähligen Diagonalen auch in den untersten Fächern beibehält.

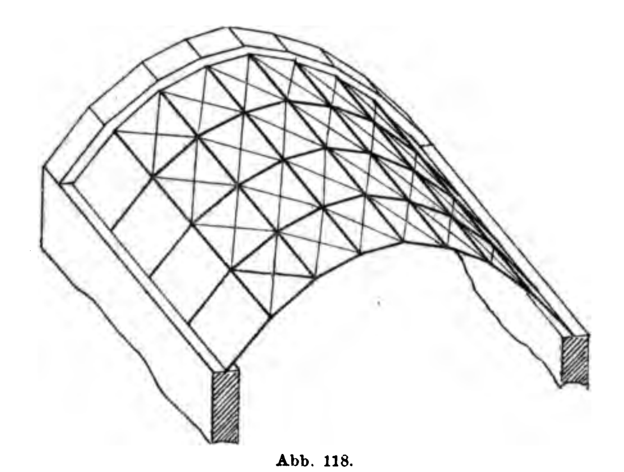


Abb. 118.

In der Abbildung sind in allen Fächern Gegendiagonalen angenommen und auch hierdurch wird nach den Ausführungen in § 42 über die Gegendiagonalen nichts Wesentliches geändert.

Wenn nur eine der Längsrichtung nach gleichförmige Belastung, also z. B. die Eigenlast des Daches in Frage käme, könnte man etwa das Sparrenpolygon (also den Querschnitt des Daches) nach einem Seilpolygone für die an den Knotenpunkten angreifenden Lasten gestalten. Dann genügten schon die in den Sparrenstäben auftretenden, aus dem Kräfteplane des Seileckes zu entnehmenden Druckspannungen, um an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herzustellen und die in horizontaler Richtung

verlaufenden „Pfettenstäbe“ blieben ebenso wie die Diagonalen spannungslos. Wie bei allen Flechtwerken, bei denen die von einem Knotenpunkte ausgehenden Stäbe nicht allzuviel von einer durch den Knotenpunkt gelegten Ebene abweichen, werden aber auch hier durch Einzellasten verhältnismäßig große Spannungen hervorgerufen und auf die Berechnung für einen solchen Belastungsfall kommt es daher vor allen Dingen an.

Der Knotenpunkt B, an dem die Einzellast P angreifen soll, ist in Abb. 119 in einem rechtwinklig zur Längsrichtung des Daches stehenden Risse besonders herausgezeichnet. Die Strecken BA und BC sind die Projektionen der sich an B beiderseits anschließenden Tonnenseiten. Man zerlege die Last P mit Hülfe eines Kräfteparallelogramms in die Komponenten P_1 und P_2, die in die Ebenen der Tonnenseiten fallen. Beachtet man nun, daß die auf jeder Tonnenseite liegenden Stäbe unter sich ein ebenes Fachwerk, nämlich einen auf den beiden Stirnmauern aufgelagerten ebenen Fachwerkbalken mit parallelen Gurtungen bilden, so kann man leicht die Stabspannungen berechnen, die in jedem dieser Fachwerkbalken durch die in die zugehörige Ebene fallende Lastkomponente P_1 oder P_2 hervorgerufen werden. Die sich im Punkte B projizierende Reihe der Pfettenstäbe bildet eine gemeinsame Gurtung für die beiden sich in ihr aneinander schließenden ebenen Fachwerkbalken. Man muß daher, um die in diesen Pfettenstäben auftretenden Spannungen zu erhalten, die Gurtspannungen in beiden Fachwerkbalken zueinander addieren.

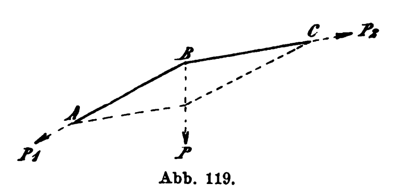


Abb. 119.

Durch diese Kräftezerlegung läßt sich an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen und da der Träger im wesentlichen statisch bestimmt ist, erhält man hiermit auch das richtige Spannungsbild. Alle andern Stäbe, die nicht zu den beiden an den belasteten Knotenpunkt sich anschließenden Tonnenseiten gehören, bleiben demnach unter dem Einflusse der Einzellast spannungslos.

Bei einer praktischen Ausführung läßt sich nicht vermeiden, daß die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Sparrenstäben nur wenig von gestreckten abweichen. Die beiden Lastkomponenten P_1 und P_2 werden dann, wie man aus Abb. 119 erkennt, verhältnismäßig groß und mit ihnen auch die Stabspannungen, namentlich jene der Pfettenstäbe, wenn überdies die Länge des Daches, die zugleich die Spannweite der einzelnen ebenen Fachwerkbalken darstellt, ziemlich groß ist. Aber auch hier gelten die gegen den Schluß von § 42 gemachten Bemerkungen. Infolge der, wenn auch nur verhältnismäßig geringen, Biegungssteifigkeit der Stäbe wird die Tragfähigkeit der Konstruktion viel größer, als es nach dieser Berechnung scheinen könnte. Ich habe mich davon auch direkt durch ausführliche Versuche überzeugt, die ich mit einem, in ziemlich großem Maßstabe ausgeführten Tonnenflechtwerke in meinem Laboratorium vornahm, worüber in den „Mittheilungen" des Laboratoriums, Heft 24, 1896 eingehend berichtet ist. Ich erwähne davon hier nur, daß die Einsenkung, die der in der Mitte der Firstpfette gelegene Knotenpunkt unter einer an ihm angebrachten Einzellast erfuhr, nur 17 Prozent von jener betrug, die bei Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit der Flechtwerkstäbe zu erwarten gewesen wäre. Die Längsspannungen der Stäbe werden sogar in noch höherem Maße vermindert.

Für den Fall einer der Längsrichtung des Daches nach gleichförmigen Lastverteilung, die aber von einem Knotenpunkte desselben Querschnittes zum andern beliebig wechseln kann, lassen sich die Stabspannungen ebenfalls sehr leicht berechnen, ohne daß man nötig hätte, die von den einzelnen Lasten für sich hervorgebrachten Spannungen getrennt zu berechnen und sie dann zu summieren. In Abb. 120^a seien die Lasten P_1, P_2 u. s. f. beliebig gegeben. Man entwerfe den Kräfteplan Abb. 120^b, indem man zuerst P_1 nach 1 und 2 zerlegt, hierauf P_2 nach 2 und 3 u. s. f. Durch die Strecken ab, bc, cd werden dann jene Lasten angegeben, die man an den ebenen Fachwerkbalken auf den Tonnenseiten 1, 2, 3 an-

zubringen hat und durch die diese Fachwerkbalken auf Biegung in ihrer Ebene beansprucht werden. Hierbei hat man zuletzt

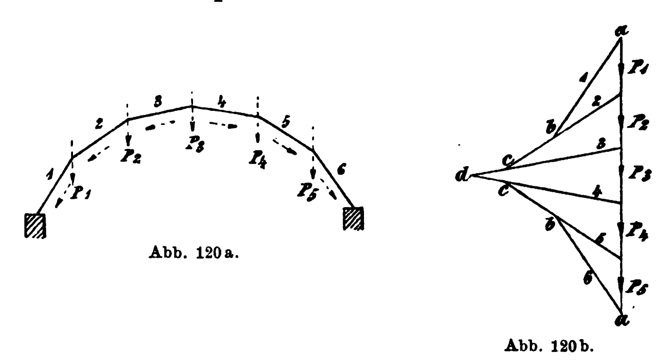


Abb. 120a.

Abb. 120b.

wieder darauf zu achten, daß jede Pfettenreihe (abgesehen von der im Firste) gleichzeitig als Obergurt des einen und als Untergurt des andern Fachwerkbalkens auftritt. Die zugehörigen Zug- und Druckspannungen gleichen sich dann zum großen Teile gegeneinander aus.

In Abb. 121^a und 121^b ist dasselbe für den Fall einer Belastung durch Winddruck ausgeführt. Dabei ist voraus-

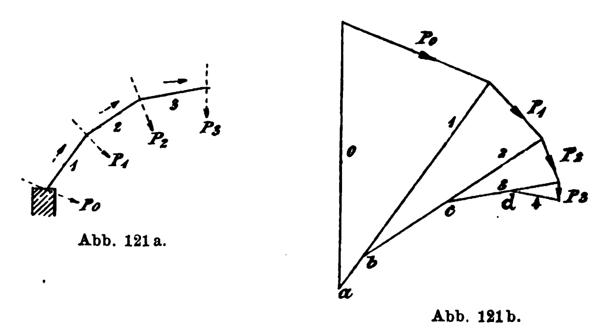


Abb. 121a.

Abb. 121b.

gesetzt, daß die Widerlagsmauer nicht hinreichend widerstandsfähig gegen horizontale Kräfte ist, so daß auch in den Auflagerpunkten noch ein Winddruck P_0 von dem Träger aufzunehmen ist. Natürlich dürfen in diesem Falle die Diagonalen in den Fächern der untersten Tonnenseite nicht fehlen. — Auch hier werden die von den ebenen Fachwerkbalken aufzunehmen-

den Lasten durch die Strecken *ab*, *bc*, *cd* · des Kräfteplanes angegeben und die Pfeile, nach denen sie an diesen Balken biegend angreifen, sind in Abb. 121ᵃ eingetragen. Die weitere Berechnung der Stabspannungen, die zu diesen Lasten gehören, erfolgt wie im vorigen Falle.

Im Anschlusse hieran möge noch ein in den letzten Jahren von Löhle in Zürich zur Anwendung gebrachtes Flechtwerkdach erwähnt werden, das dem vorigen nahe verwandt ist und nach denselben Grundsätzen berechnet werden kann. Zur Überdachung eines größeren Werkstattraumes verwendet man gewöhnlich der besseren Lichtzuführung wegen ein sogenanntes „Sägedach" von dem aus Abb. 122 ersichtlichen Umrisse. Nach der älteren Bauart unterstützte man die Dachflächen durch eine Reihe kleiner Binder, die die Spannweiten von A bis C u. s. f. überdecken und sich bei A und C auf Unterzüge stützen, die zwischen den in größeren Abständen stehenden Pfeilern angeordnet sind. Anstatt dessen führt Löhle auf den Tonnenseiten, die sich in den Strecken AB, BC u. s. f. projizieren, ebene Fachwerkbalken aus, von denen je zwei aneinander grenzende die dazwischen liegende Gurtung gemeinsam haben. Hierdurch werden nicht nur die Binder, sondern auch die vorher erwähnten Unterzüge entbehrlich gemacht und für den Fall von großen (zur Zeichenebene senkrecht gemessenen) Pfeilerentfernungen wird eine ziemlich erhebliche Materialersparnis erzielt.

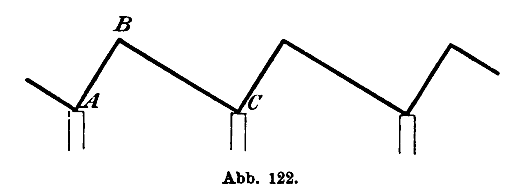


Abb. 122.

Wie man sieht, besteht der Unterschied gegenüber der in Abb. 118 gezeichneten Anordnung eigentlich nur in der abweichenden Querschnittslinie der Tonne; die vorher auseinandergesetzte Berechnung kann daher auf diesen Fall ohne weiteres übertragen werden.

§ 45. Flechtwerkträger eines Krangerüstes.

In Abb. 24ᵃ, S. 60 war ein ebenes Traggerüst für einen Kran dargestellt und im zugehörigen Kräfteplane Abb. 24ᵇ waren die Stabspannungen ermittelt worden, die darin durch eine am Ausleger angreifende Last 𝔄 hervorgerufen werden.

Dabei mußte aber vorausgesetzt werden, daß die Rich-

tungslinie der Last 𝔄 in der Ebene des Binders liege, denn gegen Kräfte, die senkrecht zur Binderebene gerichtet sind, ist ein ebener Stabverband, wenigstens in seiner Eigenschaft als Fachwerk, nicht widerstandsfähig.

Nun ist freilich bei einem Krane der bei jener Gelegenheit vorausgesetzte Belastungsfall der wichtigste. Es kann aber immerhin auch vorkommen, daß die am Ausleger angreifende Kraft entweder selbst eine zur Binderebene senkrechte Komponente hat oder daß daneben andere Lasten (Winddruck u. dgl.) vorkommen, die zu dieser Ebene senkrecht stehen. Man muß daher auch für eine gewisse Steifigkeit der Konstruktion senkrecht zur Binderebene sorgen. Dies kann nun zwar auf verschiedene Art geschehen; am wirksamsten geschieht es aber durch den Übergang vom ebenen zum räumlichen Fachwerke.

Man kann sich hier die Aufgabe stellen, aus der ebenen Binderfigur heraus einen räumlichen, statisch bestimmten Fachwerkträger zu entwickeln, der gegenüber Lasten, die in der Symmetrieebene liegen, im wesentlichen ebenso wirkt, wie vorher der ebene Binder, dabei aber zugleich noch imstande ist, gegenüber Lasten, die senkrecht zu jener Ebene gerichtet sind, als Fachwerkträger, d. h. unter ausschließlicher Beanspruchung der Stäbe auf Zug oder Druck zu widerstehen. Auch diese Aufgabe läßt noch verschiedene Lösungen zu. Die einfachste wird durch Abb. 123 in axonometrischer Zeichnung angegeben. Dabei sei bemerkt, daß auch die gestrichelten Linien Stäbe vorstellen, die nur bei dem betreffenden Belastungsfalle spannungslos sind.

Daß der Träger statisch bestimmt ist, erkennt man am einfachsten daraus, daß sich die zu dem oberen Teile gehörigen Stäbe zu Dreiecken zusammenschließen, die einen inneren Raum vollständig umgrenzen. Der obere Teil bildet daher ein vollständiges Flechtwerk, das durch die sechs unteren Stäbe starr mit der festen Erde verbunden ist. Mit Ausnahme der gestrichelt ausgezogenen Diagonale in dem nach unten gekehrten trapezförmigen Fache des Flechtwerkmantels ist die ganze An-

ordnung symmetrisch. Man kann aber die Symmetrie auch vollständig machen, indem man in dieses Fach eine zweite Diagonale einschiebt. Wir wissen schon, daß die statische Unbestimmtheit, die hierdurch eingeführt wird, unerheblich ist, da sie sich nur auf die zu demselben Fache gehörenden Stäbe erstreckt und daß auch selbst für diese Stäbe sofort klare Verhältnisse geschaffen werden, sobald man annimmt, daß beide Diagonalen als Gegendiagonalen ausgebildet, d. h. nur gegen Zug widerstandsfähig konstruiert werden.

Der Aufriß des räumlichen Trägers stimmt genau mit der früheren Binderfigur überein. Daher kann auch die Berechnung der Stabspannungen für solche Lasten, die in der Mittelebene liegen, aus der früher für den Binder durchgeführten Berechnung ohne weiteres abgeleitet werden. Wenn sich nämlich Kräfte an einem Punkte im Raume im Gleichgewichte halten und man projiziert sie alle auf eine Ebene, so ist auch die geometrische Summe ihrer Projektionen gleich Null. Auf die Linien der Binderfigur projizieren sich aber die Stabspannungen des räumlichen Trägers und die im Kräfteplane der Abb. 24^{b} erhaltenen Strecken geben daher ohne weiteres die Summe der Aufrißprojektionen der Spannungen jener Stäbe an, die sich in der Binderfigur, als Aufriß des räumlichen Trägers betrachtet, übereinander decken.

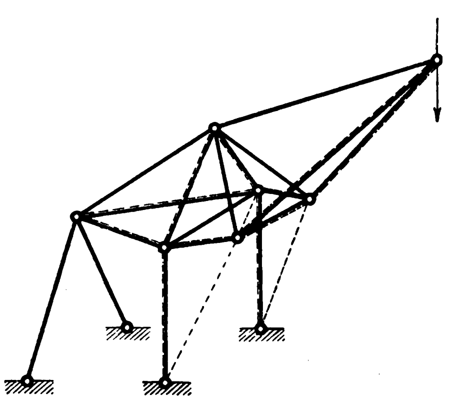


Abb. 123.

Der symmetrischen Anordnung und Belastung wegen, läßt sich ferner an jedem Knotenpunkte dadurch Gleichgewicht herstellen, daß man die Spannungen der spiegelbildlich zueinander liegenden Stäbe gleich groß und von gleichem Vor-

zeichen annimmt, die einzelne, unsymmetrisch vorkommende Diagonale dagegen spannungslos läßt. Da der Träger statisch bestimmt und daher nur ein einziges Gleichgewichtssystem von Spannungen möglich ist, muß die genannte Diagonale hiernach auch wirklich spannungslos sein. Die aus dem Kräfteplane der Abb. 24^b entnommenen Strecken geben sofort die in der Mittelebene liegenden Resultierenden der Stabspannungen an, die sich in den entsprechenden Seiten der Binderfigur übereinander decken. Man braucht daher nur nachträglich noch eine Zerlegung der durch den Kräfteplan gelieferten Resultierenden nach den Richtungen der betreffenden Stäbe vorzunehmen, was etwa im Grundrisse geschehen kann.

Von jenen Stäben, die selbst in der Mittelebene liegen und die sich daher im Aufrisse nicht mit andern überdecken, liefert der ebene Kräfteplan schon unmittelbar die Spannung, ohne daß eine weitere Zerlegung nötig wäre. Für jene Stäbe endlich, die senkrecht zur Mittelebene stehen und sich daher im Aufrisse als Punkte projizieren, findet man die Spannungen nachträglich durch Zeichnen von Kraftecken für einen ihrer Endpunkte im Grundrisse. Da die übrigen Stabspannungen schon sämtlich bekannt sind, können diese Kraftecke ohne weiteres aufgetragen werden.

Da alle diese Zerlegungen sehr einfach sind, habe ich die Beigabe einer besonderen Zeichnung des Kräfteplanes für entbehrlich gehalten. Dagegen sind in Abb. 123 jene Stäbe, die für den Fall einer senkrechten Last am Ausleger gedrückt sind, durch Schattenstriche hervorgehoben und die spannungslosen durch gestrichelte Linien angegeben.

Wenn die Last am Ausleger eine beliebige Richtung im Raume hat, hört die symmetrische Spannungsverteilung auf und das bisher besprochene Verfahren ist daher nicht mehr anwendbar. Man zerlegt die Last in diesem Falle am besten in zwei Komponenten, von denen eine in der Mittelebene liegt und die andere senkrecht zu ihr steht, und berechnet die von jeder dieser Komponenten für sich hervorgerufenen Spannungen, die man dann nachträglich summieren kann. Für den ersten

Belastungsfall ist die Lösung schon bekannt; es bleibt also nur noch die zweite zu untersuchen.

In Abb. 124 ist zunächst wieder eine axonometrische Zeichnung des Krangerüstes gegeben, in der genau wie vorher die bei dem jetzt vorliegenden Belastungsfalle spannungslos bleibenden Stäbe durch gestrichelte Linien angegeben sind. Wir wollen uns zunächst überzeugen, daß diese in der Tat spannungslos bleiben müssen.

Denkt man sich die sechs Stäbe, die den oberen Flechtwerkkörper mit der festen Erde verbinden, durchschnitten, so müssen die an den Schnittstellen als äußere Kräfte anzubringenden Stabspannungen mit der Last $\mathfrak{P}$ am Ausleger ein Gleichgewichtssystem bilden. Für eine Momentenachse, die durch die Auflagerpunkte X und XI gelegt ist, verschwinden die Momente von $\mathfrak{P}$ (da es zur Achse parallel ist) und von den vier von diesen Punkten ausgehenden Stabspannungen. Die Summe der Momente der beiden am Knotenpunkte I angreifenden Stabspannungen $VIII, I$ und IX, I muß daher ebenfalls gleich Null sein. Nun kann man sich diese beiden Spannungen zu einer am Knotenpunkte I angreifenden Resultierenden vereinigt denken. Die Resultierende muß in der Ebene $I, VIII, IX$ enthalten sein, die zur Momentenachse parallel ist, und damit ihr Moment zu Null wird, muß sie selbst zur Momentenachse parallel sein.

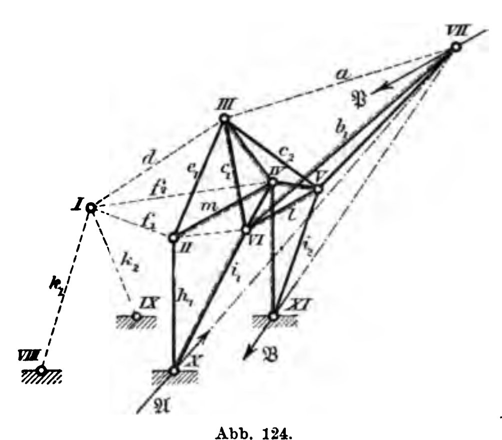


Abb. 124.

Nachdem man dies erkannt hat, wende man den Momentensatz nochmals für eine durch den Knotenpunkt VII in lotrechter Richtung gelegte Momentenachse an. Auch für diese

Achse verschwinden die Momente von 𝔓 und von den zu den Auflagerpunkten *X* und *XI* gehörigen Stabspannungen. Dies erkennt man aus dem in Abb. 125[b] gezeichneten Grundrisse, aus dem hervorgeht, daß sich die Ebenen *X, II, VI* und *XI, IV, V* in der jetzt als Momentenachse gewählten Geraden schneiden. Demnach muß auch für diese Momentenachse das Moment der am Knotenpunkte *I* gebildeten Resultierenden aus den Stabspannungen *VIII, I* und *IX, I* gleich Null sein. Wir erkannten aber schon vorher, daß diese Resultierende, falls sie überhaupt besteht, nur parallel zur vorigen Momentenachse gehen kann. Wäre sie von Null verschieden, so könnte ihr Moment für die jetzt gewählte Momentenachse nicht verschwinden, da die beiden Linien windschief zueinander liegen. Die Resultierende muß also Null sein und daher müssen auch die Stäbe, aus deren Spannungen die Resultierende gebildet war, beide spannungslos sein.

Die drei übrigen Stäbe, die noch vom Knotenpunkte *I* ausgehen, müssen nun auch spannungslos sein, da zwischen drei Kräften, die nicht in derselben Ebene liegen, nur dadurch Gleichgewicht hergestellt werden kann, daß man sie alle drei gleich Null setzt. Wir kommen ferner zum Stabe *III, VII*. Daß dieser spannungslos ist, folgt daraus, daß die Kraft 𝔓 am Knotenpunkte *VII* mit den beiden andern von diesem Knotenpunkte ausgehenden Stäben in einer Ebene liegt. Die vierte, mit den drei andern nicht in derselben Ebene liegende Kraft muß daher gleich Null sein. Schließlich bleibt noch der Stab *II, VI*. Auch bei ihm folgt der Schluß, daß er spannungslos sein muß, daraus, daß die drei andern vom Knotenpunkte *II* ausgehenden Stabspannungen in einer Ebene liegen. Dabei ist zu beachten, daß man vorher schon erkannte, daß Stab *II, I* spannungslos ist.

Um ferner die Spannungen der bei dem betrachteten Belastungsfalle in Tätigkeit kommenden Stäbe zu ermitteln, erwäge man vorerst, daß der Träger nur in den Punkten *X* und *XI* Auflagerkräfte 𝔄 und 𝔅 überträgt, die mit der Last 𝔓 ein Gleichgewichtssystem bilden. Zugleich muß 𝔄 in der

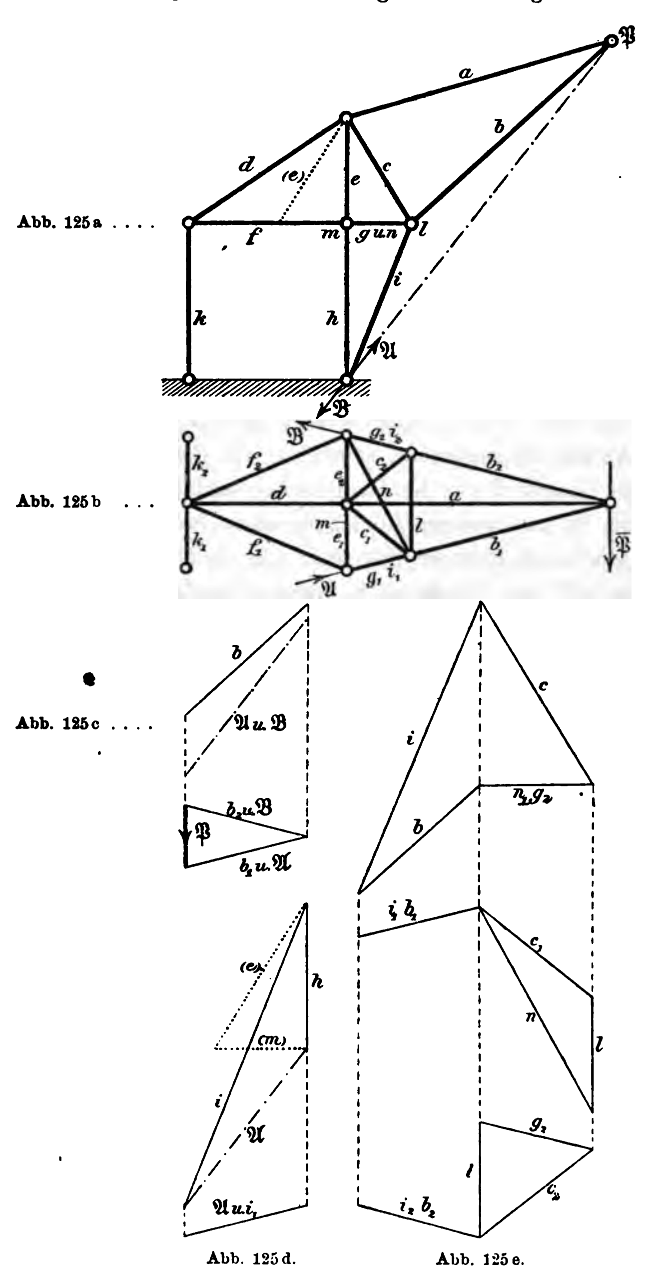


Abb. 125a . . . .

Abb. 125b . . .

Abb. 125c . . . .

Abb. 125d.

Abb. 125e.

Ebene der beiden sich in X anschließenden Stäbe enthalten sein, da 𝔄 auch mit den Spannungen dieser Stäbe im Gleichgewichte sein muß. Entsprechendes gilt für 𝔅. Daraus folgt, daß die Richtungslinien von 𝔄 und 𝔅 sich mit 𝔓 im Knotenpunkte *VII* schneiden müssen.

Nach diesen Vorbemerkungen kann man zu der in Abb. 125[c] in Grundriß und Aufriß ausgeführten Kräftezerlegung schreiten. Die Kraft 𝔓 zerlegt man zuerst im Grundrisse nach den Richtungen von b_1 und b_2 oder auch von 𝔄 und 𝔅, denn diese Richtungen decken sich hier. Im Aufrisse decken sich sowohl b_1 und b_2, wofür kurz b geschrieben ist, als auch 𝔄 und 𝔅.

Dann folgt Abb. 125[d]. Man zerlegt hier 𝔄, das von der vorigen Zeichnung übernommen wird, in die Stabspannungen h und i. Der Grundriß des Kräftedreieckes bildet eine Gerade. Auch die von 𝔅 am andern Auflagerpunkte hervorgerufenen Stabspannungen sind hiermit bekannt; sie sind ebenso groß, als die ihnen auf der Vorderseite entsprechenden, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Dies folgt schon aus der bereits beim vorigen Belastungsfalle angestellten Überlegung über die Stabspannungen in der Binderfigur, die den Aufriß des räumlichen Trägers bildet. Die Projektion von 𝔓 im Aufrisse ist nämlich im vorliegenden Falle gleich Null; daher sind auch die Stabspannungen im Binder gleich Null, d. h. die sich im Aufrisse auf denselben Linien überdeckenden Projektionen der Stabspannungen des räumlichen Trägers sind von gleicher Größe und entgegengesetztem Vorzeichen. Auch schon auf Grund dieser Überlegung hätte man den Nachweis erbringen können, daß die in der Mittelebene selbst liegenden Stäbe a und d spannungslos sein müssen. Im übrigen ist darauf auch bei den weiter folgenden Zerlegungen Rücksicht zu nehmen.

Wir kommen nun zu Abb. 125[e], die zwei verschiedene Grundrisse und einen zu beiden gehörigen, gemeinsamen Aufriß umfaßt. Der obere Grundriß samt dem Aufrisse bildet das Krafteck für den Knotenpunkt *VI* (siehe wegen der Numerierung der Knotenpunkte die zugehörige axonometrische Zeichnung in Abb. 124); der untere Grundriß gehört zu dem hinter *VI*,

symmetrisch dazu liegenden Knotenpunkte V. Vom Kraftecke für den Knotenpunkt VI kennt man bereits die Stabspannungen i_1 und b_1. Diese sind im Aufrisse im Sinne ihrer Pfeile aneinander gereiht; im Grundrisse überdecken sie sich. Dann zieht man im Aufrisse die Parallelen zu c und n. Im Grundrisse tritt dazu noch die Stabspannung l, die sich im Aufrisse als Punkt projiziert. Damit sind die Projektionen des windschiefen Kräftefünfeckes für den Knotenpunkt VI bereits gefunden.

Für den Knotenpunkt V gilt derselbe Aufriß; nur hat jetzt die vorher mit n bezeichnete horizontale Seite bei ihm die Bedeutung von g_2. Auch hier ergibt sich die Stabspannung l von neuem und sie muß natürlich ebenso groß ausfallen, als im vorigen Kraftecke.

Nun fehlt nur noch die Spannung der mit e bezeichneten Stäbe. Sie folgt aus dem Kräftedreiecke für den Knotenpunkt II. Dieses ist in Abb. 125^d in umgeklappter Lage, also in wahrer Gestalt und zwar mit punktierten Linien eingetragen. Dazu wurde schon im Aufrisse e in die Mittelebene umgeklappt und zu der hierdurch gefundenen, punktiert ausgezogenen Richtung (e) die Parallele (e) in Abb. 125^d gezogen.

Nachträglich hat man noch die wahren Längen der im Aufrisse und Grundrisse gegebenen Stabspannungen zu ermitteln und sie nach dem gewählten Kräftemaßstabe auszumessen. Davon ist in der Zeichnung Abstand genommen.

Am einfachsten wählt man bei der Zeichnung $\mathfrak{P}$ gleich der Lasteinheit. Kommt dann irgend eine Last von beliebiger Richtung am Ausleger vor, so kann man sofort auf Grund der soeben ausgeführten Kräftezerlegung jenen Anteil der Stabspannungen angeben, der durch die senkrecht zur Mittelebene stehende Lastkomponente hervorgebracht wird. Hat man solche Kräftepläne auch noch für die beiden einfacheren Belastungsfälle, daß $\mathfrak{P}$ entweder lotrecht oder horizontal in der Mittelebene gerichtet ist, entworfen, so wird man aus einem Vergleiche der Ergebnisse leicht auch entnehmen können, bei welcher Richtung einer Last von gegebener Größe die größte

Zug- oder die größte Druckspannung in irgend einem Stabe zustande kommt.

§ 45[a]. Anwendung des Stabvertauschungsverfahrens auf die Berechnung räumlicher Fachwerke.

Wenn andere Mittel zur Berechnung der Stabspannungen in statisch bestimmten räumlichen Fachwerkträgern versagen, kann man stets durch das schon in § 34 für das ebene Fachwerk auseinandergesetzte Hennebergsche Verfahren der Einführung von Ersatzstäben zum Ziele gelangen. Dieses Verfahren ist nämlich für räumliche Fachwerke genau ebenso wie für ebene anwendbar und Henneberg hat es auch schon von Anfang an für beide Fälle angegeben, obschon er es zunächst nur für die Berechnung ebener Fachwerke wirklich verwendet hat. Dies ist später von Müller-Breslau geschehen, dem für die weitere Ausbildung des Verfahrens und für die geschickte Verwendung, die er davon gemacht hat, ein sehr erhebliches Verdienst zuzusprechen ist.

Obschon es mir in diesem Buche in erster Linie immer nur auf die Sache und viel weniger auf die Personen ankommt, denen man die einzelnen Fortschritte verdankt (weshalb ich es auch meistens vermieden habe, den Anteil hervorzuheben, den ich selbst bei der Entwicklung der Theorie genommen habe), scheint es mir doch am Platze, als in dieser Frage ganz Unbeteiligter meine Meinung dahin zum Ausdrucke zu bringen, daß Henneberg als der erste Urheber des Verfahrens der Stabvertauschung anzuerkennen ist, daß aber andererseits Müller-Breslau weitaus am meisten dazu beigetragen hat, diesen fruchtbaren Gedanken für die weitere Ausgestaltung und Durchführung der Theorie nutzbar zu machen. Es mag ja wohl sein, daß beide Teile mit diesem Ausspruche nicht recht zufrieden sein werden; ich denke aber, daß er der Billigkeit entspricht und daß er nach beiden Seiten hin erheblichen Verdiensten gerecht wird.

Schon in einigen andern Fällen, die in diesem Abschnitte behandelt wurden, kann man die Untersuchung auch mit Hülfe des Stabvertauschungsverfahrens durchführen. Man gewinnt

aber dadurch nichts. Vielmehr beschränkt man die Anwendung des Verfahrens am besten auf solche Fälle, in denen einfachere Wege nicht mehr zum Ziele führen.

Ein solcher, sehr bemerkenswerter Fall liegt bei der Zimmermannschen Kuppel vor, die im letzten Jahre die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich gezogen hat. Diese Kuppel wurde vom Geh. Oberbaurat Dr. Zimmermann, dem hervorragenden Techniker im Preußischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten schon vor Jahren für das Reichstagshaus in Berlin entworfen und ausgeführt. Erst vor kurzem kam aber Zimmermann dazu, die Berechnung der zu beliebigen Lasten gehörigen Stabspannungen auf analytischem Wege in einer besonderen Schrift („Über Raumfachwerke", Berlin 1901) zu veröffentlichen. Obschon die Berechnung auf diesem Wege (durch unmittelbare Auflösung der für das Gleichgewicht an den einzelnen Knotenpunkten geltenden Gleichungen) sehr mühsam ist, hat sie Zimmermann mit großem Geschick vollständig durchgeführt und die unmittelbare Anwendung der von ihm abgeleiteten Formeln auf einen praktisch vorliegenden Fall macht nur noch geringe Mühe.

Weit einfacher kann man aber zu den Zimmermannschen Ergebnissen mit Hülfe des Stabvertauschungsverfahrens gelangen. Zunächst wies ich schon selbst (Centralblatt der Bauverwaltung 1901, S. 487) auf einen Weg zur raschen Lösung der Aufgabe hin, der im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, wie das Verfahren der Stabvertauschung und nachher zeigte Müller-Breslau (Centralbl. d. Bauverw. 1902, S. 49), daß es in der Tat nur nötig war, sich dieses schon längst bekannten Verfahrens zu erinnern, um die Aufgabe sofort mit verhältnismäßig geringer Mühe zu lösen, ohne daß dazu noch irgend ein neuer Gedanke erforderlich wäre.

Der Zimmermannsche Kuppelaufbau bietet in praktischer Hinsicht erhebliche Vorteile, auf die hier freilich nicht näher eingegangen zu werden braucht. Da sich aber annehmen läßt, daß er unter diesen Umständen auch späterhin noch öfters zur Verwendung gelangen wird und da er zugleich ein sehr

geeignetes Beispiel zur Übung im Zeichnen von räumlichen Kräfteplänen bildet, schien es mir nützlich, ihn hier zu besprechen. Ein für solche Dinge begabter Studierender, der sich vorher schon eine gewisse Übung im Zerlegen von Kräften im Raume erworben hat, wird der Auseinandersetzung leicht zu folgen vermögen und sich von der Durcharbeitung des Beispieles großen Nutzen versprechen dürfen.

Dabei werde ich demselben Gedankengange folgen, den ich schon bei der vorher erwähnten Veröffentlichung innegehalten hatte. Er bildet nämlich, wie man sehen wird, nur eine geringfügige Änderung des Stabvertauschungsverfahrens, die in manchen Fällen recht zweckmäßig erscheint und mit der man sich, um den Gegenstand von allen Seiten her kennen zu lernen, ebenfalls noch vertraut machen möge. — Hierbei mag es vielleicht nicht überflüssig sein, daran zu erinnern, daß die Ableitung praktisch möglichst bequem verwendbarer Ergebnisse in diesem Lehrbuche erst in zweiter Reihe in Betracht kommen kann; der Hauptzweck muß hier, wie an allen andern Stellen, eine möglichst tüchtige Ausbildung des Lernenden in der Statik bleiben. Vereinfachungen, die sich im einzelnen Falle sehr oft — und so auch hier — durch eine geschickte Anordnung erzielen lassen, ergeben sich späterhin leicht genug, sobald man sich nur erst mit dem Gegenstande auf dem nächst liegenden Wege hinreichend bekannt gemacht hat.

Abb. 126 zeigt den Grundriß der Zimmermannschen Kuppel in etwas verallgemeinerter Darstellung. Auf den Aufriß kommt es vorläufig nicht an, wenn man nur beachtet, daß die Kuppel aus zwei Stockwerken besteht, daß ferner der Fußring und der mittlere Ring achteckig sind, während der Nabelring quadratisch gestaltet ist. Die 12 Knotenpunkte der beiden oberen Ringe werden, wie man durch Abzählen findet, gegen den zur festen Erde gehörigen Fußring durch 36 Stäbe abgestützt. Das Stabgerüst ist daher statisch bestimmt. Daß kein Ausnahmefall vorliegt, schließt man, wie gewöhnlich, aus der weiterhin folgenden statischen Berechnung.

Der in Abb. 126 mit X bezeichnete Knotenpunkt des

Nabelringes möge eine beliebig gegebene Last P tragen, während alle übrigen Knotenpunkte unbelastet sind. Man soll die zu dieser Belastung gehörigen Stabspannungen berechnen.

Zu diesem Zwecke denke man sich irgend zwei passend ausgewählte Stäbe, die in der Abbildung mit X und Y bezeichnet sind, durchschnitten und die in ihnen auftretenden, vorläufig unbekannten Spannungen durch äußere Kräfte, die an den Endknotenpunkten als Lasten anzubringen sind, ersetzt. Dadurch kann an dem Gleichgewichtszustande des ganzen Verbandes nichts geändert werden, falls nur vorausgesetzt wird, daß die Spannungen X und Y passend gewählt wurden.

Hierauf beginne man mit dem Zeichnen der Kräftepläne für den nach Wegnahme der beiden Stäbe verbliebenen Kuppelrest. Daß man die wahren Größen der Stabspannungen X und Y und der ihnen an dem Kuppelreste entsprechenden Lasten noch nicht kennt, stört dabei nicht viel, indem man sich des schon bei der Berechnung der Netzwerkkuppel in § 43 benutzten Mittels bedienen kann, den Maßstab des Kräfteplanes einstweilen unbestimmt zu lassen, so daß man die erste Kraft, die man beim Zeichnen des Kräfteplanes aufzutragen hat, durch eine beliebig lange Strecke zur Darstellung bringen kann.

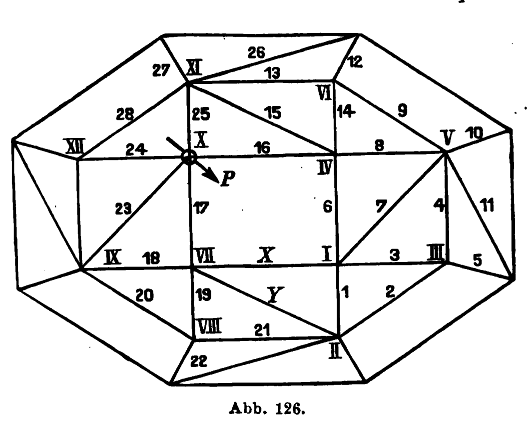


Abb. 126.

Freilich kommen hier zwei Lasten, X und Y, vor, die man beide noch nicht kennt und deren Verhältnis ebenfalls unbekannt ist. Man kann daher nicht beide in denselben Kräfteplan eintragen. Dagegen steht nichts im Wege, zuerst nur X am Kuppelreste anzubringen und hierfür einen Kräfte-

plan in unbestimmt gelassenem Maßstabe zu zeichnen und hierauf mit Y ebenso zu verfahren, wobei der dazu gehörige Kräfteplan in irgend einem andern unbestimmt gelassenen Maßstabe aufzutragen ist. Sei nun etwa 1 mm $= m$ kg der Maßstab des ersten und 1 mm $= n$ kg der Maßstab des zweiten Kräfteplanes, so ist die in irgend einem Stabe i durch das Zusammenwirken beider Lasten hervorgerufene Stabspannung S_i

$$S_i \doteq m x_i + n y_i,$$

wenn mit x_i und y_i die aus beiden Kräfteplänen zu entnehmenden Spannungen bezeichnet werden, die dem Stabe i entsprechen. Es kommt also dann nur noch darauf an, nachträglich die beiden Unbekannten m und n zu ermitteln, um die Aufgabe vollständig zu lösen. Hierbei ist zu beachten, daß m und n sowohl positive als negative Größen sein können; denn beim Zeichnen beider Kräftepläne setzt man einstweilen voraus, daß X und Y Zugspannungen seien. Ist aber eine von ihnen in Wirklichkeit eine Druckspannung, so sind nachträglich noch alle Vorzeichen in dem betreffenden Kräfteplane umzukehren, was dadurch geschieht, daß man m oder n einen negativen Wert beilegt.

Nachdem man beide Kräftepläne vollständig durchgeführt hat, ergeben sich am Schlusse von selbst die Bedingungen, denen die Unbekannten m und n genügen müssen und aus denen sie sich berechnen lassen. Ist man nämlich zum belasteten Knotenpunkte gelangt, so findet man, daß dort in jedem der beiden Kräftepläne nur noch zwei Stabspannungen nicht vertreten sind. Man zerlegt daher die Resultierende der übrigen Spannungen nach diesen beiden Richtungslinien und nach der Richtungslinie der gegebenen Last P. Bezeichnet man die in die Richtung von P fallenden Kräfte in beiden Kräfteplänen mit P_x und P_y, so muß

$$P = m P_x + n P_y$$

sein und hiermit hat man schon eine der beiden Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten m und n.

Die zweite ergibt sich, nachdem man zum letzten Knoten-

punkte (XII in Abb. 126) gelangt ist. Dort sind die Spannungen 24 und 28 in beiden Kräfteplänen schon vertreten. Da aber an diesem Knotenpunkte nur vier Stäbe angreifen, muß die Resultierende aus den Spannungen S_{24} und S_{28} in die Schnittlinie der durch sie und der durch die beiden andern Stäbe gelegten Ebenen fallen. Hiernach kann das Verhältnis beider Stabspannungen durch Zeichnen eines Kräftedreieckes ermittelt werden. Bezeichnet man dieses Verhältnis mit α, so lautet die zweite Bedingungsgleichung, der m und n genügen müssen,

$$\frac{S_{24}}{S_{28}} = \frac{m x_{24} + n y_{24}}{m x_{28} + n y_{28}} = \alpha.$$

Die Auflösung beider Bedingungsgleichungen liefert m und n nach Größe und Vorzeichen.

Die Bezeichnungen in Abb. 126 sind so gewählt, daß die Aufeinanderfolge der Stabnummern zugleich angibt, in welcher Reihenfolge die zugehörigen Stabspannungen in den Kräfteplänen X und Y gefunden werden.

In Abb. 126 war der bequemeren Übersicht wegen vorausgesetzt, daß die Seitenflächen des unteren Kuppelgeschosses ebenfalls in geneigten Ebenen liegen sollten. Dadurch sollte vermieden werden, daß sich im Grundrisse einzelne Stabprojektionen übereinander deckten. Bei der einzigen bisher — im Reichstagshause — ausgeführten Zimmermannschen Kuppel liegen die Seitenflächen des unteren Kuppelgeschosses in lotrechten Ebenen. Dadurch ändert sich aber nichts im Gange der Untersuchung; die Ausführung der Zeichnung wird dadurch nur noch etwas erleichtert.

In den Abb. 127 bis 133 (S. 326) ist die ganze Kräftezerlegung für das wirklich zur Ausführung gebrachte Stabgerüst im Maßstabe durchgeführt. Die Zeichnung wurde zuerst in größerem (etwa doppelt so großem) Maßstabe aufgetragen und dann auf das hier zur Verfügung stehende Format verkleinert.

Abb. 127[a] und 127[b] stellen die Kuppel in Aufriß und Grundriß dar; die Bezeichnungen sind hier etwas anders gewählt, als in Abb. 126. Im Aufrisse sind die nach hinten zu

liegenden Stäbe durch stark gestrichelte Linien dargestellt. Als Stab X ist der Diagonalstab 11, als Stab Y der Nabelringstab 3 ausgewählt. Knotenpunkt I trägt eine lotrecht gerichtete Last von 1000 kg.

In die Risse der Kuppel sind auch alle Schnittlinien von Ebenen eingetragen, die man bei den nach dem Culmannschen Verfahren vorgenommenen Kräftezerlegungen nötig hatte. Dagegen sind die Hülfslinien, die zur Ermittelung dieser Ebenenschnittlinien dienten, in der Zeichnung weggelassen worden. Jene Schnittlinien, die man zum Auftragen des Kräfteplanes X braucht, sind als feine Linien durchgezogen, die zum Kräfteplan Y gehörigen sind fein punktiert angegeben; wo zwei davon zusammenfallen, steht eine durchgezogene Linie. Sowohl in der Kuppelfigur als in den Kräfteplänen sind die Ebenenschnittlinien mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, wobei zur besseren Unterscheidung den zum Kräfteplane Y gehörigen ein Strich beigesetzt wurde.

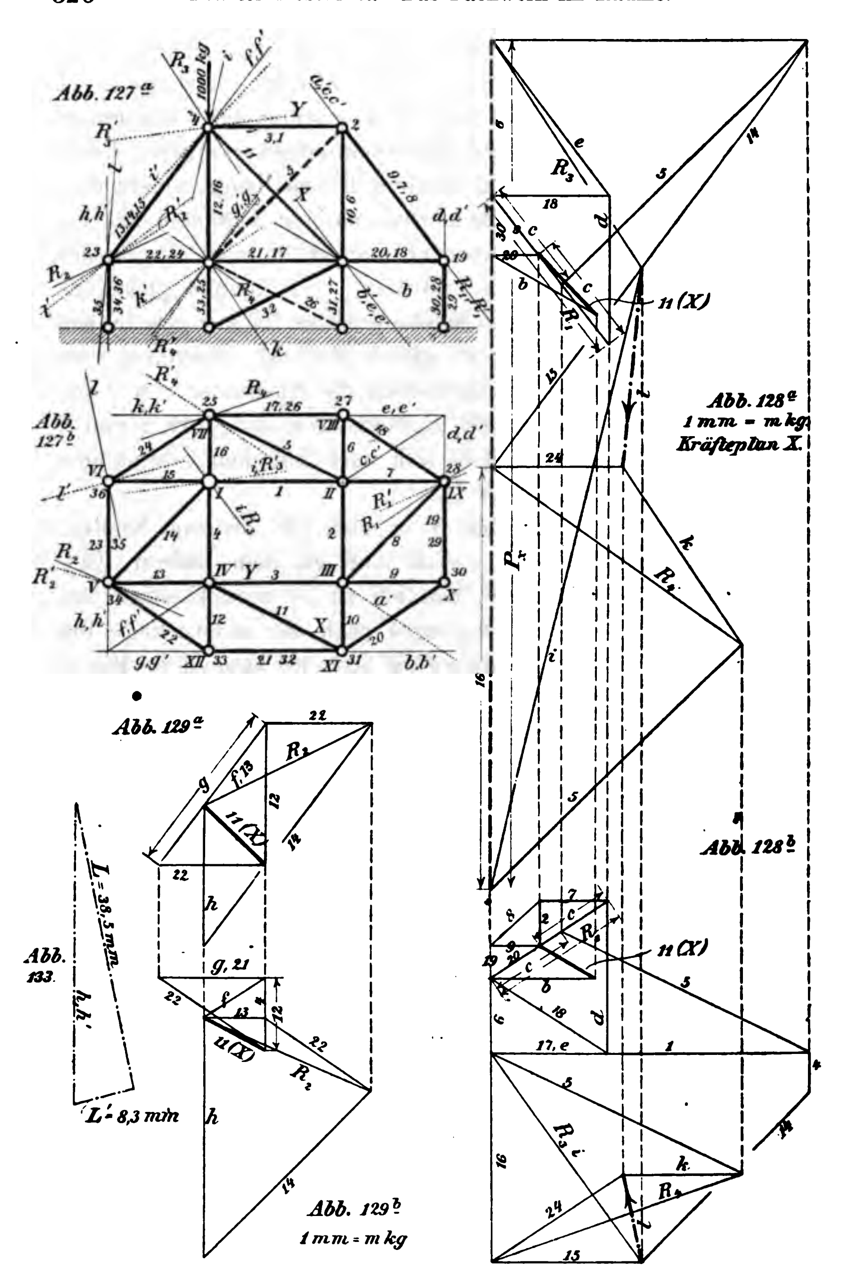
Zuerst wurde der Kräfteplan X in Abb. 128 aufgetragen. Er wurde mit der in beliebiger Größe gewählten Strecke X begonnen. Aus der Betrachtung des Knotenpunktes III erkennt man zunächst, daß Stab 10 in diesem Kräfteplane spannungslos ist, da die drei übrigen Stäbe 2, 8, 9 in einer Ebene liegen. Am Knotenpunkte XI greifen daher, außer X, das vorläufig als Zugspannung vorausgesetzt wird, nur noch die Stabspannungen 20, 21, 32 und 31 an, von denen aber die drei letztgenannten in einer Ebene liegen. Man ermittelt die Schnittlinie b dieser Ebene mit der durch X und 20 gelegten Ebene und zerlegt im Kräfteplane X nach b und 20. Damit hat man das erste Kräftedreieck im Kräfteplane X. Dann geht man zum Knotenpunkte X über. Hier kann man 20 ohne weiteres nach 9, 19 und 30 zerlegen (die Diagonale 29 geht so wie in Abb. 128 die dort mit 11 bezeichnete Diagonale, greift also hier an Knotenpunkt IX an).

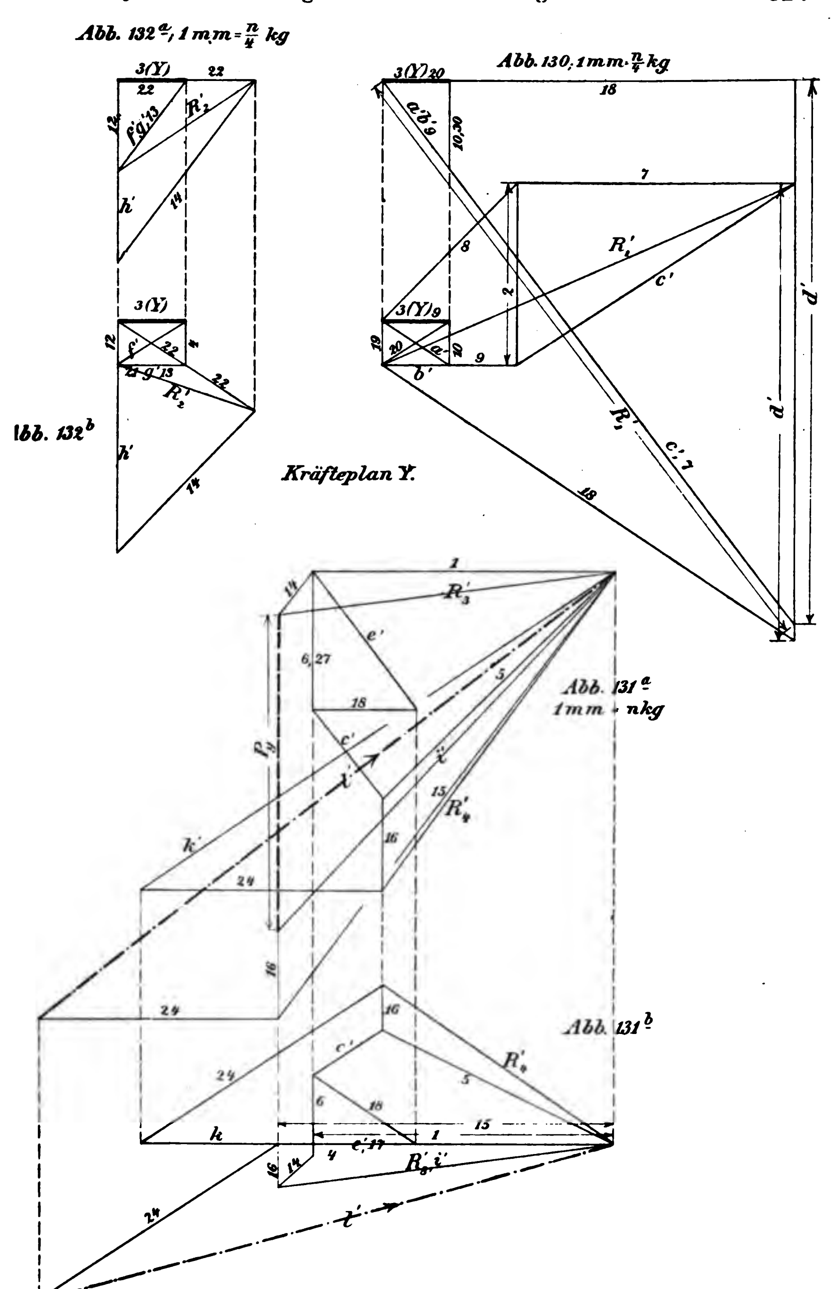
Es wird genügen, wenn ich hier nur die Reihenfolge der Knotenpunkte anführe, an denen sich dann die weiteren Kräftezerlegungen abspielen; es sind dies, mit Einschluß der schon

angeführten, die Knotenpunkte III, XI, X, III, II, IX, VIII, II, I, VII, VI. Wo hier eine Ziffer zweimal vorkommt, ist dies dahin zu deuten, daß man beim erstmaligen Vorkommen noch nicht alle zugehörigen Stabspannungen ermitteln kann, sondern jene, die unter sich in einer Ebene liegen, einstweilen unbestimmt lassen muß. Beim zweitmaligen Auftreten des betreffenden Knotenpunktes vermag man dann auch die vorher unbestimmt gelassenen zu ermitteln. So konnte gleich zu Anfang bei Betrachtung des Knotenpunktes III nur geschlossen werden, daß die Spannung 10 gleich Null ist. Nachdem man aber aus Knotenpunkt X inzwischen die Spannung von 9 gefunden hat, kann man zu III zurückkehren und dort 2 und 8 ermitteln. Geradeso verhält es sich auch mit dem zweimaligen Auftreten von Knotenpunkt II.

Nachdem der Kräfteplan X in Abb. 128 bis zum Knotenpunkte VI fortgeführt ist, muß man zu dem andern Endknotenpunkte des Stabes X, nämlich zu IV zurückkehren und von dort aus die Kräftezerlegungen nach der andern Seite hin weiterführen. Diese Fortsetzung ist in einer besonderen Figur, Abb. 129, dargestellt. Man zerlegt erst X im Knotenpunkte IV nach 4, 13, 12 und geht von da zu den Knotenpunkten XII und V weiter.

Hiermit ist der erste Teil der Aufgabe erledigt. Der zweite Teil besteht in dem Auftragen des Kräfteplanes Y, wobei man ganz ähnlich wie vorher verfährt. Der Deutlichkeit wegen ist jedoch dieser Kräfteplan in 3 Teile, Abb. 130, 131 und 132 auseinander gezogen, von denen die beiden ersten Teile zusammen genommen der Abb. 128 des vorigen Kräfteplanes entsprechen, während sich Abb. 132 auf dieselben Knotenpunkte wie vorher Abb. 129 bezieht. Begonnen wurde mit Abb. 130, bei der sich Aufriß und Grundriß der Platzersparnis wegen zum Teil überdecken. Die in beliebiger Größe aufgetragene und zunächst als Zugspannung vorausgesetzte Spannung Y wird am Knotenpunkte III nach 10 und der Ebenenschnittlinie a' zerlegt. Dann folgt am Knotenpunkte XI die Zerlegung von 10 nach 20 und der Ebenenschnittlinie b'.


Abb. 127ª
Abb. 127ᵇ
Abb. 128ª
1 mm = m kg
Kräfteplan X.
Abb. 128ᵇ
Abb. 129ª
Abb. 129ᵇ
1 mm = m kg
Abb. 133.
L = 38,5 mm
L' = 8,3 mm
1000 kg


Abb. 132ª; 1 mm = n/4 kg
Abb. 132ᵇ
Abb. 130; 1 mm = n/4 kg
Kräfteplan Y.
Abb. 131ª
1 mm = n kg
Abb. 131ᵇ

Im ganzen kommen in Abb. 130 die Kraftecke für die Knotenpunkte in der Reihenfolge III, XI, X, III, II, IX vor. Man sieht, daß diese Reihenfolge genau mit der schon beim Kräfteplane X eingehaltenen übereinstimmt.

Am Knotenpunkte IX hat man, wie noch beispielsweise erwähnt werden mag, zuerst die schon vorher ermittelten Spannungen 19, 8, 7, die alle drei Zugspannungen sind, zu einer Resultierenden R_1' zusammenzufassen, deren Richtungslinie in die Kuppelzeichnung einzutragen, hierauf durch sie und 18 eine Ebene zu legen, deren Schnittlinie mit der durch 19 und 29 gehenden Lotebene mit d' bezeichnet ist, und nach diesen Vorbereitungen R_1' nach 18 und d' im Kräfteplane zu zerlegen. Stab 18 erfährt hiernach eine Druckspannung.

Die Stabspannung 18 wird in Abb. 130 schon durch eine verhältnismäßig große Strecke dargestellt. Wollte man in derselben Weise fortfahren, so würde man, da die folgenden Spannungen noch größer ausfallen, in Abb. 130 bald mit dem Platze nicht mehr ausreichen. Deshalb ist die weitere Fortsetzung des Kräfteplanes in Abb 131 in $^1/_4$ der vorhergehenden Größe gezeichnet. Abb. 131 umfaßt in diesem neuen Maßstabe die Kraftecke für die Knotenpunkte VIII, II, I, VII, VI in der angegebenen Reihenfolge, wobei dem Knotenpunkte VIII das Dreieck aus 18, 6 und der Ebenenschnittlinie e' entspricht. Der Maßstab für Abb. 131 sei 1 mm $= n$ kg; dann ist der Maßstab für Abb. 130 1 mm $= \frac{n}{4}$ kg.

Schließlich gibt noch Abb. 132 den Kräfteplan für die nach der andern Seite hin liegenden Knotenpunkte IV, XII und V an. Dieser ist in demselben Maßstabe wie Abb. 130 aufgetragen, also so, daß 1 mm $= \frac{n}{4}$ kg bedeutet.

Nun kommt der dritte Teil des Verfahrens. Man entnimmt aus den Kräfteplänen X und Y die Resultierenden aus den Stabspannungen 15 und 24 am Knotenpunkte VI. Diese sind in den Abbildungen durch strichpunktierte Linien dargestellt und mit l und l' bezeichnet. Auch die Pfeile dieser

Resultierenden sind mit einzutragen, so wie sie sich aus den zuvor festgestellten Pfeilen der Stabspannungen ergeben. Andererseits weiß man aber, daß die Resultierende jener Stabspannungen 15 und 24, die in Wirklichkeit zustande kommen, in die mit hh' bezeichnete Ebenenschnittlinie am Knotenpunkte VI fallen muß. Man kann daher das in Abb. 133 im Grundrisse gezeichnete Kräftedreieck auftragen, von dem eine Seite in die Richtung hh' fällt, während die beiden andern Seiten parallel zu l und l' gezogen sind. Auf die Größe dieses Kräftedreieckes kommt es nicht an, da man mit seiner Hülfe nur das Verhältnis der beiden zuletzt genannten Seiten ermitteln will. Diese Seiten sind in Abb. 133 mit L und L' bezeichnet und man mißt aus ihnen die Strecken $L = 38{,}5$ und $L' = 8{,}3$ ab, wobei es aber nur auf das Verhältnis

$$\frac{L'}{L} = \frac{8{,}3}{38{,}5} = 0{,}2155$$

ankommt. Zugleich erkennt man aber, daß die Pfeile der durch L und L' dargestellten Kräfte, die in dem Kräftedreiecke aufeinanderfolgen müssen, entweder beide mit den in den Kräfteplänen X und Y festgestellten Pfeilen von l und l' übereinstimmen oder ihnen beide entgegengesetzt sein müssen. Der Anteil L der Resultierenden aus 15 und 24 muß nun aus dem im Spannungsbilde X vorkommenden l und der Anteil L aus dem zu Y gehörigen l' unter Berücksichtigung der verschiedenen Maßstäbe gebildet werden. Dabei brauchen wir uns nur um die Grundrisse dieser Strecken zu kümmern, da auch schon Abb. 133 einen Grundriß darstellte. Im Grundrisse findet man nun durch Nachmessen in Abb. 128ᵇ $l = 11{,}9$ mm und aus Abb. 131ᵇ $l' = 78{,}6$ mm. Hiernach erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{78{,}6 \cdot n}{11{,}9 \cdot m} = \frac{L'}{L} = 0{,}2155,$$

womit zunächst wenigstens das Verhältnis beider Kräftemaßstäbe bekannt ist.

Die zweite Bedingungsgleichung folgt aus den Kraftecken für den mit der Last von 1000 kg behafteten Knotenpunkt I.

Diese Kraftecke setzen sich in den Aufrissen beider Pläne aus den Spannungen der Stäbe 1, 14, 15, 16 und den Strecken P_x bezw. P_y zusammen. Die Stabspannung 4 fehlt, da sie senkrecht zur Aufrißebene steht. Der Pfeil von P_x ergibt sich senkrecht nach abwärts, der von P_y dagegen senkrecht nach oben hin. Durch Ausmessen beider Strecken erhält man

$$P_x = +\,112{,}1 \text{ mm} \quad ; \quad P_y = -\,41{,}7 \text{ mm}.$$

Die Bedingungsgleichung lautet

$$P_x \cdot m + P_y \cdot n = 1000 \text{ kg}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$112{,}1 \cdot m - 41{,}7 \cdot n = 1000$$

und durch Auflösung dieser Gleichung in Verbindung mit der vorher aufgestellten erhält man für die bis dahin unbekannten Kräftemaßstäbe

$$m = 9{,}04 \text{ kg} \quad ; \quad n = 0{,}3 \text{ kg}.$$

Beide Zahlen ergeben sich als positiv und dies sagt aus, daß die von vornherein als Zugspannungen angenommenen Spannungen X und Y der Stäbe 3 und 11 auch in Wirklichkeit Zugspannungen sind. Eine Umkehrung der Pfeile in einem oder in beiden Kräfteplänen ist daher im vorliegenden Falle nicht mehr erforderlich. Man findet jetzt die Spannung S_i irgend eines Stabes i aus den beiden Spannungsanteilen x_i und y_i, die in den Kräfteplänen X und Y vorkommen, nach der schon zuvor aufgestellten Formel

$$S_i = m x_i + n y_i.$$

Die Aufgabe ist also hiermit vollständig gelöst.

Um ein Urteil über die Genauigkeit des graphischen Verfahrens im vorliegenden Falle zu erlangen, ließ ich, nachdem alle Stabspannungen auf Grund der im größeren Maßstabe ausgeführten Zeichnung ermittelt waren, dieselben Spannungen außerdem auch noch nach den Zimmermannschen Formeln berechnen. Dabei ergab sich in Kilogramm für die

Spannung des Stabes	1	2	3	4
durch Rechnung . .	− 368,5	+ 53,8	+ 0,6	− 48,0
graphisch	− 367,9	− 52,2	+ 0,7	− 48,1
Spannung des Stabes	5	6	7	8
durch Rechnung . .	+ 427,0	− 200,0	− 135,2	− 103,4
graphisch	+ 426,1	− 198,5	− 132,5	− 101,2
Spannung des Stabes	9	10	11	12
durch Rechnung . .	+ 88,4	− 1,7	+ 108,0	− 188,0
graphisch	+ 89,0	− 1,0	+ 107,2	− 189,0
Spannung des Stabes	13	14	15	16
durch Rechnung . .	+ 124,8	− 392,0	− 277,0	− 568,0
graphisch	+ 121,5	− 393,5	− 276,7	− 568,0
Spannung des Stabes	17	18	19	20
durch Rechnung . .	+ 134,4	+ 161,2	− 35,5	− 63,9
graphisch	+ 134,4	+ 158,0	− 36,0	− 64,8
Spannung des Stabes	21	22	23	24
durch Rechnung . .	+ 126,3	+ 151,8	+ 111,0	+ 200,0
graphisch	+ 126,6	+ 151,6	+ 114,5	+ 201,5.

Man erkennt aus dem Vergleiche, daß die auf dem angegebenen Wege durch einen geübten Zeichner gefundenen Werte eine für praktische Zwecke mehr als ausreichende Genauigkeit gewähren.

Mit den fertig ausgerechnet vorliegenden Zimmermannschen Formeln kommt man freilich für jene Anordnung, auf die sich diese beziehen, schneller zum Ziele, als mit der Zeichnung. Die Zeichnung liefert aber die Lösung ebenso schnell auch für andere Fälle, die durch die Zimmermannschen Formeln nicht mehr umfaßt werden.

Ich komme jetzt noch einmal auf die schon im Eingange gemachte Bemerkung zurück, daß sich das hier eingeschlagene Verfahren von dem Stabvertauschungsverfahren nur unerheblich unterscheidet. Auch nach dem Stabvertauschungsverfahren nimmt man zuerst zwei Stäbe X und Y heraus, genau so wie es hier geschehen war. Als Ersatzstäbe wähle man hierauf

einen von der festen Erde nach dem belasteten Knotenpunkte (X in Abb. 126) in der Richtung der Last P geführten Stab und einen Stab, der auch von der festen Erde nach dem Knotenpunkte XII in Abb. 126, etwa in der Ebene der Stäbe 24 und 28 geführt ist. In dem so erhaltenen einfachen Fachwerke nimmt nur der erste Ersatzstab die Last P auf, alle übrigen Stäbe sind spannungslos. Nun bringt man die Spannungen X und Y als äußere Lasten an dem einfachen Fachwerke an und zeichnet die zugehörigen Kräftepläne X und Y, die genau mit den vorher konstruierten übereinstimmen. Zuletzt sind X und Y so zu wählen, daß die Spannungen in den Ersatzstäben verschwinden. Aber auch diese beiden Bedingungen stimmen genau mit jenen überein, die vorher zur Ermittelung der unbekannten Maßstäbe m und n benutzt wurden.

Man sieht daher, daß das hier angewendete Verfahren und das Stabvertauschungsverfahren im Grunde genommen auf dasselbe hinauskommen. Nur die Überlegung, die zur Lösung führt, stellt sich ein klein wenig anders dar, während sich an den Kräfteplänen nichts ändert.

Nun sagte ich vorher, daß das hier gewählte Verfahren in manchen Fällen einen gewissen Vorteil gegenüber dem Stabvertauschungsverfahren biete. Der Vorteil besteht nur darin, daß man sich nicht vorher zu überlegen braucht, wie die Stabvertauschung vorzunehmen ist, um auf ein Fachwerk zu kommen, für das sich ohne weiteres ein Kräfteplan zeichnen läßt. Man kann vielmehr irgend zwei passend gewählte, benachbarte Stäbe herausnehmen und findet während des Zeichnens der Kräftepläne von selbst, wie die Ersatzstäbe zu wählen sind oder anstatt dessen, welche Bedingungen von den Stabspannungen X und Y erfüllt werden müssen.

Schließlich bemerke ich noch, daß Müller-Breslau in der schon vorher angeführten Abhandlung darauf aufmerksam gemacht hat, daß die ganze Betrachtung dadurch vereinfacht werden kann, daß man nicht nur zwei Stabvertauschungen vornimmt (was in diesem Falle die geringste Zahl ist), sondern mehr. Bei der Zimmermannschen Kuppel nimmt er vier Stab-

vertauschungen vor, indem er alle vier Stäbe des Nabelringes heraus nimmt und dafür passend gewählte Ersatzstäbe einführt. Dadurch lassen sich die Kräftezerlegungen in der Tat erheblich vereinfachen, obschon man jetzt 5 Kräftepläne nötig hat, die aber von ganz einfacher Art sind. Freilich muß man nachher noch 4 Bedingungsgleichungen nach den unbekannten Spannungen der Nabelringstäbe auflösen. Der dadurch bedingte Mehraufwand an Rechenarbeit schließt aber nicht aus, daß man im ganzen doch schneller zum Ziele gelangen kann, als bei nur zwei Stabvertauschungen. — Auf diese praktischen Vorteile weiter einzugehen, hätte hier keinen Zweck.

Aufgaben.

31. Aufgabe. Der in Abb. 134 dargestellte, (nach einer Ausführung in der Markthalle zu Leipzig als „Leipziger Kuppel" bezeichnete) räumliche Fachwerkträger wird an dem durch einen kleinen schwarzen Kreis im Grundrisse hervorgehobenen Knotenpunkte durch die beliebig gerichtete Last P belastet; man soll die Stabspannungen ermitteln.

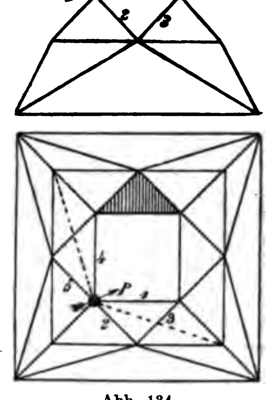


Abb. 134.

Lösung. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß diese Kuppel aus der Schwedlerschen dadurch hervorgeht, daß die Stäbe des zweiten Ringes durch einen in ihrer Mitte liegenden Knotenpunkt unterbrochen sind, nach dem die Diagonalen hingeführt werden. Man gewinnt durch diese Zwischenschaltung noch einen weiteren Punkt auf jeder Kuppelseite, der unverschieblich fest gehalten ist und der als Stützpunkt für die Auflagerung der Dachhaut verwendet werden kann. Eine solche Einschaltung neuer Knotenpunkte ist für den Konstrukteur oft sehr wertvoll.

Ferner überzeugen wir uns durch Abzählen der Knotenpunkte und Stäbe, daß der Träger statisch bestimmt ist. Auf jedem Sparrenzuge kommen 2 freie Knotenpunkte vor und mit den im zweiten Ringe eingeschalteten haben wir daher im ganzen 12 Knotenpunkte, zu deren Verbindung mit der festen Erde 36 Stäbe er-

forderlich sind. So viele sind aber auch vorhanden, nämlich 4 im inneren Ringe, 8 im zweiten Ringe, 8 Sparrenstäbe und 16 Diagonalstäbe, im ganzen 36.

Hierauf suchen wir die bei dem gegebenen Belastungsfalle spannungslos bleibenden Stäbe auf. Dazu bedarf es hier einer etwas andern Überlegung als in früheren Fällen*) und gerade, um diese ebenfalls noch vorzuführen, habe ich das Beispiel aufgenommen.

Man betrachte das im Grundrisse der Abb. 134 durch eine Schraffierung hervorgehobene Stabdreieck. Wir wollen uns dieses Dreieck aus dem ganzen Verbande losgelöst denken, indem wir alle nicht dazu gehörigen, von den drei Ecken ausgehenden Stäbe wegschneiden und dafür deren Stabspannungen als äußere Kräfte an diesen Ecken anbringen. Diese äußeren Kräfte müssen dann ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden. Nun liegen aber an jeder Ecke die dort weggeschnittenen Stäbe unter sich in einer Ebene. Denken wir uns also deren Spannungen zu einer Resultierenden vereinigt, so muß diese auch in derselben Ebene enthalten sein. Andererseits muß aber die Resultierende auch in der Dreiecksebene liegen, da sie an dem betreffenden Knotenpunkte mit den Spannungen der beiden Dreiecksstäbe im Gleichgewichte steht. Die Resultierende kann also nur in die Schnittlinie der beiden Ebenen fallen und damit kennen wir sofort die Richtungslinien der äußeren Kräfte, die an den drei Ecken des Dreieckes anzubringen sind. Bei den zum inneren Ringe gehörigen beiden Knotenpunkten fallen diese Richtungslinien mit den Sparrenstäben zusammen und an dem zum zweiten Ringe gehörigen Knotenpunkte fällt die Richtungslinie der Resultierenden auf die Ringstäbe.

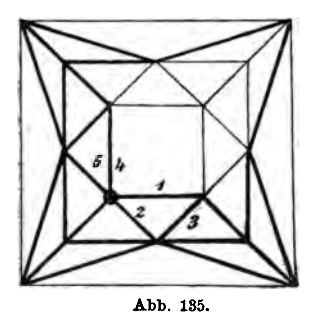


Abb. 135.

Diese drei Richtungslinien liegen in einer Ebene; sie schneiden sich aber nicht in einem Punkte. Damit Gleichgewicht zwischen den drei Resultierenden möglich sei, müssen sie daher alle drei gleich Null sein. Demnach sind auch die zu dem Dreiecke selbst gehörigen Stäbe spannungslos.

Dieselbe Betrachtung kann auch noch für das sonst ebenso liegende Dreieck auf der nach rechts hin anstoßenden Kuppelseite

*) Mit Hülfe des Verfahrens der Stabvertauschung kommt man freilich auch hier ohne jede neue Überlegung zum Ziele. Das im Texte angegebene Verfahren ist aber viel einfacher.

durchgeführt werden und auch für die zwischen beiden Kuppelseiten liegenden Stäbe findet man hierauf leicht, daß sie spannungslos sind. Das Ergebnis dieser Betrachtungen ist in Abb. 135 zusammengestellt, in der die spannungslosen Stäbe durch feine, die in Spannung versetzten durch starke Striche kenntlich gemacht sind.

Wir betrachten ferner das an den belasteten Knotenpunkt anstoßende und dem schraffierten gegenüberliegende Dreieck 1, 2, 3 in Abb. 134 und stellen dafür die gleiche Betrachtung an. Diese führt nur an dem belasteten Knotenpunkte zu einem andern Ergebnisse. Denn da hier zu den Spannungen der weggeschnittenen Stäbe noch die Last P als äußere Kraft hinzutritt, kann die Resultierende aus den äußeren Kräften vorerst jede beliebige Richtung haben. Dagegen muß die Resultierende der Spannungen der weggeschnittenen Stäbe an dem Knotenpunkte, in dem 1 und 3 aneinander stoßen, immer noch in die Richtung des Sparrenstabes und die Resultierende an dem Knotenpunkte, in dem 2 und 3 zusammenstoßen, in die Richtung des Ringes fallen. Suchen wir den Schnittunkt dieser beiden Richtungslinien auf und verbinden ihn mit dem belasteten Knotenpunkte durch die punktiert angegebene Linie, so finden wir damit auch die vorher unbestimmt gelassene Richtungslinie der Resultierenden der äußeren Kräfte an der dritten Ecke des Dreieckes. Mit dieser Richtungslinie muß auch die Resultierende der Stabspannungen 1 und 2 an dem belasteten Knotenpunkte zusammenfallen.

Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für die andere, an den belasteten Knotenpunkt anstoßende Kuppelseite durchführen und man findet so, daß die Resultierende der Stabspannungen 4 und 5 am belasteten Knotenpunkte in die auf dieser Seite angegebene punktierte Linie fallen muß.

Hiermit sind wir aber in den Stand gesetzt, ohne weiteres die Kräftezerlegungen vornehmen zu können, die zu den Stabspannungen führen. Denn von den fünf Stabspannungen am belasteten Knotenpunkte haben wir 1 mit 2 und ebenso 4 mit 5 in zwei Resultierende von bekannten Richtungslinien zusammengefaßt, so daß wir nur noch nötig haben, P nach diesen beiden Richtungslinien und nach der damit nicht in derselben Ebene liegenden Richtung des Sparrenstabes zu zerlegen. Die Zerlegung wird noch durch die Bemerkung vereinfacht, daß sich das windschiefe Kräfteviereck im Aufrisse als Dreieck projiziert, da sich zwei der Richtungslinien im Aufrisse überdecken. Nachdem die Projektionen des Viereckes gezeichnet sind, findet man auch die Stabspannungen 1 und 2, sowie 4 und 5, indem man ihre Resultierenden nach den Stabrichtungen zerlegt.

Vom belasteten Knotenpunkte kann man dann zu den übrigen fortschreiten und findet auch bei diesen die Stabspannnngen durch einfache Zerlegungen nach drei Richtungen im Raume oder nach zwei Richtungen in der Ebene. Da alle diese Zerlegungen keinerlei Schwierigkeiten macheu, sehe ich davon ab, die Kräftepläne hier mit aufzunehmen.

Sechster Abschnitt.

Die elastische Formänderung des Fachwerkes und das statisch unbestimmte Fachwerk.

---

§ 46. Methode von Maxwell und Mohr.

Wir betrachten zunächst einen statisch bestimmten Fachwerkträger, nehmen an, daß er irgendwie belastet werde und stellen uns die Aufgabe, die Verschiebung zu berechnen, die ein beliebig ausgewählter Knotenpunkt infolge der elastischen Formänderung erfährt. Es ist dabei eigentlich gleichgültig, ob es sich um ein ebenes oder um ein räumliches Fachwerk handelt. Da man bei allen Lehren, die neu an den Lernenden herantreten, vorerst immer nur die einfachsten Beispiele zugrunde legen soll, möge aber in diesem Abschnitte in erster Linie immer nur vom ebenen Fachwerke die Rede sein. Der Leser tut jedoch gut, sich gelegentlich immer wieder Rechenschaft davon zu geben, daß diese Ausführungen in allen wesentlichen Punkten auch für das räumliche Fachwerk gültig bleiben.

Bei einem steifen Stabverbande sind Gestaltänderungen, die sich in den Verschiebungen der Knotenpunkte zu erkennen geben, nur infolge der elastischen Längenänderungen der Stäbe möglich. Wir müssen daher zunächst diese berechnen. Da die Stabspannungen im statisch bestimmten Träger, die zu der gegebenen Belastung gehören, auf Grund der Lehren der vorhergehenden Abschnitte stets ermittelt werden können, vermag man auch die elastischen Längenänderungen der einzelnen

Stäbe stets ohne Schwierigkeit zu finden. Nach dem Elastizitätsgesetze ist

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{S}{EF},$$

wenn S die ganze vom Stabe aufzunehmende Spannung, F den Querschnitt, E den Elastizitätsmodul, l die Länge und Δl die elastische Längenänderung bedeuten. Die Gleichung gibt auch das Vorzeichen von Δl richtig an, wenn Zugspannungen durch positive Werte von S und Verlängerungen durch positive Werte von Δl ausgedrückt werden.

Für jeden Stab faßt man die drei konstanten und von vornherein gegebenen Werte von l, E und F am besten zu einer einzigen Konstanten zusammen, die mit r bezeichnet werden möge, indem man

$$r = \frac{l}{EF} \tag{59}$$

setzt. Hierbei beachte man, daß die in dieser Weise definierte Stabkonstante jedenfalls stets positiv sein muß, da weder l, noch E, noch F negativ werden können.

Mit Einführung dieser Bezeichnung erhält man einfacher

$$\Delta l = rS \tag{60}$$

und nachdem die Spannungen S durch einen Kräfteplan oder sonstwie ermittelt sind, kennt man hiermit auch die Werte der Δl für alle Stäbe.

Unsere Aufgabe kommt daher nun auf die folgende hinaus: Gegeben sind die elastischen Längenänderungen aller Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerkträgers; man soll die dadurch hervorgebrachte Verschiebung irgend eines Knotenpunktes berechnen.

Diese Aufgabe ist eine rein geometrische. Sie kam uns schon früher in nahezu gleicher Form bei der analytischen Untersuchung des Ausnahmefalles beim ebenen Fachwerke in § 37 vor. Damals war δl an Stelle von Δl geschriehen und vorausgesetzt, daß δl unendlich klein sei. Wie die δl zustande gekommen seien, war damals gleichgültig und im Grunde genommen ist es auch hier gleichgültig, wodurch die Δl ver-

anlaßt sind, da es sich jetzt nur darum handelt, die zu den irgendwie gegebenen Δl gehörigen Knotenpunktsverschiebungen zu berechnen. Da ferner die elastischen Längenänderungen Δl jedenfalls nur sehr kleine Größen im Vergleiche zu den ursprünglichen Stablängen und den Knotenpunktskoordinaten sind und daher näherungsweise auch als unendlich klein angesehen werden können, können wir sie geradezu an die Stelle der früher betrachteten δl setzen.

Zwischen den unbekannten Verschiebungskomponenten δx_i u. s. f. und den gegebenen δl bestehen, wie wir schon damals sahen, ebensoviele Gleichungen ersten Grades als Unbekannte. Gl. (50) S. 242 gibt eine dieser Gleichungen an und in den Gleichungen (51) ist das ganze System übersichtlich zusammengestellt. Analytisch gesprochen kommt hiernach die Lösung unserer Aufgabe auf die Auflösung des Gleichungssystemes (51) hinaus.

Der hiermit angegebene Weg zur Lösung der Aufgabe ist aber viel zu umständlich, als daß er für die praktische Anwendung brauchbar wäre. So wenig wie die Benutzung der Gleichungen (48) zur wirklichen Lösung des Spannungsproblems eignen sich die Gleichungen (51) zur Lösung des Verschiebungsproblems. Man muß sich vielmehr nach Hülfsmitteln umsehen, die das Ziel in einfacherer Weise zu erreichen gestatten.

Ein einfacher Weg zu diesem Ziele ist zuerst von Maxwell angegeben worden. Die sehr kurz gefaßte Abhandlung des großen Physikers über diesen Gegenstand, für den sich der Leserkreis physikalischer Zeitschriften damals sehr wenig interessierte, blieb aber ziemlich unbeachtet und jedenfalls fand die Methode zunächst gar keinen Eingang in die technische Praxis. Erst als Mohr denselben Weg von neuem selbständig aufgefunden hatte, gelangte er zur Kenntnis und zur Beachtung in technischen Kreisen.

Das Maxwell-Mohrsche Verfahren gründet sich auf die Anwendung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten. Um z. B. die Senkung x zu berechnen, die irgend ein Knotenpunkt in senkrechter Richtung unter dem Einflusse der ge-

gebenen Längenänderungen Δl der Stäbe erfährt, denke man sich an dem Knotenpunkte eine Last P in dieser Richtung willkürlich angebracht und berechne die Spannungen T, die von P in allen Stäben hervorgebracht werden. Dieser Belastungsfall und das ihm zugehörige Spannungsbild haben gar nichts mit jenem zu tun, das zu den Längenänderungen Δl und der dadurch veranlaßten Formänderung des Trägers führte. Man benutzt es vielmehr nur, um für jeden Knotenpunkt des Trägers ein System von Stabspannungen angeben zu können, die unter sich bezw. mit der Last P und den zu P gehörigen Auflagerkräften im Gleichgewichte stehen.

Auf dieses Gleichgewicht wird nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten angewendet. Erteilt man jedem Knotenpunkte eine beliebige (virtuelle) Verschiebung, so ist die Summe der Arbeiten aller sich an ihm im Gleichgewichte haltenden Kräfte gleich Null. Dabei steht es uns frei, als virtuelle Verschiebungen jene anzunehmen, die der Knotenpunkt bei der zu untersuchenden Formänderung in Wirklichkeit erfährt. Alle in dieser Weise für die einzelnen Knotenpunkte gebildeten Arbeitsgleichungen denken wir uns addiert; wir kommen dadurch auf eine einzige Gleichung, die ausspricht, daß die Gesamtsumme der Arbeiten aller zum Spannungsbilde P, T gehörigen Kräfte an sämtlichen Knotenpunkten für jede Gestaltänderung des Trägers und daher auch für jene, die wir untersuchen wollen, zu Null werden muß.

Diese Arbeitsgleichung wollen wir nun tatsächlich anschreiben. Zu ihrer Vereinfachung dient dabei die Bemerkung, daß jede Stabspannung zwei Glieder zur Gesamtsumme aller Arbeitsleistungen beiträgt, die sich auf einfache Weise zu einem einzigen vereinigen lassen. In Abb. 136 ist irgend ein Stab herausgezeichnet, der die Ordnungsnummer i haben möge. Wenn die Stabspannung T_i positiv ist, also eine Zugspannung bedeutet, haben die von dem Stabe auf seine Endpunkte übertragenen Kräfte die in der Abbildung an-

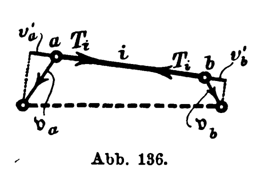


Abb. 136.

gegebenen Pfeilrichtungen. Man muß hierbei nämlich bedenken, daß es jetzt nicht auf die Kräfte ankommt, die auf den Stab übertragen werden, sondern auf jene, die von dem Stabe an dem Knotenpunkte ausgeübt werden und diese sind als Reaktionen jenen entgegengesetzt gerichtet.

Die Endknotenpunkte a und b des Stabes i mögen nun irgendwelche Wege $\mathfrak{v}_a$ und $\mathfrak{v}_b$ zurücklegen, die als unendlich klein gegenüber der Länge des Stabes angesehen werden können. Um die von T_i am Knotenpunkte a geleistete Arbeit zu berechnen, projizieren wir den Weg $\mathfrak{v}_a$ auf die Richtungslinie von T_i; die Arbeit ist dann gleich $-T_i \cdot v_a'$, also negativ, wenn v_a' in die Verlängerung des Stabes fällt. Das zugehörige Glied am Knotenpunkte b kann ebenso gebildet werden und im ganzen haben wir daher als Summe der Arbeitsleistungen der Stabspannung T_i an beiden Knotenpunkten

$$-T_i(v_a' + v_b').$$

Die in der Klammer stehende Summe hat aber eine einfache Bedeutung. Da nämlich die Knotenpunktswege als unendlich klein vorausgesetzt wurden, kann sich die Richtung des Stabes i nach Ausführung der Gestaltänderung des Trägers auch nur unendlich wenig von der ursprünglichen Richtung unterscheiden. Bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung genau, kann daher die Projektion des Stabes in der neuen Lage auf die ursprüngliche Richtung als ebenso groß angesehen werden, wie der Stab jetzt selbst geworden ist. Die Summe $v_a' + v_b'$ gibt demnach an, um wieviel sich der Stab bei der Gestaltänderung des Trägers verlängert hat, d. h. sie ist gleich der bei der Stellung der Aufgabe von vornherein gegebenen Längenänderung Δl_i. Für die Summe der zur Stabspannung T_i gehörigen Arbeitsleistungen hat man daher nun den einfachen, auf gegebene Größen zurückgeführten Ausdruck

$$-T_i \Delta l_i$$

und in der gleichen Form lassen sich auch alle übrigen, von den Stabspannungen herrührenden Glieder der Arbeitsgleichung paarweise zusammenfassen.

Es bleiben noch die Arbeitsbeträge der äußeren Kräfte aufzustellen. Als Last kam beim Spannungsbilde P, T nur P vor und der in die Richtung von P fallende Weg des Angriffspunktes von P bildet die vorher schon mit x bezeichnete Unbekannte, auf deren Berechnung es ankommt. Die Arbeit von P ist also gleich Px zu setzen. Die Auflagerkräfte endlich, die durch P hervorgerufen werden, leisten keine Arbeit, bei den festgehaltenen Auflagerpunkten deshalb nicht, weil der Weg gleich Null ist und bei den auf Auflagerbahnen geführten, weil der Weg senkrecht zur Richtung des Auflagerdruckes steht.

Die Arbeitsgleichung nimmt daher die einfache Form

$$Px - \Sigma T \Delta l = 0 \tag{61}$$

an, wobei Σ eine Summierung vorschreibt, die sich auf alle Stäbe des Trägers erstreckt. Setzt man noch für Δl seinen Wert aus Gl. (60) ein und löst nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{1}{P} \sum T \Delta l = \frac{1}{P} \sum r S T. \tag{62}$$

Die Ausrechnung der Summe erfolgt am besten in tabellarischer Form, wobei man die einzelnen Produkte mit Hülfe des Rechenschiebers ermittelt, da die hiermit zu erzielende Genauigkeit stets ausreicht.

Allerdings wird mit Hülfe von Gleichung (62) zunächst nur die Komponente der Verschiebung des ins Auge gefaßten Knotenpunktes in der vorher gewählten Richtung — also etwa senkrecht nach abwärts — gefunden. Es steht aber nichts im Wege, das Verfahren noch einmal zu wiederholen, indem man die Last P hierbei in horizontaler Richtung angreifen läßt. Auch zu diesem Belastungsfalle lassen sich die Stabspannungen T berechnen und nachdem dies geschehen ist, findet man auch die Verschiebungskomponente des Knotenpunktes in der zweiten Richtung durch nochmalige Anwendung von Gl. (62). Durch beide Verschiebungskomponenten wird dann die Gesamtverschiebung des Knotenpunktes nach Richtung und Größe vollständig bekannt.

Wenn man für eine größere Zahl von Knotenpunkten die Verschiebungen angeben soll, wird freilich die immer wieder von neuem erforderliche Durchführung der ganzen Rechnung sehr umständlich. Das Verfahren ist dann nicht mehr recht brauchbar und man ersetzt es besser durch ein anderes, das wir in einem der folgenden Paragraphen kennen lernen werden.

§ 47. Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

In Abb. 137 ist ein statisch bestimmter Träger gezeichnet, dessen Gestalt und Anordnung im übrigen jedoch ganz willkürlich ist. Irgend zwei Knotenpunkte *I* und *II* seien herausgegriffen und man denke sich zuerst den Träger im Knotenpunkte *I* durch die beliebig gerichtete Kraft Q belastet und später, nachdem die Last Q wieder entfernt ist, die in irgend einer Richtung gehende Last P am Knotenpunkte *II* aufgebracht. Die Spannungsbilder und die Formänderungen des Trägers sind in beiden Belastungsfällen sonst völlig voneinander verschieden. In einer Hinsicht besteht aber zwischen beiden Formänderungen eine sehr merkwürdige Übereinstimmung, die durch den von Maxwell zuerst aufgestellten Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen zum Ausdrucke gebracht wird.

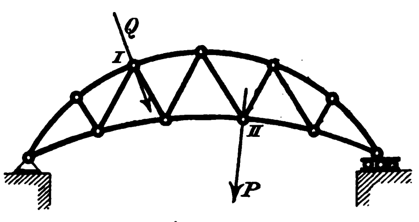


Abb. 137.

Wenn nämlich die Last Q am Knotenpunkte *I* angreift, verschiebt sich der Knotenpunkt *II* in irgend einer Richtung. Wir wollen uns aber jetzt nur um jene Komponente der Verschiebung von *II* kümmern, die in die für P gewählte Richtungslinie fällt: Diese wird durch die rechtwinklige Projektion des Verschiebungsweges von *II* auf die Richtungslinie von P angegeben. Ebenso wollen wir umgekehrt, wenn nur die Last P am Knotenpunkte *II* angreift, die Komponente der

Verschiebung des Knotenpunktes I in der für Q festgesetzten Richtung ins Auge fassen. Der Satz von Maxwell sagt nun aus, daß die beiden angegebenen Verschiebungen gleich groß sind, falls auch die Lasten P und Q von gleicher Größe sind.

Um den Satz zu beweisen, berechnen wir zunächst die Verschiebung von II in der Richtung von P unter dem Einflusse der Last Q nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode. Diese Methode schreibt vor, daß wir vor allem die Spannungen S berechnen, die von der Last Q in den Stäben des Trägers hervorgerufen werden und daß wir dann auch eine Kraft P am Knotenpunkte II in jener Richtung anbringen, für die wir die Verschiebung bestimmen wollen und die von dieser in den Stäben hervorgerufenen Spannungen T berechnen. Bezeichnen wir dann die gesuchte Verschiebung des Knotenpunktes II unter dem Einflusse der Last Q mit x, so finden wir, da alle Bezeichnungen in der gleichen Bedeutung wiederkehren, x einfach nach der Gleichung (62)

$$x = \frac{1}{P} \sum rST.$$

Ebenso können wir auch die Verschiebung y des Knotenpunktes I in der Richtung von Q unter dem Einflusse der Last P berechnen. Es ist dazu nicht nötig, nochmals neue Kräftepläne zu zeichnen. Denn die Stabspannungen S', die jetzt unter der Last P in Wirklichkeit zustande kommen, stimmen genau mit den Spannungen T überein, die zu der vorher nur willkürlich und in Gedanken aufgebrachten Last P berechnet wurden. Ebenso können wir die vorher wirklich vorhandene Last Q und das ihr zugehörige Spannungsbild S jetzt in demselben Sinne als willkürlich hinzugedachtes Spannungsbild gebrauchen, wie es nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren vorgeschrieben ist. Wir wollen dies dahin ausdrücken, daß die Spannungen T' — wie wir sie zur Herstellung einer Übereinstimmung mit der früher gebrauchten Bezeichnung nennen können — gleichbedeutend mit den Spannungen S des vorher betrachteten Belastungsfalles sind.

Die Anwendung von Gl. (62) auf die durch die Last P

verursachte Formänderung des Trägers liefert nun, wenn wir diese Übereinstimmungen beachten,

$$y = \frac{1}{Q} \sum r S' T' = \frac{1}{Q} \sum r T S.$$

Dabei zeigt sich, daß die in den Ausdrücken für x und y vorkommenden Summen einander gleich sind. Man hat daher

$$\frac{x}{y} = \frac{Q}{P} \tag{63}$$

oder, um auf die einfachste Form des Satzes zu kommen,

$$x = y \quad \text{für} \quad P = Q.$$

Die Leser des dritten Bandes wissen, daß der Satz nicht auf statisch bestimmte Fachwerkträger beschränkt ist, sondern für beliebig gestaltete Körper oder Systeme von Körpern gilt, die dem Hookeschen Gesetze von der Verhältnisgleichheit zwischen Formänderungen und Spannungen gehorchen. Es schien aber nützlich, hier einen von dem dort gegebenen ganz abweichenden Beweis des Satzes vorzuführen, der sich unmittelbar auf Fachwerkträger bezieht, weil in der Folge von dem Satze gerade in dieser Form noch ein wichtiger Gebrauch gemacht werden wird.

§ 48. Der Verschiebungsplan.

Die schon in § 46 behandelte Aufgabe, die Verschiebungen der Knotenpunkte eines Trägers zu ermitteln, die zu gegebenen Längenänderungen Δl der Fachwerkstäbe gehören, kann auch, wie zuerst der französische Ingenieur Williot zeigte, auf rein graphischem Wege gelöst werden. Die Lösung läßt sich auf die wiederholte Anwendung einer Konstruktion zurückführen, die selbst die Lösung einer einfacheren Aufgabe bildet, die sich wie folgt aussprechen läßt:

Man kennt bereits die Verschiebungen von zwei Ecken eines Stabdreieckes und überdies die Längenänderungen der zu diesem Dreiecke gehörigen Stäbe; man soll die Verschiebung der dritten Ecke bestimmen.

Um zur Lösung zu gelangen, wollen wir zunächst von dem Umstande absehen, daß die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind. In diesem Falle gelingt die Lösung schon mit den einfachsten Hülfsmitteln, wie aus Abb. 138 zu erkennen ist. In dieser Abbildung sind I, II, III die ursprünglichen Lagen der Knotenpunkte des Stabdreieckes und die zwischen ihnen gezogenen Linien geben die Stäbe vor der Formänderung an. Gegeben sind nach Voraussetzung die Verschiebungen $\mathfrak{v}_I$ und $\mathfrak{v}_{II}$ der Knotenpunkte I und II und damit haben wir auch, wenn wir diese Strecken abtragen, die Lagen I′ und II′ dieser Knotenpunkte nach der Formänderung.

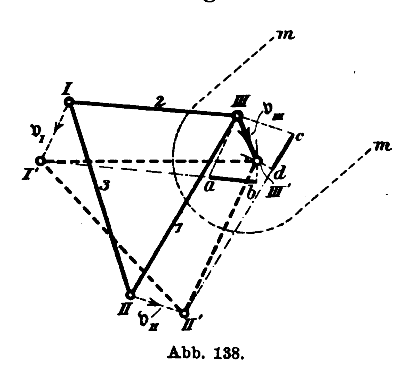


Abb. 138.

Um auch die neue Lage III′ des Punktes III zu erhalten, brauchten wir nur von I′ und II′ aus zwei Kreisbögen mit den jetzt zutreffenden Längen der Verbindungsstäbe 1 und 2 zu schlagen; der Schnittpunkt würde III′ und die Verbindungslinie von III nach III′ würde die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ liefern.

Wir wollen aber, um auf eine Konstruktion zu kommen, die sich auch für den Fall sehr kleiner Knotenpunktswege mit hinreichender Genauigkeit ausführen läßt, anstatt dessen zunächst die ursprüngliche Länge des Stabes 2 von I′ aus, zugleich auch in der ursprünglichen Richtung des Stabes 2 abtragen. Wir kommen dadurch auf den Punkt a. Dann tragen wir die Längenänderung Δl_2 des Stabes 2 von a aus ab, gleich ab. In der Abbildung ist angenommen, daß sich der Stab 2 verlängere; im andern Falle wäre ab in entgegengesetzter Richtung von a aus abzutragen. Erst durch den so gewonnenen Punkt b ziehen wir nun den Kreisbogen vom Mittelpunkte I′ aus. Wie man sieht, handelt es sich bei dieser Vorschrift nur um ein genauer umschriebenes Verfahren, wie

die Länge des Stabes 2 nach der Formänderung in die Zeichnung eingetragen werden soll.

Hierauf verfahren wir ebenso mit dem Stabe 1. Dessen ursprüngliche Länge wird von II′ aus in der ursprünglichen Richtung abgetragen, wodurch wir zum Punkte c gelangen, worauf die Längenänderung $\Delta l_1 = cd$ von c aus auf dieser Linie angesetzt wird. In der Abbildung ist angenommen, daß sich der Stab 1 verkürzt habe. Durch den auf diese Weise gefundenen Punkt d legen wir hierauf den Kreisbogen dIII′ vom Mittelpunkte II′ aus. Der Schnittpunkt beider Kreisbögen liefert den Punkt III′.

Der wirklichen Ausführung des bis dahin beschriebenen Verfahrens steht freilich das Hindernis im Wege, daß die Knotenpunktswege und die Änderungen der Stablängen so klein sind, daß sich das Dreieck I′II′III′ vom Dreiecke I II III kaum oder gar nicht auseinander halten läßt. Im Grunde genommen besteht indessen die Schwierigkeit nur darin, daß in der Zeichnung neben sehr kleinen Strecken auch sehr viel größere Strecken vorkommen. Denn so klein auch die Knotenpunktswege und die Stabverlängerungen sein mögen — und selbst wenn sie wirklich unendlich klein wären — lassen sie sich bei einer passenden Wahl des Maßstabes doch in zweckmäßiger Größe auftragen. Die Stablängen selbst kann man dann freilich nicht in dieselbe Zeichnung aufnehmen. Dies ist aber auch gar nicht nötig. Man denke sich nämlich den durch die Linie mm abgegrenzten Teil der Figur in der Umgebung des Knotenpunktes III von dem Reste abgeschnitten. Schon dieser Abschnitt der Figur genügt vollständig, um den Knotenpunktsweg von III zu ermitteln. Man kann nämlich diesen Teil der ganzen Figur in einem beliebigen Maßstabe auftragen, ohne dazu den sehr viel größeren Rest nötig zu haben. Zugleich sind alle Strecken in diesem Teile klein von der Ordnung der Knotenpunktswege und der Stabverlängerungen, so daß kein Hindernis besteht, den Maßstab so zu wählen, daß alle Strecken eine für das Auftragen oder Abmessen mit dem Zirkel bequeme Größe erlangen.

Freilich braucht man eigentlich streng genommen die Punkte I′ und II′, um von ihnen aus die Kreisbögen von *b* und *d* nach III′ zu schlagen. Aber gerade der Umstand, daß die Knotenpunktswege sehr klein im Verhältnisse zu den Stablängen sind, der uns zuerst störend im Wege stand, hilft uns jetzt zur Überwindung dieser Schwierigkeit. Ein kleiner Kreisbogen, der zu einem großen Halbmesser gehört, kann nämlich genau genug als geradlinig angenommen werden. Die Richtung der das Bogenelement ersetzenden Strecke muß natürlich senkrecht zum Halbmesser stehen und dessen Richtung ist in dem Abschnitte der Figur ohnehin schon durch die Strecke *ab* bezw. *cd* vertreten.

In Abb. 139 ist der in Frage kommende Teil von Abb. 138 noch einmal besonders herausgezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Teil für sich gezeichnet werden kann, ohne daß man zuvor Abb. 138 entworfen zu haben braucht. Von einem beliebigen Punkte, der hier der Übereinstimmung mit Abb. 138 wegen, mit III bezeichnet ist, den man aber sonst den Pol des Verschiebungsplanes nennt, trage man zunächst die gegebenen Knotenpunktswege $\mathfrak{v}_{I}$ und $\mathfrak{v}_{II}$ in einem passend gewählten Maßstabe ab. Dadurch erhält man die vorher mit *a* und *c* bezeichneten Punkte. Hieran schließen sich die Stabverlängerungen Δl_1 und Δl_2, die parallel zu den gegebenen Stabrichtungen zu ziehen sind. Hiermit hat man die Punkte *d* und *b* und es fehlen nur noch die Kreisbögen *b*III′ und *d*III′. In Abb. 139 mußten diese wirklich als Kreisbögen gezogen werden, weil diese Abbildung aus Abb. 138 losgetrennt war, in der die Knotenpunktswege von gleicher Größenordnung mit den Stablängen angenommen wurden. Hiermit hängt es auch zusammen, daß wir beim Übergange von Abb. 138 zu Abb. 139 keine Veranlassung hatten, den Maßstab zu vergrößern. In jenen Fällen, für die man die Verschiebungspläne tatsächlich zu konstruieren hat, ist aber Abb. 139 in weit größerem Maßstabe als Abb. 138 zu zeichnen und die Kreisbögen *b*III′ und *d*III′ gehören dann zu Halbmessern von

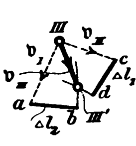


Abb. 139.

vielen Metern Länge. Es genügt daher, bIII′ als gerade Linie senkrecht zu ab und ebenso dIII′ senkrecht zu cd zu ziehen. Die Verbindungslinie vom Pole des Verschiebungsplanes zum Schnittpunkte III′ der beiden Geraden gibt die gesuchte Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ des Knotenpunktes III nach Größe und Richtung an.

Die einfachere Aufgabe, die wir uns zunächst stellten, ist hiermit gelöst und es bleibt nur noch zu zeigen, wie man durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens auch die Knotenpunktsverschiebungen in einem beliebigen „einfachen" Fachwerkträger, die zu gegebenen Stabverlängerungen gehören, ermitteln kann. Bei einem „nicht einfachen" Fachwerkträger reicht man mit diesem Verfahren freilich nicht aus. Man kann zwar auch dann die Knotenpunktsverschiebungen und zwar durch entsprechende weitere Ausbildung des schon in § 36 besprochenen Verfahrens oder auch auf andere Art verfolgen. Da aber die einfachen Träger die Regel bilden und man sich bei den andern nötigenfalls auch durch das schon beschriebene Maxwell-Mohrsche Verfahren helfen kann, das auch für sie ohne weiteres anwendbar ist, soll hier nur von den Verschiebungsplänen für die einfachen Träger die Rede sein.

Hierzu bemerke ich noch, daß es für die Konstruktion des Verschiebungsplanes gleichgültig ist, ob der Träger statisch bestimmt oder unbestimmt ist, falls man nur die Verlängerungen aller Stäbe bereits kennt. Man kann dann die überzähligen Stäbe bei der Konstruktion ganz unberücksichtigt lassen. Nachher muß sich von selbst zeigen, daß die Verlängerungen der überzähligen Stäbe mit den im Verschiebungsplane gefundenen Wegen ihrer Endknotenpunkte in Übereinstimmung stehen.

In Abb. 140[a] ist ein Balkenträger gezeichnet, von dem die durch Schattenstriche hervorgehobenen Stäbe bei dem Belastungsfalle, der zu der jetzt zu untersuchenden Formänderung führt, gedrückt, die andern gezogen sein sollen. Ich nehme an, daß die Stabspannungen durch Zeichnen eines Kräfteplanes und die Stabverlängerungen Δl nach Gl. (60) bereits berechnet seien.

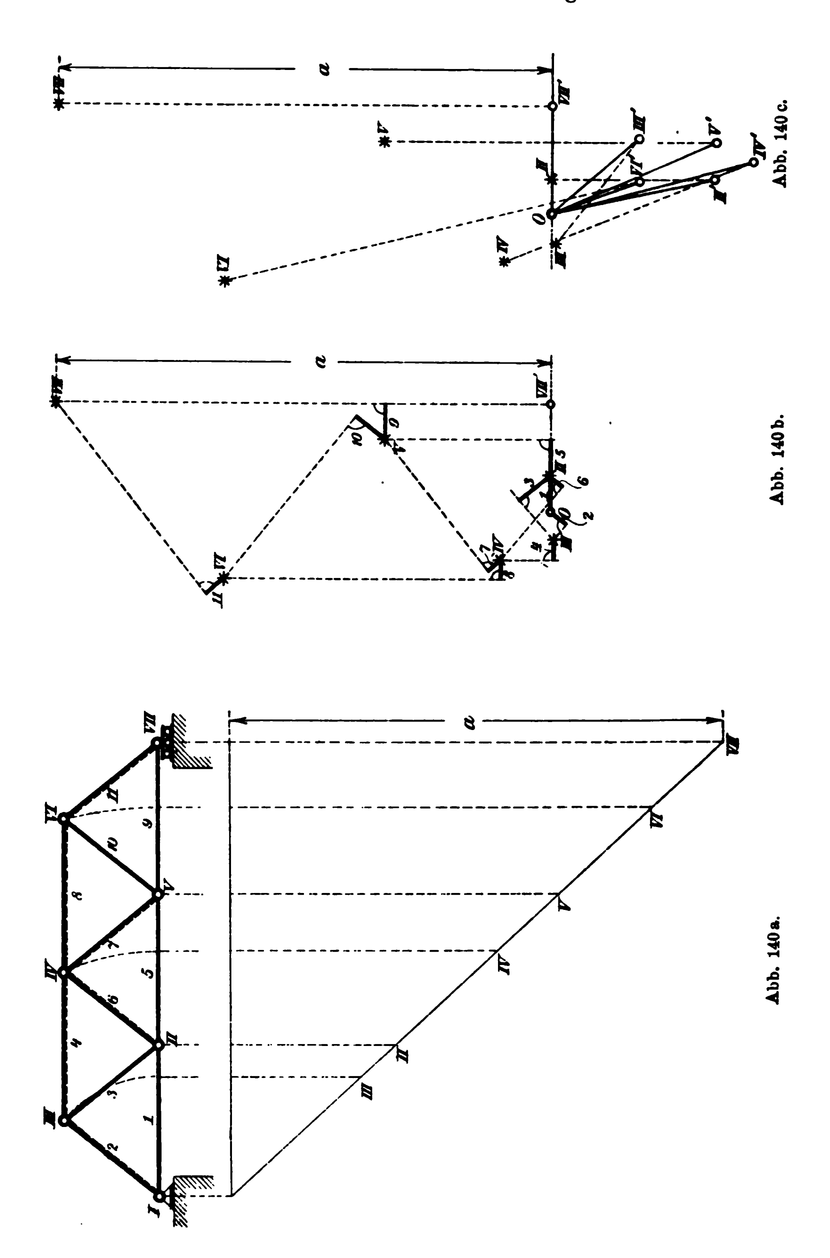


Abb. 140a.

Abb. 140b.

Abb. 140c.

Den Verschiebungsplan zeichnet man nebenan als besondere Figur (Abb. 140[b]) so etwa wie einen Kräfteplan. Der Pol, von dem aus die Knotenpunktswege nach Größe und Richtung aufzutragen sind, ist in der Abbildung mit dem Buchstaben *O* bezeichnet. Die Stabverlängerungen, die in passender Vergrößerung angegeben wurden, sind durch ausgezogene kleine Strecken dargestellt und nur mit den Nummern der zugehörigen Stäbe bezeichnet. Die gestrichelten Linien des Verschiebungsplanes bilden den Ersatz für die in den vorhergehenden Auseinandersetzungen besprochenen Kreisbögen.

Vor allem ist nun auf eine kleine Schwierigkeit hinzuweisen, auf die man beim Anfange der Konstruktion stößt. Man beginnt nämlich vom festen Auflagerpunkte I her. Nun weiß man zwar, daß dessen Verschiebung gleich Null ist. Von den Verschiebungen der beiden andern Ecken II und III des ersten Stabdreieckes I, II, III weiß man aber noch nichts. Es fehlt also hier eine der Voraussetzungen, von denen wir bei der Lösung der einfacheren Aufgabe für das Stabdreieck ausgingen.

Man hilft sich damit, daß man vorläufig darauf verzichtet, die Knotenpunktswege sofort in ihrer wahren Richtung und Größe zu erhalten. Man denkt sich nämlich mit dem Träger zunächst nur die Änderung der Gestalt vorgenommen, während man die Lage, in die er infolge dieser Gestaltänderung übergeht, einstweilen als unbestimmt betrachtet. Die Lage, die der Träger nachher einnimmt, wird durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben. Nun kann man zwar die dem festen Auflagerpunkte vorgeschriebenen Bedingungen sofort verwerten, indem man seinen Knotenpunktsweg gleich Null setzt. Die Auflagerbedingung am andern Ende, durch die der Knotenpunkt VII auf seiner horizontalen Auflagerbahn gehalten wird, läßt sich aber von Anfang an nicht benutzen, wenn man die Konstruktion des Verschiebungsplanes vom linken Trägerende her beginnt. Man sieht daher von der Erfüllung dieser Auflagerbedingung einstweilen ganz ab und denkt sich den Träger, nachdem er die ihm auferlegte Gestaltänderung erfahren hat, in irgend einer andern Lage gegeben.

Diese ganz willkürlich auszuwählende Lage kann z. B. dadurch näher bezeichnet werden, daß man sich die Richtung des Stabes 1 festgehalten denkt. In diesem Falle kann sich der Knotenpunkt II nur in horizontaler Richtung verschoben haben.

Hiermit ist — freilich unter Aufopferung der unmittelbaren Erreichung des gesteckten Zieles — die vorher erwähnte Schwierigkeit beim Anfange des Verschiebungsplanes gehoben. Wir tragen die Längenänderung Δl_1 oder kurz 1 des Stabes 1 vom Pole des Verschiebungsplanes horizontal nach rechts hin ab. Der Stab ist nämlich nach Voraussetzung gezogen und der Knotenpunkt II entfernt sich daher von I, d. h. er bewegt sich nach rechts hin. An den Endpunkt der Strecke 1 schreiben wir II.

Nun steht der Konstruktion des Verschiebungsweges von III nach dem vorher besprochenen Verfahren kein Hindernis mehr im Wege. Wir tragen von II aus Δl_3 nach links oben hin ab, da der Stab 3 gezogen ist, der Knotenpunkt III sich also infolge der Stabverlängerung von II entfernt, d. h. nach links oben hin bewegt. Ebenso tragen wir Δl_2 von O aus nach links unten hin ab, weil Stab 2 gedrückt ist, sich also verkürzt. Die durch die Endpunkte von Δl_3 und Δl_2 gezogenen Senkrechten, die zum Ersatze der betreffenden Kreisbögen dienen, schneiden sich im Punkte III (entsprechend dem Punkte III′ nach der Bezeichnung in Abb. 139) des Verschiebungsplanes. Die Strecke vom Pole O nach III gibt den Verschiebungsweg des Knotenpunktes III an für den Übergang des Trägers in seine neue Gestalt, aber freilich nicht zugleich in die richtige Lage, sondern in die anstatt deren willkürlich gewählte.

Nachdem III im Verschiebungsplane gefunden ist, sucht man den Punkt IV auf. Dieser Knotenpunkt ist durch die Stäbe 4 und 6 an III und II angeschlossen. Die Verschiebungswege von III und II sind schon im Verschiebungsplane enthalten. Wir brauchen also nur an III die Stabverlängerung Δl_4 und an II Δl_6 anzutragen und durch die Endpunkte dieser

Strecken Senkrechte zu ziehen, um IV zu erhalten. Hierbei ist nur darauf zu achten, daß die Stäbe 4 und 6 nach Voraussetzung gedrückt sind, daß sich also IV den Knotenpunkten II und III nähert. Demnach ist die Strecke 4 von III aus nach links hin, 6 von II aus nach links unten hin abzutragen gewesen.

In derselben Weise findet man dann auch der Reihe nach die Punkte V, VI und VII des Verschiebungsplanes. Man tut zwar gut, sich jeden Schritt, der hierzu führt, wieder im einzelnen zu überlegen und dabei namentlich auf den Sinn zu achten, in dem die Δl jedesmal anzuschließen sind. Es ist aber nicht nötig, die Beschreibung fortzusetzen, da ich dabei immer nur von neuem dieselben Worte zu wiederholen hätte.

Nachdem man bis zum rechten Auflagerpunkte VII gelangt ist, sieht man nun auch, daß man mit der willkürlichen Annahme, der Stab 1 ändere seine Richtung nicht, von der man ausgegangen war, nicht das Rechte getroffen hat. Darum werden aber unsere Ergebnisse noch nicht wertlos; sie bedürfen nur einer Verbesserung, die leicht an ihnen anzubringen ist.

Jedenfalls haben wir nämlich Knotenpunktsverschiebungen gefunden, die, wenn sie wirklich vorgenommen werden, den Träger in jene Gestalt überführen, die er infolge der Stabverlängerungen tatsächlich annimmt. Wir brauchen also nur noch eine Lagenänderung ohne Gestaltänderung vorzunehmen, nämlich den Träger nachträglich um den festen Auflagerpunkt I solange zu drehen, bis der andere Auflagerpunkt VII in die ihm vorgeschriebene Auflagerbahn gelangt. Hierbei beschreibt VII einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt I ist. Da dieser Kreisbogen aber nur sehr klein im Verhältnisse zum Halbmesser ist, genügt es, ihn im Verschiebungsplane durch eine gerade Strecke zu ersetzen, die zur Richtung des Halbmessers von I nach VII senkrecht steht. Diese Strecke ist in Abb. 140^b mit VII, VII′ oder a bezeichnet; sie reicht vom Punkte VII bis zu der durch den Pol O gezogenen Horizontalen.

Erst die Linie OVII′ gibt den wahren Verschiebungsweg des Knotenpunktes VII nach Größe und Richtung in dem ge-

wählten Maßstabe an. Aus der Figur folgt, daß dieser Weg gleich der Summe der Stabverlängerungen Δl_1, Δl_5 und Δl_9 ist. Dies war auch von Anfang an vorauszusehen, da sich VII von dem festen Auflager um den Betrag der elastischen Dehnung des ganzen Untergurtes entfernen muß.

Beim Zurückdrehen des seiner Gestalt nach unveränderlichen Trägers aus der zuerst willkürlich gewählten Lage in jene, die er in Wirklichkeit einnehmen muß, beschreiben auch alle andern Knotenpunkte Kreisbögen um I als Mittelpunkt. Auch die hierdurch bedingten Verschiebungswege können wegen ihrer Kleinheit (im Verhältnisse zu den Halbmessern) durch gerade Linien im Verschiebungsplane ersetzt werden, die zu den aus der Trägerfigur in Abb. 140[a] zu entnehmenden Halbmesserrichtungen senkrecht stehen. Um ihre Größen zu finden, bedenke man, daß alle diese Kreisbögen zu gleichen Zentriwinkeln gehören, nämlich jeder zu einem Zentriwinkel, der gleich der Drehung ist, die wir mit der unveränderlichen Trägerfigur vornehmen müssen, um VII auf seine Auflagerbahn zurückzuführen. Die bei der Drehung zurückgelegten Wegestrecken verhalten sich daher wie die Halbmesser der Kreisbögen und da der Weg von VII bereits gleich der Strecke a gefunden ist, können auch die Längen der übrigen Wege sofort ermittelt werden.

Man trage etwa, wie es in Abb. 140[a] geschehen ist, die Strecke a aus dem Verschiebungsplane von VII aus nach abwärts auf, schlage die Entfernung der einzelnen Knotenpunkte von I auf die Horizontale durch I herab und ziehe von da aus Parallelen zu a bis zur Verbindungslinie von I mit dem Endpunkte von a. Die Längen dieser Parallelen geben die Größen der Verschiebungswege der zugehörigen Knotenpunkte beim Zurückdrehen an.

Man braucht jetzt nur noch die nach Richtung und Größe bekannten Verschiebungswege an die zugehörigen Punkte des Verschiebungsplanes anzusetzen, um sofort zu jenen Punkten zu gelangen, deren Lage zum Pole die wahre Verschiebung nach Größe und Richtung angibt. Um die Deutlichkeit der Figur

nicht zu beeinträchtigen, ist dies in Abb. 140^b selbst nicht ausgeführt worden. Vielmehr sind die richtigen Lagen der Punkte im Verschiebungsplane in Abb. 140^c besonders herausgezeichnet worden. Eigentlich hat man sich Abb. 140^c mit Abb. 140^b zu einer einzigen Figur übereinander gedeckt vorzustellen, so nämlich, daß sich die Pole O in beiden Abbildungen decken.

Im übrigen ist das Verfahren noch mancher Abänderungen fähig. Es ist z. B. nicht nötig, bei der Konstruktion des Verschiebungsplanes vom festen Auflager her zu beginnen. Man kann sich auch irgend einen Knotenpunkt in der Mitte und einen von ihm ausgehenden Stab der Richtung nach vorläufig festgehalten denken und von hier aus den Verschiebungsplan nach beiden Seiten hin konstruieren. Dann findet man freilich, daß keiner der Auflagerpunkte die ihm vorgeschriebenen Auflagerbedingungen erfüllt. Durch Drehung um einen Pol, dessen Lage leicht zu ermitteln ist, kann man aber nachträglich den seiner Gestalt nach bereits veränderten und während der Drehung daher unveränderlichen Träger in jene Lage zurückbringen, die durch die Auflagerbedingungen vorgeschrieben ist.

Dieses Verfahren hat den Vorzug vor dem vorher beschriebenen, daß der Verschiebungsplan einen kleineren Umfang annimmt und daß man daher bei einem gegebenen Raume der Zeichenfläche den Maßstab für das Auftragen der Stabverlängerungen und der Verschiebungen größer wählen kann, wodurch die Genauigkeit erhöht wird. Man bemerkt nämlich schon an dem einfachen Beispiele, das vorher behandelt wurde, daß der Raum, den der Verschiebungsplan einnimmt, in immer stärkerem Verhältnisse anwächst, je weiter man vorschreitet. Ich sehe indessen davon ab, ein Beispiel für die Konstruktion des Verschiebungsplanes aus der Mitte her vorzuführen, da der Anfänger am besten tut, auf diese „Handwerksvorteile“ zunächst zu verzichten und sich mit der Sache unter den einfachsten Bedingungen vertraut zu machen. Wer erst einige Verschiebungspläne selbst entworfen hat, findet bald selbst heraus, wie er die Arbeit durch eine geschickte Anordnung erleichtern und verbessern kann.

Nur darauf möchte ich noch hinweisen, daß man auch dann, wenn man den Verschiebungsplan vom festen Auflager her konstruiert, eine Verbesserung dadurch herbeiführen kann, daß man den Stab 1 seiner Richtung nach nicht festhält, sondern anstatt dessen einstweilen willkürlich annimmt, daß sich der Knotenpunkt II in irgend einer Richtung nach rechts abwärts verschoben habe. Hat man schon von früheren Erfahrungen her eine ungefähre Vorstellung davon, in welcher Richtung sich der Knotenpunkt II etwa in Wirklichkeit verschieben wird, so wird sich der Verschiebungsplan hierdurch auf einen wesentlich kleineren Raum zusammendrängen lassen, als unter der früheren Annahme. Das Zurückdrehen am Schlusse ist natürlich in diesem Falle genau so auszuführen, wie vorher. Die Konstruktion ändert sich nur insofern ab, als man im Anfange beim Auftragen von II außer dem horizontalen Wege, der nach wie vor gleich Δl_1 bleiben muß, nach Gutdünken auch noch einen beliebigen Weg von II in vertikaler Richtung voraussetzt.

Schließlich mache ich noch darauf aufmerksam, daß es natürlich auch frei steht, die einzelnen Polygone, aus denen sich der Verschiebungsplan zusammensetzt, in die Trägerfigur selbst einzutragen, so daß an jeden Knotenpunkt jenes Polygon angesetzt wird, das vorher dazu diente, die Lage des dem Knotenpunkte entsprechenden Punktes des Verschiebungsplanes aufzusuchen. Mancher wird dieses Verfahren vielleicht für anschaulicher halten und es soll daher durch eine besondere Figur, die sich ebenfalls auf das vorher behandelte Beispiel bezieht, erläutert werden.

Zugleich sind hierbei noch einige Abänderungen getroffen, die sich unter diesen Umständen als zweckmäßig erweisen. Die Knotenpunktsverschiebungen sind in Abb. 141 von jedem Knotenpunkte aus in vergrößertem Maßstabe abgetragen und in der Zeichnung durch starke Striche hervorgehoben. Zuerst trägt man $\mathfrak{v}_{II}$ vom Knotenpunkte II aus in beliebiger Richtung ab, indem man nur dafür sorgt, daß die Horizontalkomponente von $\mathfrak{v}_{II}$ gleich Δl_1 (in der Abbildung Δ_1 geschrieben) ist.

Dann projiziert man $\mathfrak{v}_{II}$ auf die Richtung von 3 und trägt die Projektion v'_{II} von III aus in gleicher Richtung auf 3 ab. Wenn der Stab 3 seine Länge nicht änderte, müßte der Knotenpunkt III nach der Verschiebung auf der durch den Endpunkt von v'_{II} gezogenen Senkrechten liegen. Da aber 3 gezogen ist und sich verlängert, muß die Projektion von III einen größeren Abstand von der Projektion von II auf die Richtung von 3 haben. Man hat daher Δ_3 vom Endpunkte von v'_{II} aus nach dem Knotenpunkte III hin abzutragen und durch den Endpunkt eine Senkrechte zu ziehen, auf der der Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$ enthalten sein muß. Ferner nähert sich der Knotenpunkt III dem festen Auflagerpunkte I

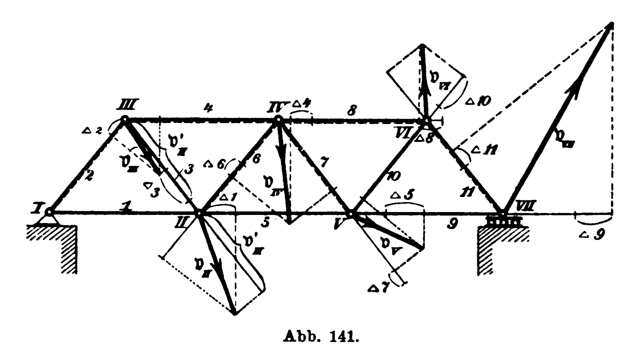


Abb. 141.

wegen der Verkürzung des Stabes 2. Man trägt daher Δl_2 von III aus nach I hin ab und zieht durch den Endpunkt eine Senkrechte zur Stabrichtung. Der Schnittpunkt von ihr mit der vorigen Senkrechten liefert den Endpunkt der Verschiebung $\mathfrak{v}_{III}$.

Um zur Verschiebung des Knotenpunktes IV zu gelangen, der mit II und III durch die Stäbe 6 und 4 verbunden ist, projiziert man zunächst $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{III}$ auf die Richtungen der Verbindungsstäbe 6 und 4. Die beiden Projektionen trägt man am Knotenpunkte IV im gleichen Sinne auf den Stabrichtungen ab. Hätten sich die Längen der Verbindungsstäbe nicht geändert, so müßte der Knotenpunkt IV nach der Formänderung auf den durch die Endpunkte jener Strecken gezogenen

Senkrechten liegen. Um auch die Längenänderungen zu berücksichtigen, tragen wir Δ_4 an die eine Strecke nach links hin, Δ_6 an die andere nach links unten hin an, weil die Stäbe 4 und 6 nach Voraussetzung gedrückt sind und der Knotenpunkt IV sich daher den Knotenpunkten II und III nähert. Wenn wir jetzt Senkrechten zu den Stabrichtungen an den Endpunkten von Δ_4 und Δ_6 errichten, erhalten wir als Schnittpunkt die neue Lage des Punktes IV oder mit andern Worten den Endpunkt des Verschiebungsweges $\mathfrak{v}_{IV}$.

In derselben Weise kann man bis zum Ende hin fortfahren. Sollte man die zuvor willkürlich gewählte Richtung von $\mathfrak{v}_{II}$ zufällig gerade richtig getroffen haben, so müßte sich dies darin zeigen, daß die Verschiebung $\mathfrak{v}_{VII}$ des rechten Auflagerpunktes horizontal ausfiele. Im allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen. Man muß daher nachträglich noch um I zurückdrehen, bis VII in die horizontale Auflagerbahn gelangt. Dies kann wieder so wie vorher ausgeführt werden. Man setzt an den Endpunkt jeder Strecke $\mathfrak{v}$ den bei der Drehung beschriebenen Weg an. Freilich darf man hierbei nicht etwa wirklich einen Kreisbogen aus dem Punkte I schlagen. Da alle Stabverlängerungen und Knotenpunktswege in viel größerem Maßstabe über die in kleinem Maßstabe gezeichnete Trägerfigur gedeckt sind, lassen sich die Teile des Verschiebungsplanes nicht in unmittelbare Beziehung zu den Teilen der Trägerfigur setzen. Jener Punkt I, von dem aus man den Kreisbogen zu ziehen hätte, liegt vielmehr viel weiter ab, so wie es der Maßstab des Verschiebungsplanes im Gegensatze zum Maßstabe der Trägerfigur erfordert. Man ersetzt daher, wie schon früher, den Kreisbogen durch eine zum Radius senkrecht gezogene Gerade. Die Richtung des Radius wird hierbei durch die vom Knotenpunkte I der Trägerfigur gezogene Verbindungslinie richtig angegeben. — Um die Deutlichkeit der Figur nicht durch Hinzufügung weiterer Linien zu beeinträchtigen, ist von der Ausführung der Zurückdrehung in Abb. 141 abgesehen worden. Natürlich müssen hier zuletzt wieder dieselben Verschiebungen herauskommen, die schon in

Abb. 140^c zusammengestellt sind, abgesehen davon, daß dort alle Verschiebungen von demselben Pole aus abgetragen sind, während hier jede Verschiebung an jenem Knotenpunkte angesetzt ist, zu dem sie gehört.

§ 49. Die Stabspannungen im einfach statisch unbestimmten Träger.

Wenn ein Stab oder eine Auflagerbedingung überzählig ist, gibt es zu jedem Belastungsfalle unendlich viele Spannungsbilder, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen. Denkt man sich nämlich den überzähligen Stab oder die überzählige Auflagerbedingung entfernt und bringt dafür an den Endpunkten des Stabes oder an dem Auflagerpunkte äußere Kräfte von beliebiger Größe an, so wie sie von dem Stabe oder durch den Auflagerzwang ausgeübt werden könnten, so sind dadurch die Spannungen in dem übrig bleibenden statisch bestimmten Träger eindeutig bestimmt. Da man aber die Größe der Stabspannung des überzähligen Stabes oder der überzähligen Auflagerkomponente beliebig wählen kann, hat man im ganzen Träger unendlich viele Spannungsbilder, die vom Standpunkte der Mechanik des materiellen Punktes oder des starren Körpers aus alle gleich möglich und auch gleich wahrscheinlich sind.

Von allen diesen verschiedenen Spannungszuständen kann aber nur einer wirklich zustande kommen und um ihn unter allen möglichen herauszufinden, bedarf es noch einer über die Lehren der Mechanik starrer Körper hinausreichenden Kenntnis über das Verhalten des Trägers gegenüber aufgebrachten Lasten. Hierzu verhilft uns die Lehre von den elastischen Formänderungen. Wenn wir wissen, daß das Material, aus dem die Stäbe angefertigt sind, das Hookesche Gesetz befolgt, hört jede Unbestimmtheit auf und wir vermögen die Stabspannungen auch für den statisch unbestimmten Träger oder wenigstens jene Stabspannungen, die von den gegebenen Lasten selbst hervorgebracht werden, in eindeutiger Weise zu berechnen.

Hierbei muß man nämlich in Erinnerung behalten, daß

in einem statisch unbestimmten Träger auch dann Stabspannungen bestehen können, wenn alle Lasten fehlen. Hat man den Träger bei der Herstellung etwa soweit zusammengenietet, daß nur noch ein Stab, den man als den überzähligen betrachten kann, fehlt und findet man, daß die Länge des nun noch nachträglich einzuziehenden Stabes nicht völlig genau mit der Entfernung der Knotenpunkte übereinstimmt, zwischen denen er eingeschaltet werden soll, so wird man einen gewissen Zwang aufwenden müssen, um den Stab zum passen zu bringen. Denn der bereits fertig gestellte Teil des Trägers bildet nach Voraussetzung schon für sich genommen eine in sich steife Konstruktion, die jeder Entfernungsänderung der zu ihr gehörigen Knotenpunkte einen Widerstand entgegensetzt. Beim gewaltsamen Einfügen des Stabes wird also, wenn der Stab etwas zu kurz war, dieser sich etwas verlängern müssen und zugleich werden sich die Knotenpunkte, zwischen die er eingespannt wird, etwas einander nähern müssen, so daß die beiden Längen miteinander übereinstimmen. Der eingesetzte Stab gerät hierbei in Zugspannung und in dem übrigen Teile entstehen Spannungen, die sich mit dieser Spannung des überzähligen Stabes ins Gleichgewicht setzen. Wir haben dann in dem fertigen Träger ein von den äußeren Lasten ganz unabhängiges Spannungsbild vor uns, das lediglich von der Herstellungsweise bedingt ist und daher, wenn nähere Angaben hierüber fehlen, auch nicht durch Rechnung festgestellt werden kann. Man nennt diese Spannungen die Montierungsspannungen. Sie können, wie aus der soeben durchgeführten Betrachtung hervorgeht, nur in statisch unbestimmten Trägern auftreten. Von den Montierungsspannungen soll weiterhin nicht die Rede sein; es soll sich vielmehr immer nur um jene Spannungen handeln, die von den Lasten hervorgebracht werden. Entweder stelle man sich also vor, daß das Auftreten von Montierungsspannungen durch ein genaues Einpassen der Stäbe ohne Aufwendung eines Zwanges vermieden sei oder man denke sich im andern Falle die Montierungsspannungen den hier zu berechnenden überall noch stillschweigend hinzugefügt.

Wenn die Berechnung der Stabspannungen nur für einen einzelnen Belastungsfall erforderlich ist, führt die Anwendung des bereits in § 46 besprochenen Maxwell-Mohrschen Verfahrens, das sich auf die jetzt vorliegende Aufgabe ohne weiteres übertragen läßt, am schnellsten zum Ziele. Diese Methode soll hier zunächst besprochen werden.

Man denke sich irgend einen Stab entfernt, der als der überzählige betrachtet werden kann. Der übrig bleibende, statisch bestimmte Rest des Trägers möge als das „Hauptnetz“ bezeichnet werden. Wir berechnen zunächst die Spannungen, die im Hauptnetze unter den gegebenen Lasten auftreten müßten, wenn der überzählige Stab wirklich fehlte. Dies ist nach den Lehren der früheren Abschnitte stets möglich, da das Hauptnetz nach Voraussetzung einen statisch bestimmten Träger bildet. Man wird also etwa einen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan T nennen wollen. Die aus ihm entnommene, zu irgend einem Stabe mit der Ordnungsnummer i gehörige Stabspannung sei mit T_i bezeichnet. Auch das Spannungsbild T gehört zu jenen, die wir für den ganzen statisch unbestimmten Träger vorher als möglich hingestellt hatten; es ist jenes, bei dem die Spannung des überzähligen Stabes willkürlich gleich Null gesetzt ist.

Hierauf betrachte man das Hauptnetz unter der Annahme, daß alle äußeren Lasten entfernt sind, während an den Endpunkten des überzähligen Stabes willkürlich Lasten angebracht werden, die gleich der Lasteinheit sind und jene Richtung haben, wie eine vom überzähligen Stabe auf seine Endpunkte ausgeübte Zugspannung. Diesem Belastungsfalle entsprechen Spannungen in den Stäben des statisch bestimmten Hauptnetzes, die sich ebenfalls auf bekannte Art leicht ermitteln lassen. Man wird hierzu einen neuen Kräfteplan zeichnen, den wir den Kräfteplan u nennen wollen. Die im Stabe i jetzt auftretende Spannung sei mit u_i bezeichnet. Das Spannungsbild u_i ist von derselben Art wie ein System von Montierungsspannungen. Wirkt ferner längs der Richtungslinie des überzähligen Stabes nicht eine Zugspannung von der Lasteinheit,

sondern eine Spannung beliebigen Vorzeichens vom Werte X, so entsprechen ihr im Hauptnetze die Spannungen uX.

Aus den beiden Spannungsbildern T und uX lassen sich nun auch alle andern zusammensetzen, die den Gleichgewichtsbedingungen an allen Knotenpunkten genügen. Es muß sich also auch jenes darunter befinden, das wir suchen und das mit dem Buchstaben S bezeichnet werden soll. Es wird sich nur darum handeln, der hierbei allein noch vorkommenden Unbekannten X den richtigen Wert zu erteilen. Die wahre Spannung S_i im Stabe i wird sich also in der Form

$$S_i = T_i + u_i X \tag{64}$$

darstellen lassen.

Die elastische Längenänderung Δl_i des Stabes i folgt hieraus mit Benutzung der in Gl. (59) und (60) S. 338 eingeführten Stabkonstanten r zu

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i (T_i + u_i X). \tag{65}$$

Um die Unbekannte X zu berechnen, wenden wir, wie schon in § 46, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten an. Wir beziehen diesen Satz auf irgend ein Spannungsbild von der Art u. Da es aber nicht nötig ist, gerade das Spannungsbild u selbst zu nehmen, wollen wir, um dies klarer hervortreten zu lassen, annehmen, daß im überzähligen Stabe irgend eine Spannung C — also etwa eine Montierungsspannung — auftrete, die im Stabe i eine Spannung Cu_i zur Folge hat. Äußere Lasten, abgesehen von Auflagerkräften, die dadurch hervorgerufen werden können, kommen in diesem Spannungsbilde nicht vor.

Die Spannungen Cu stehen also an allen Knotenpunkten unter sich, bezw. an den Auflagerpunkten mit den dort auftretenden Auflagerkräften im Gleichgewichte. Denken wir uns nun den Knotenpunkten, also den Angriffspunkten dieser Kräfte, beliebige (virtuelle) Verschiebungen erteilt, so ist die Summe der von ihnen geleisteten Arbeiten gleich Null. Wir denken uns, wie schon bei der früheren ähnlichen Betrachtung in § 46, diese Arbeitsgleichung für jeden Knotenpunkt angeschrieben

aufgelagerte Fachwerk anzusehen. Man zeichne den Kräfteplan T für die im Balkenträger durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stabspannungen. Dann bringe man als einzige Last eine horizontale Kraft von der Lasteinheit an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte an, die auf den festen Auflagerpunkt zu gerichtet ist. Dieser Last entspricht ein horizontaler Auflagerdruck von derselben Größe am festen Auflager. Man zeichne den Kräfteplan u für die hierdurch hervorgerufenen Stabspannungen im Balkenträger. Bezeichnet dann X den in Wirklichkeit bei dem statisch unbestimmten Träger unter den gegebenen Lasten auftretenden Horizontalschub, so werden die Stabspannungen S durch Gl. (64) angegeben und X selbst findet man durch dieselben Überlegungen wie vorher gleich dem durch Gl. (67) angegebenen Werte.

§ 50. **Träger mit zwei oder mehr überzähligen Stäben.**

Allzugroß ist die Zahl der überzähligen Stäbe nicht leicht bei den in der Praxis angewendeten Tragkonstruktionen, für die man solche Rechnungen auszuführen hat. Träger mit zwei oder drei überzähligen Stäben kommen indessen noch öfters vor. Ich werde hier zunächst einen Träger mit zwei überzähligen Stäben behandeln; man sieht nachher leicht ein, wie sich das Verfahren gestaltet, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe (oder Auflagerbedingungen) noch größer ist.

Abb. 142 zeigt ein Beispiel für einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Denkt man sich die Stäbe X und Y herausgenommen, so bleibt ein Hauptnetz übrig, das einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Gelenken vorstellt. Das Mittelgelenk

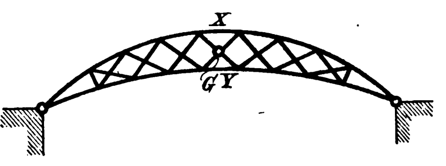


Abb. 142.

wird durch den Kreuzungspunkt G der beiden zwischen X und Y liegenden Diagonalstäbe dargestellt. Sind die Stäbe in G miteinander verbunden, so ist G ein eigentliches Gelenk; gehen sie aneinander vorüber, so ist G ein imaginäres Gelenk.

$$\Sigma urT + X\Sigma u^2r = 0$$

erhält man durch Auflösung nach X

$$X = -\frac{\Sigma urT}{\Sigma u^2r}. \qquad (67)$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Denn alle in den Summen vorkommenden Glieder können auf Grund der beiden Kräftepläne T und u und der Angaben über die Längen und Querschnitte der Stäbe ohne weiteres zahlenmäßig angegeben werden. Wie groß man den Elastizitätsmodul des Materials annehmen will, bleibt sich übrigens in diesem Falle gleichgültig, da E nach Einsetzen des Wertes von r aus Gl. (59) in jedem Gliede von Zähler und Nenner in gleicher Weise auftritt und sich daher forthebt.

Nachdem X bekannt ist, folgt auch die Spannung jedes andern Stabes nach Gl. (64).

Bisher nahm ich an, daß ein überzähliger Stab herausgenommen werden soll, um zum statisch bestimmten Hauptnetze zu gelangen. Man kann aber anstatt dessen ebensogut auch eine überzählige Auflagerbedingung beseitigen. In diesem Falle ist unter X die Komponente des Auflagerdruckes zu verstehen, die durch den beseitigten Auflagerzwang in Wirklichkeit hervorgerufen wird.

Man überzeugt sich leicht, daß die vorhergehenden Entwicklungen auch für diesen Fall ohne Änderung gültig bleiben. Man nehme z. B. an, daß es sich um einen Fachwerkbogenträger handele, der aus einem statisch bestimmten Fachwerke durch feste Auflagerung beider Endknotenpunkte hervorgegangen ist. Der festen Auflagerung beider Endpunkte entsprechen vier Auflagerbedingungen, also eine zuviel. Anstatt nun einen Stab herauszunehmen und dadurch zu einem Hauptnetze zu gelangen, das einen Bogenträger mit drei Gelenken darstellt, kann man auch eine Auflagerbedingung entfernen, nämlich voraussetzen, daß der Träger nur am einen Ende fest, am andern auf einer horizontalen Auflagerbahn verschieblich aufgelagert sei. Als „Hauptnetz" ist jetzt das als Balkenträger

aufgelagerte Fachwerk anzusehen. Man zeichne den Kräfteplan T für die im Balkenträger durch die gegebenen Lasten hervorgerufenen Stabspannungen. Dann bringe man als einzige Last eine horizontale Kraft von der Lasteinheit an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte an, die auf den festen Auflagerpunkt zu gerichtet ist. Dieser Last entspricht ein horizontaler Auflagerdruck von derselben Größe am festen Auflager. Man zeichne den Kräfteplan u für die hierdurch hervorgerufenen Stabspannungen im Balkenträger. Bezeichnet dann X den in Wirklichkeit bei dem statisch unbestimmten Träger unter den gegebenen Lasten auftretenden Horizontalschub, so werden die Stabspannungen S durch Gl. (64) angegeben und X selbst findet man durch dieselben Überlegungen wie vorher gleich dem durch Gl. (67) angegebenen Werte.

§ 50. Träger mit zwei oder mehr überzähligen Stäben.

Allzugroß ist die Zahl der überzähligen Stäbe nicht leicht bei den in der Praxis angewendeten Tragkonstruktionen, für die man solche Rechnungen auszuführen hat. Träger mit zwei oder drei überzähligen Stäben kommen indessen noch öfters vor. Ich werde hier zunächst einen Träger mit zwei überzähligen Stäben behandeln; man sieht nachher leicht ein, wie sich das Verfahren gestaltet, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe (oder Auflagerbedingungen) noch größer ist.

Abb. 142 zeigt ein Beispiel für einen zweifach statisch unbestimmten Bogenträger. Denkt man sich die Stäbe X und Y herausgenommen, so bleibt ein Hauptnetz übrig, das einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Gelenken vorstellt. Das Mittelgelenk wird durch den Kreuzungspunkt G der beiden zwischen X und Y liegenden Diagonalstäbe dargestellt. Sind die Stäbe in G miteinander verbunden, so ist G ein eigentliches Gelenk; gehen sie aneinander vorüber, so ist G ein imaginäres Gelenk.

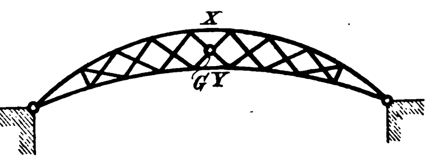


Abb. 142.

Für die Berechnung ist es aber gleichgültig, ob der eine oder der andere Fall vorliegt. Ebenso ist es auch einerlei, ob die übrigen Diagonalen an den Kreuzungsstellen miteinander vernietet sind oder nicht: in jedem Falle bildet jede der beiden Scheiben, die im Gelenke G zusammenhängen, ein einfaches statisch bestimmtes Fachwerk, das von dem sich an den Auflagerpunkt anschließenden Dreiecke aus durch fortgesetzte Angliederung neuer Knotenpunkte durch je zwei Stäbe erzeugt werden kann.

Man berechnet zunächst die Stabspannungen T, die im Hauptnetze durch die gegebenen Lasten hervorgerufen werden. Dies kann nach der dafür früher gegebenen Anleitung geschehen, indem man zuerst die Auflagerkräfte des Bogens mit drei Gelenken aufsucht und dann einen Kräfteplan T zeichnet.

Hierauf bringt man am Hauptnetze Kräfte von der Lasteinheit an den Endpunkten des Stabes X von jener Richtung an, wie sie einer im Stabe X auftretenden Zugspannung entspricht. Diese beiden Lasten bringen Auflagerkräfte und Stabspannungen im Hauptnetze hervor, die auf dieselbe Art wie vorher ermittelt werden können. Der zugehörige Kräfteplan soll als Kräfteplan u bezeichnet werden.

Bis jetzt entspricht das Verfahren genau dem im vorigen Paragraphen befolgten. Hier kommt nur noch hinzu, daß man sich auch an den Endpunkten des Stabes Y Kräfte von der Lasteinheit am Hauptnetze angebracht zu denken hat, die so gerichtet sind, wie es einer Zugspannung im Stabe Y entspricht. Auch für diesen dritten Belastungsfall führt man die Berechnung der Stabspannungen im Hauptnetze durch, indem man einen dritten Kräfteplan v zeichnet.

Versteht man unter X und Y zugleich auch die unbekannten Spannungen in den beiden überzähligen Stäben (nach Größe und Vorzeichen), so setzt sich die in irgend einem Stabe i unter den gegebenen Lasten tatsächlich eintretende Spannung S_i aus den drei Spannungsbildern T, u und v nach der Gleichung

$$S_i = T_i + u_i X + v_i Y \tag{68}$$

zusammen. Um die beiden Unbekannten X und Y zu ermitteln, müssen wir jetzt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zweimal anwenden.

Das erste Mal legen wir, wie früher, das Spannungsbild Cu zu Grunde und sehen als virtuelle Verschiebungen jene an, die die Knotenpunkte bei der elastischen Formänderung des statisch unbestimmten Trägers unter den gegebenen Lasten tatsächlich erleiden. Dies liefert die Arbeitsgleichung

$$-\Sigma Cu \cdot \Delta l = 0.$$

Beachten wir, daß Δl_i hier

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i (T_i + u_i X + v_i Y)$$

gesetzt werden kann, so geht die Gleichung nach Streichung des konstanten Faktors C über in

$$\Sigma urT + X\Sigma u^2 r + Y\Sigma uvr = 0. \tag{69}$$

Die unter den Summenzeichen auftretenden Größen sind sämtlich bekannt und die Summen können daher zahlenmäßig ausgerechnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Summen zwar an und für sich über alle Stäbe mit Einschluß der überzähligen auszudehnen sind, daß aber T für beide überzähligen Stäbe, u für den Stab Y und v für den Stab X zu Null wird. Für den Stab X ist $u = +1$ und für den Stab Y ist $v = +1$ zu setzen. Tatsächlich kommen hiernach in der ersten und in der letzten der drei Summen nur Glieder vor, die sich auf die Stäbe des Hauptnetzes beziehen, während in der zweiten Summe außerdem noch der Stab X durch ein Glied vertreten ist.

Dann wenden wir das Prinzip der virtuellen Verschiebungen nochmals und zwar auf ein Spannungsbild Cv an, worin C wieder eine beliebige Konstante bedeutet. Als virtuelle Verschiebungen nehmen wir dieselben wie im vorigen Falle an. Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$-\Sigma Cv \cdot \Delta l = 0$$

oder nach Einsetzen des Wertes von Δl und Streichung des konstanten Faktors

$$\Sigma vrT + X\Sigma uvr + Y\Sigma v^2 r = 0. \tag{70}$$

Von den hier auftretenden drei Summen ist eine schon aus der vorigen Gleichung bekannt; die beiden andern können ebenfalls ihrem Zahlenwerte nach sofort ausgerechnet werden. Nachdem dies geschehen ist, bleibt nur noch übrig, die beiden Gleichungen ersten Grades (69) und (70) nach den darin allein noch vorkommenden beiden Unbekannten X und Y aufzulösen. Man findet

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma urT \cdot \Sigma v^2 r - \Sigma vrT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r \cdot \Sigma v^2 r}\,; \\ Y &= \frac{\Sigma vrT \cdot \Sigma u^2 r - \Sigma urT \cdot \Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r \cdot \Sigma v^2 r}\,. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Kommen schließlich drei überzählige Stäbe vor und bezeichnet man den dritten mit Z, so ist noch ein weiterer Kräfteplan w zu zeichnen für die Spannungen, die im Hauptnetze durch eine längs des Stabes Z angenommene Zugspannung von der Lasteinheit hervorgerufen werden. In Gl. (68) hat man noch ein Glied $w_i Z$ beizufügen und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist noch ein drittes Mal für ein Spannungsbild Cw in Anwendung zu bringen. Man erhält dadurch drei Arbeitsgleichungen, die nach den drei Unbekannten X, Y, Z aufgelöst werden können. — Ebenso wäre auch zu verfahren, wenn die Zahl der überzähligen Stäbe noch größer sein sollte.

§ 51. Die Temperaturspannungen.

Wir haben bisher nur jene Spannungen berechnet, die durch die Lasten hervorgebracht werden und mit der Wegnahme der Lasten wieder verschwinden. Daß die Montierungsspannungen, die etwa daneben bestehen, nicht berechnet werden können, falls sie nicht absichtlich herbeigeführt und dann durch genau bestimmte und als gegeben anzusehende Herstellungsbedingungen geregelt werden, war schon früher erwähnt worden. Aber auch dann, wenn anfänglich gar keine Montierungsspannungen vorhanden waren, tritt im allgemeinen ein System von Spannungen auf, das von den Lasten unabhängig ist, sobald sich die Temperaturen der Stäbe ändern. Man bezeichnet sie als Temperaturspannungen und muß sie ebenso sorgfältig

berechnen, wie die von den Lasten selbst herrührenden, da sie unter Umständen sehr groß werden können. Die Temperaturschwankungen, durch die sie hervorgerufen werden, sind gewöhnlich von vornherein gegeben, z. B. bei Konstruktionen, die im Freien aufgestellt sind, durch die meteorologischen Erfahrungswerte.

Sehr leicht überzeugt man sich z. B. von dem Einflusse, den eine Temperaturänderung ausübt, beim Bogenträger mit zwei Gelenken. An einem heißen Sommertage sind die Stäbe viel wärmer, als bei der Montierungstemperatur und wenn sie spannungslos bleiben sollten, müßten sie die Möglichkeit haben, sich dementsprechend auszudehnen. Wäre der Bogenträger als Balken aufgestellt, also eine Auflagerbedingung beseitigt, so würde dem kein Hindernis im Wege stehen. Jeder Stab würde sich dann, falls alle die gleiche Temperatur haben, im selben Verhältnisse verlängert haben und die Trägerfigur würde der ursprünglichen ähnlich geblieben sein. Im gleichen Verhältnisse würde sich demnach auch die Spannweite, also die Entfernung der beiden Auflagerpunkte vergrößert haben. Beim Bogenträger wird aber diese Entfernung durch die Auflagerbedingungen konstant erhalten. Es muß daher ein Auflagerzwang, d. h. ein Horizontalschub auftreten, der die Ausdehnung verhindert. Dieser hat zugleich ein System von Spannungen in allen Stäben zur Folge. — Beim Bogenträger mit drei Gelenken (und überhaupt bei den statisch bestimmten Trägern) ist dies anders. Bei ihm hebt sich einfach das Mittelgelenk um soviel, daß die Spannweite konstant bleibt, während jede Scheibe bei der Erwärmung ihrer ursprünglichen Gestalt ähnlich (wenn auch nicht mehr ähnlich gelegen) bleibt.

Durch die vorhergehenden Bemerkungen ist auch schon ein Weg gewiesen, auf dem man zur Berechnung des durch die Erwärmung hervorgerufenen Horizontalschubes beim einfach statisch unbestimmten Bogenträger gelangen kann. Dieser Horizontalschub muß so groß sein, daß er die Vergrößerung der Spannweite durch die Erwärmung wieder rückgängig machen kann. Versteht man daher in Gl. (62), S. 342 unter x die

gegebene Vergrößerung der Spannweite bei Wegfall des Auflagerzwanges, unter P den gesuchten Horizontalschub, unter S und T, die hier gleich miteinander sind, die durch P hervorgerufenen Stabspannungen (die gleich P mal einer Verhältniszahl sind, die aus einem Kräfteplane für $P = 1$ entnommen werden kann), so kann Gl. (62) unmittelbar nach der Unbekannten P aufgelöst werden.

Übrigens braucht eine gleichmäßige Temperaturänderung aller Stäbe nicht gerade notwendig bei allen statisch unbestimmten Trägern Temperaturspannungen herbeizuführen. Ein über mehrere Öffnungen durchlaufender Fachwerkbalken ohne Mittelgelenke wird z. B. durch die ihm vorgeschriebenen Auflagerbedingungen, obschon deren Zahl auch größer als drei ist, nicht daran gehindert, sich geometrisch ähnlich zu verändern. Es entstehen daher auch keine Spannungen, wenn sich die Temperatur aller Stäbe um gleichviel ändert. Anders ist es aber auch in diesem Falle, wenn einzelne Stäbe mehr erwärmt werden, als andere (also z. B. der frei liegende Obergurt mehr, als der etwa im Schatten liegende Untergurt). Dann treten auch hier Temperaturspannungen auf.

Natürlich kann es sich hier wie in andern Fällen nicht darum handeln, die verschiedenen Umstände, die bei den praktischen Anwendungen vorkommen können, im einzelnen durchzusprechen. Aufgabe der Mechanik ist es nur, die Methoden zu liefern, nach denen solche Aufgaben im allgemeinen gelöst werden können, während die weitere Ausarbeitung und die geschickte Verwendung dieser Methoden bei den einzelnen, praktisch vorliegenden Aufgaben in das Gebiet der Konstruktionslehre gehören.

Ich nehme daher jetzt an, daß irgend ein einzelner Stab, der die Ordnungsnummer k tragen möge, um t Grad Celsius erwärmt (oder bei negativem t abgekühlt) werde, während die übrigen ihre Temperatur behalten sollen. Es handelt sich darum, die Spannungen zu berechnen, die hierdurch in dem statisch unbestimmten Träger hervorgerufen werden.

Wenn der Träger einfach statisch unbestimmt ist, können

wir den Stab k als den überzähligen betrachten. Es könnte freilich auch vorkommen, daß der beliebig ausgewählte Stab k gar nicht als überzähliger aufgefaßt werden dürfte, indem er nicht zu jenem Teile des ganzen Stabverbandes gehörte, der etwa allein statisch unbestimmt wäre. In diesem Falle würde aber die Temperaturänderung des Stabes k überhaupt keine Temperaturspannungen hervorrufen. Denn wenn wir ihn uns herausgenommen dächten, dürfte unter der genannten Voraussetzung der Rest kein steif verbundenes System mehr bilden. Der Rest würde daher einer Entfernung oder Annäherung der Knotenpunkte, zwischen denen der Stab k verlief, keinen Widerstand entgegensetzen, d. h. die Ausdehnung des Stabes unter dem Einflusse der Erwärmung könnte ohne jeden Zwang erfolgen und es kämen überhaupt keine Spannungen zustande. Da dieser Fall ohne weiteres Interesse ist, können wir daher den Stab k als den überzähligen ansehen.

Die im Stabe k auftretende Spannung sei mit X bezeichnet und werde, wie immer, positiv gerechnet, wenn sie eine Zugspannung ist, obschon man natürlich bei einem positiven t eine Druckspannung im Stabe zu erwarten hat. Dies muß sich aber bei der Ausrechnung durch das Vorzeichen von X von selbst herausstellen.

Wie in früheren Fällen zeichnen wir auch jetzt wieder einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Hauptnetze angibt, die zu einer Zugspannung von der Größe der Lasteinheit im überzähligen Stabe gehören. Die tatsächlich im Stabe i auftretende Spannung S_i ist dann

$$S_i = u_i X$$

zu setzen und es handelt sich nur noch um die Ermittelung der Unbekannten X.

Hierzu verfahren wir ebenso wie früher. Wir betrachten ein Spannungsbild Cu, das ohne äußere Lasten (abgesehen von den zugehörigen Auflagerkräften) an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellt und wenden darauf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten an, indem wir als virtuelle Ver-

schiebungswege der Knotenpunkte jene ansehen, die unter dem Einflusse der Erwärmung des Stabes k tatsächlich zustande kommen.

Dabei ist zu beachten, daß die Längenänderung jedes zum Hauptnetze gehörigen Stabes i

$$\Delta l_i = r_i S_i = r_i u_i X$$

zu setzen ist, während beim Stabe k noch ein Glied hinzutritt das unmittelbar auf die Temperaturänderung zurückzuführen ist. Aus dem gegebenen Ausdehnungskoeffizienten η des Materials (für Eisen $\frac{1}{80\,000}$ der Länge für 1^0 C.) und der Länge l_k des Stabes k folgt die auf die Erwärmung für sich zurückzuführende Längenänderung zu

$$\eta l_k t.$$

Dazu kommt die von der Spannung X hervorgerufene Längenänderung $r_k X$, die für ein positives X ebenfalls positiv zu rechnen ist. Man hat daher für den Stab k im Gegensatze zu den übrigen

$$\Delta l_k = r_k X + \eta l_k t = r_k u_k X + \eta l_k t,$$

wenn im letzten Ausdrucke zur Herstellung der Symmetrie mit Δl_i noch der Faktor u_k mit einbezogen wird, der den Wert $+1$ hat.

Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$-\Sigma C u \Delta l = 0$$

oder nach Einführung der Werte von Δl

$$\Sigma u \cdot r u X + \eta l_k t = 0,$$

woraus durch Auflösung nach X

$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r} \tag{72}$$

gefunden wird. Damit ist die zunächst gestellte Aufgabe gelöst und man sieht auch, daß X in der Tat negativ wird, wenn t positiv ist, da sowohl η, als l_k, als $\Sigma u^2 r$ stets positiv sind. Die Summe ist auf den überzähligen Stab mit zu erstrecken und zwar ist für ihn, wie bereits bemerkt, $u_k = +1$ zu setzen.

Die Spannung irgend eines Stabes i ist nun

$$S_i = - u_i \frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r}. \tag{73}$$

Sollten ferner mehrere Stäbe, anstatt eines einzigen, ihre Temperatur um beliebig gegebene Beträge ändern, so setzt sich S_i aus einer entsprechenden Anzahl von Gliedern zusammen, die alle nach dem vorstehenden Muster gebildet sind. Hierbei ist es übrigens nicht nötig, für jeden Fall einen besonderen Kräfteplan u von neuem zu zeichnen. Kommt nämlich nachher die Temperaturerhöhung eines Stabes m in Frage, so tritt an Stelle von u in der vorhergehenden Formel einfach das Verhältnis $\frac{u_i}{u_m}$, wobei der konstante Nenner u^2_m auch noch vor das Summenzeichen gesetzt werden kann. — Anstatt dessen kann man auch die vorige Betrachtung für den Fall der Temperaturänderung mehrerer Stäbe von neuem wiederholen.

Die unmittelbare Anwendung dieser Entwicklungen auf den Fall, daß sich alle Stäbe um gleichviel erwärmen, wäre unbequem und man hilft sich dann besser auf andere Art, wie hier an dem Beispiele des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens gezeigt werden soll. Man kann sich nämlich einen solchen Fachwerkbogen dadurch in einen Balkenträger verwandelt denken, daß man einen Stab a zwischen die Auflagerpunkte einschaltet (Abb. 143), der von so großem Querschnitte angenommen wird, daß er unter der in ihm auftretenden Spannung keine merkliche elastische Längenänderung erfährt. Man braucht dazu nur $r_a = 0$ zu setzen.

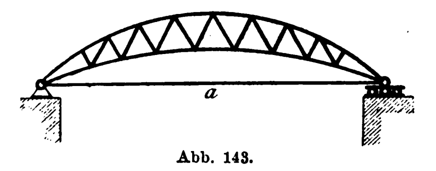


Abb. 143.

Wenn dann das rechte Ende auf ein Rollenlager gesetzt wird, so ist trotzdem die Bedingung noch erfüllt, daß sich dieses Ende unter dem Einflusse von Lasten nicht zu verschieben vermag.

Dagegen kann man sich die Länge des Stabes a unter dem Einflusse von Temperaturänderungen veränderlich denken.

Wenn nun alle übrigen Stäbe in der Temperatur um t^0 erhöht werden, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn sich der Stab a um t^0 abkühlte. Hiernach kann die Spannung jedes Stabes i sofort nach Gl. (73) berechnet werden, wenn man darin Stab k durch Stab a ersetzt. Hierbei ist nur zu beachten, daß bei der Bildung von $\Sigma u^2 r$ für den überzähligen Stab a die Stabkonstante $r_a = 0$ zu setzen ist.

Ähnlich wie vorher hat man auch zu verfahren, wenn der Träger zweifach statisch unbestimmt sein sollte. Die Spannung im Stabe k, der sich um t^0 erwärmt und als ein überzähliger angesehen werden soll, sei wieder mit X, die in einem zweiten überzähligen Stabe mit Y bezeichnet. Dann hat man

$$S_i = u_i X + v_i Y$$

und für jeden Stab, mit Ausnahme von k

$$\Delta l_i = r_i(u_i X + v_i Y).$$

Für den Stab k selbst dagegen wird

$$\Delta l_k = r_k(u_k X + v_k Y) + \eta l_k t.$$

Hierbei sind der Symmetrie wegen u_k und v_k wieder mit aufgenommen, obschon $u_k = +1$ und $v_k = 0$ ist. Dazu erwähne ich noch, daß die Bemerkungen über die Kräftepläne u und v aus § 50, die ich jetzt nicht nochmals zu wiederholen brauche, hier ebenfalls in Geltung bleiben.

Die Anwendung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten auf die beiden Spannungsbilder Cu und Cv liefert die Arbeitsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X\Sigma u^2 r + Y\Sigma uvr + \eta l_k t = 0 \\ X\Sigma uvr + Y\Sigma v^2 r = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

aus deren Auflösung die beiden Unbekannten X und Y gefunden werden.

§ 52. **Einflußlinien für die statisch unbestimmten Größen.**

Die Maxwell-Mohrsche Methode führt am schnellsten zum Ziele, solange es sich nur um die Berechnung der Stabspannungen für einen einzigen, oder doch nur für ganz wenige

Belastungsfälle handelt. Muß man dagegen sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen, wie sie etwa nacheinander bei der Überfahrt eines Eisenbahnzuges über eine Brücke vorkommen, so tut man besser, sich nach andern Hülfsmitteln umzusehen, die nicht dazu nötigen, die ganze Rechnung für jede Laststellung von neuem zu wiederholen.

Der Anschaulichkeit wegen werde ich mich hierbei auf die Besprechung eines verhältnismäßig einfachen Beispieles, nämlich auf die Untersuchung des einfach statisch unbestimmten Fachwerkbogens beschränken, obschon man leicht bemerken wird, daß die ganze Betrachtung ohne wesentliche Änderungen auch allgemeiner durchgeführt werden könnte.

Ein solcher Fachwerkbogen bildet an sich ein statisch bestimmtes Fachwerk und der aus ihm entstehende Träger wird nur dadurch statisch unbestimmt, daß ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als statisch unbestimmte Größe sieht man hier am besten den Horizontalschub an. Sobald dieser für irgend eine Laststellung berechnet ist, kann man alle Stabspannungen auf einfache Art, also etwa durch Zeichnen eines Kräfteplanes erhalten, da die Vertikalkomponenten der Auflagerkräfte ebenso groß sind, wie bei einem Balkenträger, also durch Momentengleichungen oder mit Hülfe eines Seilpolygons sofort ermittelt werden können.

Man nehme nun an, daß eine Einzellast von der Größe der Lasteinheit über den Träger hin fortschreite. Zu jeder Stellung dieser Einzellast sei der Horizontalschub auf irgend eine Art berechnet. Trägt man den Abstand der Last vom einen Auflager her als Abscisse und den zu dieser Laststellung gehörigen Horizontalschub in einem passenden Maßstabe als Ordinate auf, so erhält man einen Linienzug, der als die Einflußlinie für den Horizontalschub bezeichnet wird. Es ist hierbei übrigens nur nötig, den Horizontalschub für die Laststellungen über den Knotenpunkten gesondert zu berechnen. Denn zwischen zwei Knotenpunkten wird die Last von der Fahrbahnkonstruktion aufgenommen, die sie in bekannten Anteilen auf die beiden Knotenpunkte überträgt. Da dieses Ver-

hältnis eine lineare Funktion der Abscisse der Laststellung ist, wird auch die Einflußlinie zwischen beiden Knotenpunkten durch eine gerade Linie gebildet. Die Einflußlinie ist daher ein Polygon, dessen Ecken auf Lotrechten mit jenen Knotenpunkten liegen, an denen die Fahrbahntafel befestigt ist und es ist nur nötig, die Ordinaten dieser Eckpunkte auf irgend eine Art zu berechnen.

Setzen wir für den Augenblick voraus, daß die Einflußlinie bereits konstruiert sei, so kann man mit ihrer Hülfe sofort auch den Horizontalschub für ein beliebiges System senkrechter Lasten angeben. Man braucht nur jede Last mit der Verhältniszahl zu multiplizieren, die als Ordinate der Einflußlinie ihr zugeordnet ist, und die Summe der Produkte zu addieren. Sobald die Einflußlinie gegeben ist, unterscheidet sich daher die Berechnung des Trägers kaum noch von der eines statisch bestimmten Trägers. Ich kann mich daher hier darauf beschränken, die Ermittelung der Ordinaten der Einflußlinie für den Horizontalschub auseinander zu setzen.

Zu diesem Zwecke kann man sich natürlich auch wieder des bereits früher auseinander gesetzten Maxwell-Mohrschen Verfahrens bedienen, indem man für jeden Knotenpunkt, der zur Unterstützung der Fahrbahn dient, den zugehörigen Horizontalschub nach Gl. (67), S. 364 berechnet. Hier soll aber noch ein anderes Verfahren beschrieben werden, das sich auf die Anwendung des Williotschen Verschiebungsplanes in Verbindung mit dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen gründet.

Man denke sich den in Abb. 144[a] gezeichneten Fachwerkbogen zunächst als Balkenträger aufgestellt und an dem auf dem Rollenlager sitzenden Auflagerpunkte eine horizontale Kraft, die gleich der Lasteinheit ist, als einzige Belastung angebracht. Für diesen Belastungsfall wurde auf einem Zeichenblatte in größerem Maßstabe (wonach überhaupt die hierzu gehörigen Figuren, für die nur ein beschränkter Raum zur Verfügung steht, nachträglich verkleinert wiedergegeben sind) ein Kräfteplan gezeichnet, der nichts Bemerkenswertes bietet

und daher hier nicht mit aufgenommen wurde. Indessen sind die aus ihm entnommenen Stabspannungen u in der weiter unten folgenden Tabelle (S. 384) angegeben.

Abb. 144a.

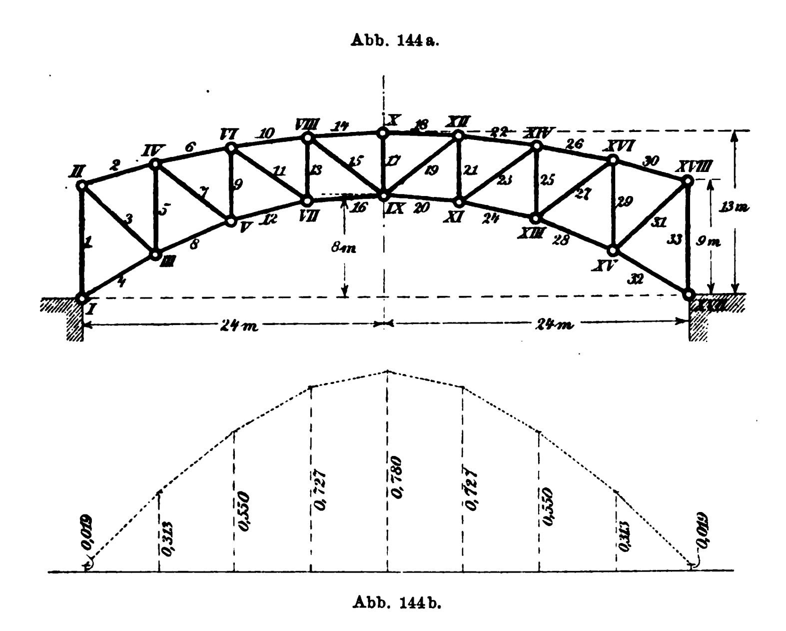


Abb. 144b.

Die Stablängen und auch die Stabquerschnitte müssen als bereits bekannt vorausgesetzt werden, wenn die Einflußlinie konstruiert oder überhaupt die Berechnung der Stabspannungen für den statisch unbestimmten Träger durchgeführt werden soll. Freilich kennt man bei der Aufstellung eines Projektes die Stabquerschnitte nicht von vornherein, sondern beabsichtigt, sie erst auf Grund des Ergebnisses der statischen Berechnung festzusetzen. Es bleibt aber hier nichts anderes übrig, als daß man vorläufig versuchsweise Annahmen über die in Aussicht zu nehmenden Querschnitte macht und zwar auf Grund von Erfahrungen, die man bei früheren ähnlichen Ausführungen oder auch auf Grund von Vorprojekten gewonnen hat. Überzeugt man sich dann nach den Ergebnissen der Berechnung, daß die Stabquerschnitte gegenüber der vorläufigen

Annahme erheblich zu ändern sind, so muß nach Vornahme der Berichtigung die Untersuchung nochmals wiederholt werden und zwar nötigenfalls so oft, bis eine hinreichende Übereinstimmung erzielt ist.

Auch die aus der Zeichnung entnommenen Stablängen und die — übrigens ganz willkürlich gewählten — Stabquerschnitte sind nebst den danach berechneten Stabkonstanten r in der Tabelle zusammengestellt. Dabei genügte es, der symmetrischen Anordnung des Trägers wegen, die Aufzählung der Stäbe auf nur eine Trägerhälfte zu erstrecken. Der Elastizitätsmodul wurde, obschon es auf seinen genaueren Wert gar nicht ankommt, solange es sich nur um die durch die Lasten hervorgerufenen Spannungen handelt, der Anschaulichkeit wegen ebenfalls mit eingesetzt und zwar wurde er zu 2000000 atm angenommen. Hiernach sind die Längenänderungen Δl der Stäbe berechnet, die zum Spannungsbilde u gehören.

Nach diesen Vorbereitungen zeichnet man den Verschiebungsplan für den angenommenen Belastungsfall. Dabei wurde zunächst angenommen, daß Stab 4 seine Richtung nicht ändere. Das erste Stück des Verschiebungsplanes ist in Abb. 145 dargestellt. Dabei sind alle Längenänderungen in 125facher Vergrößerung aufgetragen. Wenn man die Zeichnung in demselben Maßstabe fortsetzen wollte, würde sie aber den hier zur Verfügung stehenden Raum überschreiten. Deshalb ist der gesamte Verschiebungsplan außerdem noch in Abb. 146 in nur 40facher Vergrößerung gezeichnet. Wer die Zeichnung zur Übung wiederholen will, möge sie jedoch in dem Maßstabe der Abb. 145 weiterführen, da sonst selbst bei aller Sorgfalt nur eine ungenügende Genauigkeit erzielt werden könnte.

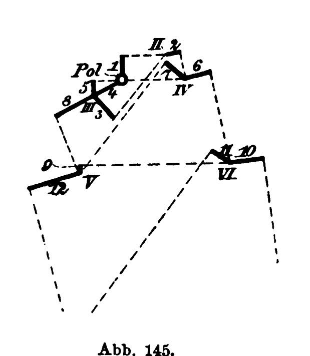


Abb. 145.

Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens, das beim

Zeichnen des Verschiebungsplanes einzuhalten ist, wurde schon in § 48 gegeben. Da sich hier alles nach den dort besprochenen Regeln abspielt, ist es nicht nötig, nochmals darauf zurückzukommen. Nur auf das Zurückdrehen, das nachträglich vorzunehmen ist, sobald der Verschiebungsplan bis zum Auflagerpunkte *XVII* hin durchgeführt wurde, gehe ich noch mit wenigen Worten ein.

Der Auflagerpunkt *XVII* kann sich, da jetzt vorausgesetzt war, daß er auf einem Rollenlager sitze, nur in horizontaler Richtung verschoben haben. Daß Abb. 146 zugleich eine Verschiebung in vertikaler Richtung nachweist, rührt nur von der eingangs zu Grunde gelegten unzutreffenden Voraussetzung her, daß sich die Richtung des Stabes 4 nicht ge-

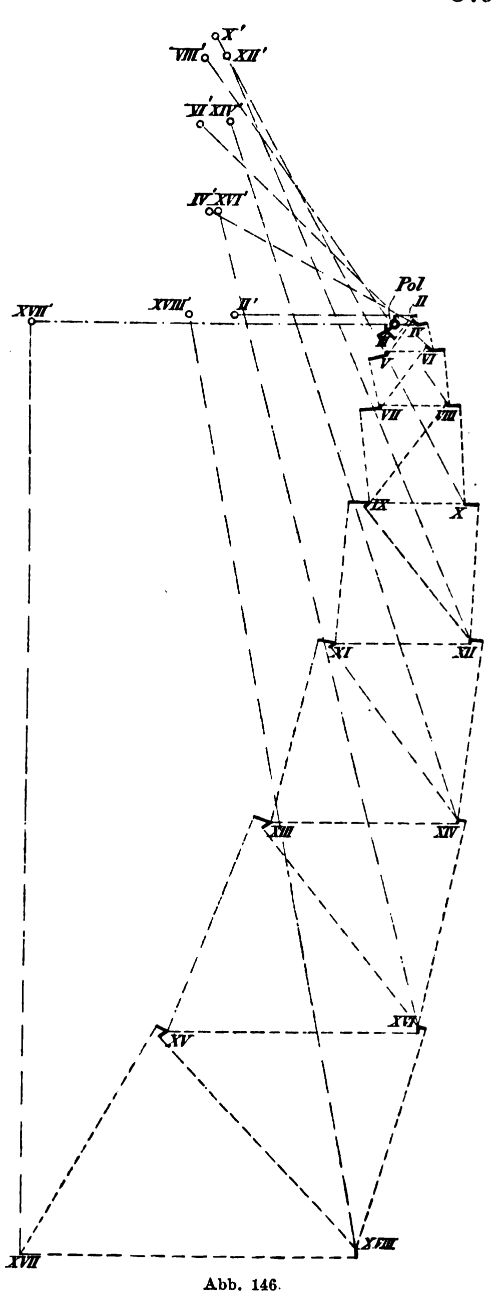


Abb. 146.

ändert habe. Wir müssen daher zuletzt noch eine Drehung des ganzen Trägers ohne Gestaltänderung vornehmen, durch die *XVII* auf die horizontale Auflagerbahn zurückgeführt wird. Hierbei beschreibt *XVII* einen kleinen Kreisbogen um den festen Auflagerpunkt *I*, der im Verschiebungsplane durch eine lotrechte gerade Linie angegeben wird. Wir ziehen also in Abb. 146 eine Horizontale durch den Pol und eine Lotrechte durch *XVII* und erhalten als Schnittpunkt die richtige Lage *XVII'* von Knotenpunkt *XVII* im Verschiebungsplane. Auch alle übrigen Knotenpunkte beschreiben beim Zurückdrehen kleine Kreisbögen um *I*, die im Verschiebungsplane durch geradlinige Strecken darzustellen sind, die senkrecht zu den in Abb. 144[a] von *I* nach den betreffenden Knotenpunkten gezogenen Halbmessern stehen und deren Längen sich zur Strecke *XVII*—*XVII'* des Verschiebungsplanes wie die zugehörigen Halbmesser verhalten.

Dabei war es für unseren Zweck nur nötig, das Zurückdrehen mit den Knotenpunkten des Obergurtes vorzunehmen, an denen, wie dabei vorausgesetzt wird, die Fahrbahn befestigt sein soll, so daß die Lasten an ihnen angreifen. Man hat hierbei noch eine Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, indem der symmetrischen Gestalt des Trägers wegen die sich auf beiden Trägerhälften entsprechenden Knotenpunkte nach der Formänderung in gleicher Höhe, also auch die Punkte *VIII'*, *XII'* u. s. f. des Verschiebungsplanes auf derselben Horizontalen liegen müssen. Außerdem müssen sie auch von einer durch *X'* gezogenen Lotrechten nach beiden Seiten hin um gleichviel abstehen. Bei der im größeren Maßstabe auf dem Zeichenblatte ausgeführten Zeichnung war diese Probe recht befriedigend erfüllt.

Zugleich sei noch darauf hingewiesen, daß die Zeichnung erheblich hätte vereinfacht werden können, wenn man, wie es früher besprochen war, den Verschiebungsplan von dem mittleren Knotenpunkte *X* aus unter der — in diesem Falle auch wirklich zutreffenden — Voraussetzung konstruiert hätte, daß Stab 17 seine Richtung behält. Man hätte dann nachträglich

noch eine für alle Knotenpunkte gemeinsame Verschiebung vorzunehmen gehabt, durch die der feste Knotenpunkt *I* in seine Lage, also im Verschiebungsplane zum Pole (und hiermit zugleich auch Knotenpunkt *XVII* auf seine horizontale Auflagerbahn) zurückgeführt würde. Anstatt dessen hätte man auch umgekehrt den Pol im Verschiebungsplane nachträglich auf Punkt *I* rücken können, womit alle weiteren Änderungen entbehrlich geworden wären. Es hätte auch genügt, den Verschiebungsplan nur für eine Trägerhälfte zu entwerfen.

Obschon ich aber nicht unterlassen wollte, auf die Möglichkeit dieser Vereinfachungen hinzuweisen, hielt ich es doch für besser, zunächst bei dem ursprünglich angegebenen Verfahren stehen zu bleiben, da es nützlicher ist, sich zunächst einmal mit diesem gründlich vertraut zu machen.

Nachdem der Verschiebungsplan fertig ist, kann man daraus mit Hülfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen die in Abb. 144^b (S. 377) bereits unterhalb der Trägerfigur gezeichnete Einflußlinie für den Horizontalschub entnehmen. Hierzu bedenke man, daß die Lasteinheit etwa am Knotenpunkte *VI* eine Horizontalverschiebung des immer noch auf einem Rollenlager sitzend gedachten Auflagerpunktes *XVII* hervorbringt, die nach dem Maxwellschen Satze ebenso groß ist, als die Vertikalverschiebung des Knotenpunktes *VI* bei dem vorigen Belastungsfalle, auf den sich der Verschiebungsplan bezieht. Wir entnehmen also aus Abb. 146 die senkrechte Entfernung des Punktes *VI'* von der durch den Pol gezogenen Horizontalen, die wir mit x_6 bezeichnen wollen und setzen sie gleich der Vergrößerung der Spannweite, die durch eine am Punkte *VI* in lotrechter Richtung angreifende Lasteinheit herbeigeführt wird für den Fall, daß das rechte Auflager auf einem Rollenlager sitzt. Damit diese Verschiebung wieder rückgängig gemacht werde, müssen wir einen Horizontalschub H_6 an dem Auflager anbringen, dessen Berechnung unsere Aufgabe bildet. Wir wissen aber bereits, um wieviel sich der auf dem Rollenlager sitzende Auflagerpunkt unter dem Einflusse einer horizontalen Kraft verschiebt. Dieser Verschiebungs-

weg, der mit y bezeichnet werden mag, ist gleich der Strecke vom Pole des Verschiebungsplanes bis zum Punkte *XVII'*. Für eine horizontale Kraft von der Größe H ist demnach der Verschiebungsweg gleich Hy und da dies gleich x_6 sein soll, finden wir

$$H_6 = \frac{x_6}{y}. \tag{75}$$

Die beiden Strecken sind aus dem Verschiebungsplane bekannt und hiermit auch ihr Verhältnis. Daß H_6 gleich einer Verhältniszahl gefunden wird, rührt davon her, daß es zur Lasteinheit am Knotenpunkte *VI* gehören sollte. Wird eine Last von der beliebigen Größe P an *VI* aufgebracht, so ist der zugehörige Horizontalschub

$$H = P\frac{x_6}{y}. \tag{76}$$

Für alle übrigen Knotenpunkte findet man diese Verhältniszahlen oder „Einflußzahlen" auf gleiche Art. Hiernach wurde die Einflußlinie in Abb. 144^b aufgetragen. Den Ordinaten sind ihre Werte überdies beigeschrieben.

Außerdem mag noch erwähnt werden, daß man ganz ähnlich zu verfahren hat, wenn etwa außer lotrechten auch beliebig geneigte — aber in der Konstruktionsebene des Trägers liegende — Lasten vorkommen sollten. Greift am Knotenpunkte *VI* eine in schiefer Richtung gehende Last an, so hat man im Verschiebungsplane die Strecke vom Pole zum Punkte *VI'* auf eine dazu gezogene Parallele zu projizieren. Nennt man die Projektion jetzt ebenfalls x_6, so folgt der durch die Last hervorgerufene Horizontalschub gleichfalls aus den Gleichungen (75) bezw. (76). — Eine Einflußlinie kann man für den Fall, daß Lasten von allen möglichen Richtungen vorkommen, freilich nicht mehr benutzen. Man kann sich aber etwa dadurch helfen, daß man zwei Einflußlinien zeichnet, eine für senkrechte und eine zweite für horizontal gerichtete Lasten. Dann ist jede gegebene Last in zwei Komponenten zu zerlegen, für jede Komponente der zugehörige Horizontalschub (diesmal stets auf den rechten Auflagerpunkt bezogen) aus den

Einflußlinien zu entnehmen und die Summe aus beiden Werten zu nehmen. — Auch andere Hülfsmittel, auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, bieten sich ohne Schwierigkeiten dar.

Schließlich wurde noch der Horizontalschub des Trägers für den Fall bestimmt, daß an den Knotenpunkten *II* und *XVIII* eine Last von je 500 kg, an allen übrigen Knotenpunkten des Obergurtes eine Last von je 1000 kg angreift. Multipliziert man diese Lasten mit den aus Abb. 144[b] ersichtlichen Einflußzahlen und addiert, so erhält man

$$H = 10 + 313 + 550 + 727 + 780 + 727 + 550 + 313 + 10 = 3980 \text{ kg}.$$

Zum Zwecke des Vergleiches wurde außerdem der Horizontalschub auch nach dem Maxwell-Mohrschen Verfahren für denselben Belastungsfall direkt berechnet. Die Ausrechnung der Summen erfolgte in Form der auf Seite 384 folgenden Tabelle, auf die schon vorher mehrmals hingewiesen wurde.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß die Spannungen T durch die gegebenen Lasten in dem als Balken aufgelagerten Träger hervorgerufen werden. Sie wurden mit Hülfe eines besonderen Kräfteplanes ermittelt, der hier nicht mit aufgenommen wurde. Der Elastizitätsmodul ist gleich 2000000 atm gesetzt.

Für den Horizontalschub findet man nun nach Gl. (67), S. 364

$$H = -\frac{\Sigma urT}{\Sigma u^2 r} = \frac{243{,}91 \cdot 10^{-3}}{60{,}873 \cdot 10^{-6}} = 4007 \text{ kg}.$$

Es genügt nämlich, beide Summen nur auf eine Trägerhälfte zu erstrecken, da sonst nur noch der Faktor 2 in Zähler und Nenner hinzukäme. Deshalb waren vorher auch in der Tabelle die Beiträge von Stab 17 zu den beiden Summen nur zur Hälfte eingesetzt.

Der Vergleich mit dem vorher gefundenen Werte von $H = 3980$ zeigt einen Unterschied von weniger als 1 Prozent, worauf es bei den in der Praxis vorliegenden Aufgaben gewöhnlich nicht ankommt. Freilich ist das Resultat des Vergleiches verhältnismäßig günstig und es fragt sich, ob es sich immer so

gut gestaltet. Jedenfalls ist dies nur durch große Sorgfalt bei der Konstruktion des Verschiebungsplanes zu erreichen und der nach der Mohrschen Methode ermittelte Wert ist im allgemeinen als der genauere zu betrachten. Der Kräfteplan T, der bei ihm noch in Frage kommt, läßt sich nämlich genauer zeichnen, als der Verschiebungsplan. Freilich kann man andererseits beim Ausrechnen der Summen auch leichter einmal einen groben Fehler begehen, als beim Verschiebungsplane, bei dem er sich dem Auge sehr bald bemerklich machen würde.

Tabelle.

Stab Nr.	Stablänge l in cm	Querschnittsfläche F in cm²	$r = \frac{l}{EF}$ in $\frac{cm}{kg}$	Spannung T in kg	Verhältniszahl u	$r\,Tu$	$u^2 r$
1	900	115	$3{,}92 \cdot 10^{-6}$	— 4000	+ 0,59	$- 9{,}25 \cdot 10^{-3}$	$1{,}360 \cdot 10^{-}$
2	630	118	2,67 „	— 3000	+ 0,50	— 4,00 „	0,667 „
3	810	89,9	4,50 „	+ 3900	— 0,65	— 11,45 „	1,900 „
4	720	115	3,14 „	0	— 1,16	0	4,230 „
5	730	89,9	4,05 „	— 3800	+ 0,47	— 7,27 „	0,895 „
6	610	118	2,58 „	— 6200	+ 1,00	— 16,00 „	2,580 „
7	770	89,9	4,27 „	+ 3950	— 0,64	— 10,80 „	1,750 „
8	650	115	2,83 „	+ 3150	— 1,60	— 14,25 „	7,250 „
9	600	89,9	3,33 „	— 2750	+ 0,30	— 2,75 „	0,300 „
10	600	118	2,54 „	— 8600	+ 1,43	— 31,20 „	5,200 „
11	750	89,9	4,16 „	+ 3200	— 0,55	— 7,31 „	1,260 „
12	620	115	2,70 „	+ 6200	— 2,05	— 34,30 „	11,300 „
13	530	89,9	2,94 „	— 1150	+ 0,03	— 0,10 „	0,027 „
14	600	118	2,54 „	— 9700	+ 1,60	— 39,40 „	6,500 „
15	770	89,9	4,28 „	+ 1400	— 0,23	— 1,38 „	0,226 „
16	600	115	2,61 „	+ 8600	— 2,43	— 54,50 „	15,400 „
17	500	89,9	2,78 „	— 250	— 0,14	+ 0,05 „ *)	0,028 „ *)
					Summen:	$- 243{,}91 \cdot 16^{-3}$	$60{,}873 \cdot 10^{-}$

*) Für den Stab 17 sind nur die Hälften eingesetzt, weil er zu jeder Trägerhälfte gehört. — In der ersten Auflage kam an dieser Stelle ein Vorzeichenfehler vor, der jetzt verbessert ist.

§ 53. Die Ausnahmefachwerke als statisch unbestimmte Konstruktionen.

Ein Fachwerk oder ein Fachwerkträger möge die zur Herstellung der Steifigkeit im allgemeinen erforderliche Anzahl von Stäben gerade besitzen; dabei soll aber der in den vorhergehenden Abschnitten schon mehrfach besprochene Ausnahmefall vorliegen, bei dem nicht infolge der Gliederung im allgemeinen, sondern wegen der besonderen Gestalt der Trägerfigur die Stäbe trotz ihrer sonst ausreichenden Anzahl keine hinreichende Steifigkeit herbeiführen. Ich erinnere besonders daran, daß der Ausnahmefall dahin erklärt werden kann, daß sich ein Stab gerade im Maximum oder Minimum der Länge befindet, die mit den Längen der übrigen Stäbe (und den Auflagerbedingungen) verträglich ist. Denkt man sich nämlich einen Stab aus einem statisch bestimmten Fachwerke (oder Fachwerkträger) entfernt, so erhält man, wie schon wiederholt auseinander gesetzt wurde, einen Mechanismus, bei dessen Bewegung sich die Entfernung der Endknotenpunkte des herausgenommenen Stabes im allgemeinen ändert. In diesem Falle reicht der Stab, wenn er wieder eingesetzt wird, aus, um die Bewegung zu verhindern und die Konstruktion ist steif. Befindet sich die Stablänge, also die Entfernung der beiden Endknotenpunkte aber zufällig in einem Maximum oder Minimum, so ist die Änderung dieser Entfernung bei einer unendlich kleinen Bewegung des Mechanismus unendlich klein von der zweiten Ordnung und der Stab kann, wenn er wieder eingesetzt wird, diese Bewegung nicht verhindern; die Konstruktion ist verschieblich, — in der Theorie nur unendlich wenig, in Wirklichkeit aber wegen der Fähigkeit der Stäbe, ihre Längen unter dem Einflusse von Belastungen oder von Temperaturschwankungen etwas zu ändern, verhältnismäßig stark verschieblich.

Wir fanden ferner, daß im Ausnahmefalle, solange man die Stablängen als unveränderlich ansieht, zu beliebig gegebenen Lasten im allgemeinen unendlich große Stabspannungen ge-

hören. Indessen kann man bei den Ausnahmefachwerken, wie sie hier kurz genannt werden sollen, auch solche besondere Belastungsarten angeben, die nicht zu unendlich großen Stabspannungen führen. Man braucht z. B. nur zwei durch einen Stab verbundene Knotenpunkte mit zwei entgegengesetzten gleichen Kräften auseinander zu ziehen. Wenn andere Lasten nicht vorkommen, treten keine unendlich großen Stabspannungen auf. Der Stab zwischen beiden Knotenpunkten reicht dann schon für sich allein aus, um die angenommene Belastung aufzunehmen, ohne daß die übrigen dabei mitwirken müßten. Man wäre aber im Irrtume, wenn man auf Grund dieser Überlegung annehmen wollte, daß dieser Stab nun auch allein gespannt würde, während die übrigen spannungslos blieben. Die Ausnahmefachwerke sind vielmehr solchen Lasten gegenüber, die nicht zu unendlich großen Stabspannungen führen, statisch unbestimmt.

Denkt man sich nämlich in dem soeben besprochenen Falle den Stab zwischen den beiden belasteten Knotenpunkten entfernt, so erhält man einen Mechanismus, der sich zwar im allgemeinen zu bewegen vermag, der sich aber unter der gegebenen Belastung im Gleichgewichte (im labilen oder im stabilen, jenachdem der herausgenommene Stab gerade im Minimum oder im Maximum seiner Länge steht) befindet. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man den Mechanismus eine unendlich kleine virtuelle Bewegung ausführen läßt. Dabei ist die Summe der Arbeiten der beiden Lasten gleich Null (oder doch unendlich klein zweiter Ordnung), weil sich die Entfernung der beiden Angriffspunkte bei der Bewegung nach Voraussetzung nicht ändert. Das ist aber die ausreichende Bedingung für das Gleichgewicht der beiden äußeren Kräfte an dem Mechanismus. Hiernach kann auch schon durch Spannungen in den zu dem Mechanismus gehörigen Stäben an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht hergestellt werden. Man erkennt daraus, daß in dem Ausnahmefachwerke bei den hier in Frage kommenden Belastungsfällen unendlich viele Spannungsbilder möglich sind, die an allen Knotenpunkten Gleich-

gewicht herstellen. Bei dem einfachsten Falle, daß nur die Endknotenpunkte eines Stabes auseinander gezogen werden, unterscheiden sich diese verschiedenen Spannungsbilder in dem Verhältnisse voneinander, nach dem sich die Last auf den dazwischen liegenden Stab und auf den nach dessen Fortnahme entstehenden Mechanismus verteilt.

Man kann nun auch leicht angeben, welche Bedingung von einem Lastensysteme jedenfalls erfüllt sein muß, damit es zu keinen unendlich großen Stabspannungen im Ausnahmefachwerke führt. Nimmt man nämlich einen Stab heraus, so müssen sich die gegebenen Lasten an dem hiermit gebildeten Mechanismus im Gleichgewichte halten. Auch ohne Mitwirkung des herausgenommenen Stabes läßt sich dann schon an allen Knotenpunkten Gleichgewicht herstellen. Je nachdem sich der herausgenommene Stab an der Lastübertragung selbst beteiligt, hat man wieder unendlich viele statisch mögliche Spannungsbilder.

Zugleich erkennt man, daß im Ausnahmefachwerke auch selbst beim Fehlen aller Lasten Stabspannungen möglich sind. Denn man denke sich irgend einen Stab beliebig gespannt. Nimmt man ihn heraus und ersetzt seine Spannung an den Endknotenpunkten durch äußere Kräfte, so ist, wie wir schon vorher sahen, der entstehende Mechanismus unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewichte. Man kann daher Stabspannungen in den zu dem Mechanismus gehörigen Stäben angeben, die mit der willkürlich angenommenen Spannung des herausgenommen gedachten Stabes überall Gleichgewicht herstellen.

Obschon das Ausnahmefachwerk sonst als ein Grenzfall des statisch bestimmten Fachwerkes erscheint, teilt es, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, viele Eigenschaften mit dem statisch unbestimmten Fachwerke. In der Tat muß man auch zur Berechnung der Stabspannungen für jene Belastungsfälle, die nach dem Vorhergehenden überhaupt als zulässig erscheinen, dieselben Methoden anwenden, wie beim statisch unbestimmten Fachwerke.

Man nehme also einen Stab heraus und ermittele mit Hülfe eines Kräfteplanes T die Spannungen in den Stäben des Mechanismus, die zu den gegebenen Lasten gehören. Dann zeichne man einen Kräfteplan u, der die Spannungen im Mechanismus liefert, die durch eine Einheitsspannung in dem vorher beseitigten Stabe hervorgerufen werden. Nachdem dies geschehen ist, findet man die Spannung X des beseitigten Stabes auf Grund derselben Überlegungen wie in § 49 nach der schon damals für das statisch unbestimmte Fachwerk abgeleiteten Formel (67), S. 364

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}.$$

Auch die Spannungen aller übrigen Stäbe folgen dann leicht in derselben Weise wie früher.

§ 54. **Fortsetzung.**

Bisher war nur von solchen Belastungen des Ausnahmefachwerkes die Rede, die sich selbst als Ausnahmefälle darstellen. Wird das Ausnahmefachwerk in anderer, also in beliebiger Weise belastet, so müßten die Stabspannungen zwar unendlich groß werden, wenn die Stäbe ihre Längen nicht ändern könnten. In Wirklichkeit wird aber unter dem Einflusse der Belastung und der durch sie hervorgerufenen Stabspannungen eine Gestaltänderung des Fachwerkes eintreten, die, wie wir schon wissen, verhältnismäßig (nämlich im Verhältnisse zu den elastischen Längenänderungen der Stäbe selbst) groß ist. Damit hört der Ausnahmefall auf, genau verwirklicht zu sein und die Spannungen der Stäbe werden nicht unendlich groß, sondern nur, weil sich die Gestalt des Fachwerkes immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden entfernt hat, sehr groß ausfallen.

Im allgemeinen wird man nun zwar, wie schon früher bemerkt wurde, die Ausnahmefachwerke ihrer ungünstigen Eigenschaften wegen vermeiden. Wenn es sich aber nur um verhältnismäßig geringe Lasten handelt, die von einer Tragkonstruktion aufzunehmen sind, so daß man die dadurch hervor-

gerufenen, wenn auch sehr stark vergrößerten Spannungen nicht zu fürchten braucht, kann man doch gelegentlich mit Rücksicht auf andere Erwägungen zur Ausführung von Ausnahmefachwerken schreiten. Man muß dann imstande sein, die tatsächlich (an Stelle der unendlich großen) auftretenden Stabspannungen zu berechnen. Ein ganz allgemein anwendbares direktes Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe ist bisher, soviel mir bekannt ist, nicht ausgearbeitet worden und ich will mich jetzt auch nicht mit einem Versuche aufhalten, die Lücke auszufüllen. Dagegen ist es in den einzelnen Fällen, also bei gegebener Gliederung des Ausnahmefachwerkes, in der Regel leicht möglich, einen Weg für die Lösung der Aufgabe, der dem besonderen Falle angepaßt ist, ausfindig zu machen. Ich werde das Verfahren hier an einem Beispiele zeigen, das der Praxis unmittelbar entnommen ist.

Die früher besprochenen Methoden für die Ermittelung der Stabspannungen versagen nämlich in diesem Falle. Wenn man bereits wüßte, in welche Gestalt das Fachwerk infolge der Belastung endgültig übergeht, wäre die Lösung der Frage freilich sehr einfach. Denn nach der Gestaltänderung ist das Fachwerk nicht mehr im Ausnahmefalle und damit wird es statisch bestimmt. Kann man also aus der unmittelbaren Beobachtung an einem bereits ausgeführten Ausnahmefachwerke die Gestaltänderung feststellen, die es nach einer Belastung erfahren hat, so findet man die nun in den Stäben bestehenden Stabspannungen sofort durch Zeichnen eines Kräfteplanes oder auch nach einer der andern früher besprochenen Methoden. Die Schwierigkeit besteht aber darin, daß man die zu erwartende Gestaltänderung von vornherein in der Regel gar nicht kennt, sondern sie selbst erst voraussagen soll.

Abb. 147 (S. 390) zeigt das Beispiel, an dem die Lösung der Aufgabe durchgeführt werden soll. Die Stäbe 3 und 3′ sollen im spannungslosen Zustande in einer Geraden; Knotenpunkt II also mit I und I′ ursprünglich in gleicher Höhe gelegen haben. Nachdem die Last P am Knotenpunkte II angebracht ist, senkt sich dieser um eine Strecke f, die zwar

im Vergleiche zu den Stablängen immer noch klein, gegenüber den elastischen Längenänderungen der Stäbe dagegen sehr groß ist. Man soll f und die Stabspannungen berechnen.

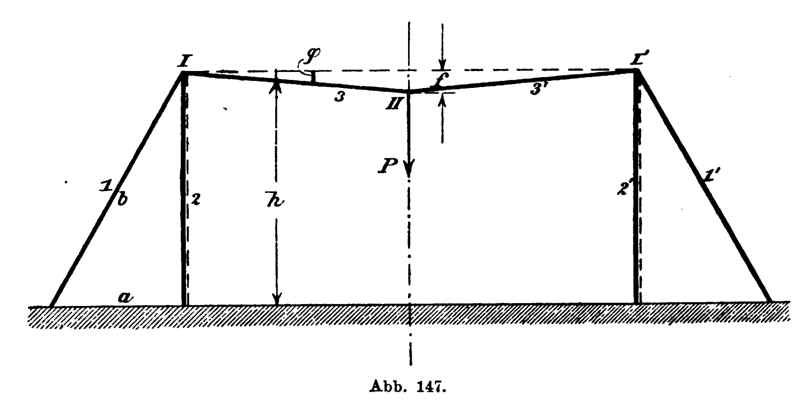


Abb. 147.

Stabgerüste von der durch die Abbildung gegebenen Anordnung sieht man öfters zur Aufhängung von Bogenlampen angewendet, die über der Mitte einer zwischen den Stäben 2 und 2′ liegenden Straße angebracht werden sollen. Man wünscht in diesem Falle gewöhnlich, daß die Stäbe 3 und 3′ im belasteten Zustande nicht viel von der Horizontalen abweichen, hauptsächlich wohl, um größere pendelnde Bewegungen der Lampen bei windigem Wetter zu vermeiden. Da das Gewicht einer Bogenlampe nicht besonders groß ist, braucht man vor der Anwendung eines Ausnahmefachwerkes nicht zurückzuschrecken und kann die Stäbe 3 und 3′ im spannungslosen Zustande auf dieselbe Gerade legen. Da diese Stäbe nur Zugspannungen aufzunehmen haben, können sie natürlich auch aus Drahtseilen hergestellt werden.

In der Gestalt, die das Stabgerüst nach der Belastung annimmt, wie es in der Abbildung gezeichnet ist, bildet es einen statisch bestimmten ebenen Fachwerkträger. Die Knotenpunkte I und I′ sind durch je zwei Stäbe mit der festen Erde und der Knotenpunkt II mit den beiden vorigen ebenfalls durch zwei Stäbe verbunden. Kennt man die Senkung f von Knotenpunkt II und hiermit die Trägergestalt nach der Form-

änderung, so braucht man zur Ermittelung der Stabspannungen nur zwei Kräftedreiecke zu zeichnen, zuerst das für Knotenpunkt II und dann das für I. In Abb. 148 ist der aus den beiden Kräftedreiecken bestehende Kräfteplan angegeben. Die Spannungen in der rechten Trägerhälfte stimmen mit denen in der linken der Symmetrie wegen überein.

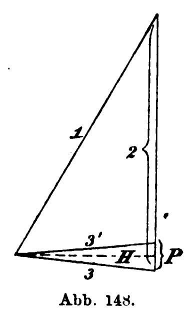


Abb. 148.

Der Umstand, daß die neue Trägergestalt bereits ausreichend durch den Verschiebungsweg eines einzigen Knotenpunktes beschrieben wird, erleichtert die Aufgabe erheblich. Die Knotenpunkte I und I′ sind steif mit der festen Erde verbunden und ihre Verschiebungswege während der Gestaltänderung sind daher von derselben Ordnung klein wie die Längenänderungen der Stäbe, also viel kleiner als die Senkung f des Knotenpunktes II. Deshalb genügt es auch, die Senkung f zu kennen, um die Stabspannungen zu berechnen.

Freilich haben die kleinen Horizontalverschiebungen der Knotenpunkte I und I′ selbst einen großen Einfluß auf die Größe der Senkung f von II. Zunächst möge aber, um die Lösung der Aufgabe für den allereinfachsten Fall vorweg zu nehmen, vorausgesetzt werden, daß sich die Knotenpunkte I und I′ überhaupt nicht verschieben. Man kann sich etwa die Stangen 1 und 2 als starr und nur 3 als elastisch dehnbar vorstellen oder man kann anstatt dessen annehmen, daß das Seil 3 3′ zwischen zwei gegenüber stehenden Häusern ausgespannt ist, so daß also die Knotenpunkte I und I′ mit zur festen Erde gehören.

In diesem Falle findet man f aus der folgenden einfachen Rechnung. Man bezeichne die ursprüngliche Länge von Stab 3 mit l, die Längenänderung mit Δl, dann ist nach dem Pythagoräischen Satze

$$(l + \Delta l)^2 = l^2 + f^2$$

und hieraus, mit Vernachlässigung des von höherer Ordnung kleinen Gliedes Δl^2 gegenüber $2 l \Delta l$,

$$\Delta l = \frac{f^2}{2l}. \qquad (77)$$

Andererseits hängt aber Δl auch mit der Stabspannung S zusammen und diese kann aus einem Kräftedreiecke entnommen werden. Man braucht sich nur in Abb. 147 von I aus eine Parallele zu 3′ bis zur Symmetrieachse gezogen zu denken, um ein Dreieck zu erhalten, das unter Voraussetzung eines passend gewählten Maßstabes als Kräftedreieck betrachtet werden kann. Man hat daher die Proportion

$$\frac{S}{P} = \frac{l}{2f} \quad \text{und hieraus} \quad S = \frac{Pl}{2f}. \tag{78}$$

Für die Stabverlängerung Δl findet man daraus, unter Benutzung der Stabkonstanten r

$$\Delta l = rS = \frac{Plr}{2f}. \tag{79}$$

Setzt man die beiden für Δl aufgestellten Ausdrücke einander gleich, so erhält man eine Gleichung, in der f die einzige Unbekannte bildet. Man findet

$$\frac{f^2}{2l} = \frac{Plr}{2f} \quad \text{und hieraus} \quad f = \sqrt[3]{Pl^2r}.$$

An Stelle von r kann man noch seinen Wert $\frac{l}{EF}$ einführen und nachträglich auch noch S durch Einführung des Ausdruckes für f in die zuvor schon aufgestellte Formel (78) berechnen. Dadurch erhält man

$$f = l\sqrt[3]{\frac{P}{EF}}\,; \quad S = \frac{1}{2}\sqrt[3]{P^2EF}. \tag{80}$$

Beachtenswert ist hierbei, daß sowohl die Spannung als (in noch höherem Grade) die Formänderung nicht proportional mit der Last P wachsen, wie bei den stabilen Fachwerken, sondern langsamer. Wenn man bedenkt, daß das Fachwerk um so widerstandsfähiger wird, je weiter es sich vom Ausnahmefalle entfernt, kann dies auch nicht überraschen. Bei der Deutung der Formeln beachte man ferner, daß das darin neben P vorkommende Produkt EF selbst eine Kraft vorstellt, aber eine ganz außerordentlich große, die z. B. bei Eisen ungefähr 2000mal so groß ist, als die zulässige Spannung des Stabes 3. Bei Drahtseilen ist sie allerdings wegen des

kleinen Wertes von E weit kleiner, aber doch immer noch ziemlich groß gegenüber der zulässigen Spannung des Seiles.

Nach Erledigung des einfacheren Falles kehre ich nun zur ursprünglichen Aufgabe zurück. Aus dem Kräfteplane in Abb. 148 erkennt man, daß sich die Spannungen von 3 und 3′ nur unerheblich von ihrer Horizontalkomponenten H unterscheiden und daß auch 2, obschon der Unterschied hier etwas größer ist, genau genug bis zum Endpunkte von H, anstatt bis zum Endpunkte von P gerechnet werden kann. Wenn man sich diese geringe Vernachlässigung, die ohne merklichen Einfluß auf das Schlußresultat ist, zur Vereinfachung der Rechnung gestattet, stehen die drei Spannungen S_1 S_2 S_3 in einem von vornherein bekannten Verhältnisse zueinander, da sie sich wie die Seiten b, h, a des zwischen den Stäben 1 und 2 liegenden Dreieckes der Trägerfigur zueinander verhalten. Man hat daher

$$S_1 = S_3 \cdot \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad S_2 = S_3 \cdot \frac{h}{a}$$

und hieraus folgt für die Längenänderungen der Stäbe 1 und 2

$$\Delta l_1 = S_3 \cdot r_1 \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \Delta l_2 = S_3 \cdot r_2 \frac{h}{a} \cdot$$

Wäre S_3 gleich der Lasteinheit, so könnte man die Verschiebung des Knotenpunktes I sofort mit Hülfe des in Abb. 149 gezeichneten Verschiebungsplanes erhalten. Die Horizontalkomponente des unter dieser Voraussetzung gefundenen Verschiebungsweges ist in der Abbildung mit c bezeichnet. Da S_3 aber nicht gleich der Lasteinheit ist, so hat diese Horizontalkomponente in Wirklichkeit den Wert $S_3 \cdot c$.

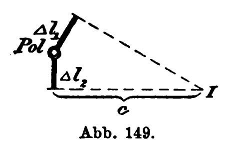


Abb. 149.

Das Ausweichen von I um eine kleine Strecke in horizontaler Richtung hat auf die Senkung f von II denselben Einfluß, als wenn sich der Stab 3 um das gleiche Maß mehr gedehnt hätte. An Stelle von Gl. (77) tritt daher jetzt

$$S_3 c + \Delta l_3 = \frac{f^2}{2 l_3} \cdot$$

Die Gleichungen (78) und (79) können dagegen ohne weiteres übernommen werden. Man hat daher

$$\Delta l_3 = \frac{P l_3 r_3}{2 f}$$

und wenn man dies und den Wert von S_3 in die vorhergehende Gleichung einsetzt, findet man

$$\frac{P l_3}{2 f} c + \frac{P l_3 r_3}{2 f} = \frac{f^2}{2 l_3}.$$

In dieser Gleichung ist f die einzige Unbekannte und durch Auflösen findet man

$$f = \sqrt[3]{P l_3^2 (c + r_3)}. \tag{81}$$

Natürlich kann man die Strecke c des Verschiebungsplanes, wenn man will, auch durch trigonometrische Rechnung bestimmen, da von dem Vierecke, in dem es als Seite vorkommt, zwei Seiten $\left(\Delta l_1 = r_1 \frac{b}{a} \text{ und } \Delta l_2 = r_2 \frac{h}{a}\right)$ und alle Winkel gegeben sind. Die zeichnerische Ermittelung ist aber bequemer und soll daher hier beibehalten werden.

Setzt man in Gl. (81) $c = 0$, so geht sie wieder — unter Beachtung des für r_3 einzusetzenden Wertes — in die erste der Gl. (80) über. — Nachdem f bekannt ist, findet man auch S_3 in derselben Weise wie vorher und hierauf S_1 und S_2. Es ist nicht nötig, die Formeln anzuschreiben.

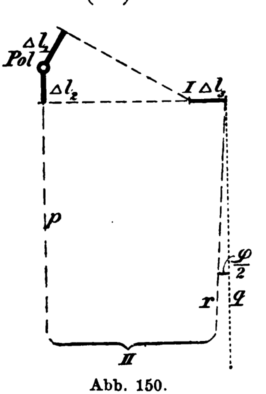


Abb. 150.

Dagegen soll noch auf einen besonderen Umstand hingewiesen werden, der sich geltend macht, wenn man den Verschiebungsplan, der in Abb. 149 nur bis zum Knotenpunkte I ausgedehnt wurde, zum Knotenpunkte II weiterzuführen sucht. In Abb. 150 ist das erste Polygon des Verschiebungsplanes in Übereinstimmung mit Abb. 149 aufgetragen. Man beachte nun, daß sich Knotenpunkt II der Symmetrie wegen nur in lotrechter Richtung nach abwärts verschieben kann. Zieht man

also vom Pole aus die Linie p in lotrechter Richtung, so muß auf ihr der Punkt II des Verschiebungsplanes enthalten sein. Trägt man ferner von I aus die Längenänderung Δl_3 ab, so liegt II auch auf einem durch den Endpunkt dieser Strecke gehenden Kreisbogen, dessen sehr großer Halbmesser durch die Länge des Stabes 3 angegeben wird. Wollte man aber, wie es sonst stets geschehen darf, den Kreisbogen durch eine senkrecht zur Stabrichtung gezogene gerade Linie q ersetzen, so würde diese parallel zu p gehen und der Schnittpunkt II fiele ins Unendliche. Dies bestätigt zunächst, daß die Senkung von II jedenfalls sehr groß ist im Verhältnisse zu den Längenänderungen der Stäbe. Zugleich erkennen wir aber, daß es hier mit Rücksicht auf die verhältnismäßig große Länge des Kreisbogens nicht mehr zulässig ist, ihn durch eine Gerade zu ersetzen, die senkrecht zur Richtung des ersten Halbmessers steht.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Richtung von 3 und der Horizontalen in Abb. 147 mit φ und beachtet man, daß dieser Winkel zugleich der Zentriwinkel des Kreisbogens ist, den wir durch eine Gerade ersetzen wollen, so erkennt man, daß die zum Kreisbogen gehörige Sehne den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ mit der lotrechten Richtung einschließt. Wir ziehen also in Abb. 150 eine Linie r, die gegen q um $\frac{\varphi}{2}$ geneigt ist. Der Schnittpunkt von p und r liefert den Punkt II des Verschiebungsplanes. — Freilich setzt diese Konstruktion voraus, daß φ vorher schon auf andere Art ermittelt ist.

Aufgaben.

32. Aufgabe. Die Stäbe 1 und 2 in Abb. 151 liegen in einer senkrechten Ebene und sind an einer Wand befestigt, mit der sie ein gleichseitiges Dreieck von 1 m Seitenlänge bilden. Beide Stäbe sind aus Winkeleisen von 15 qcm Querschnittsfläche gebildet. Um wieviel senkt sich der freie Knotenpunkt unter einer Last P von 5000 kg, wenn der Elastizitätsmodul $= 2 \cdot 10^6$ *atm gesetzt wird?*

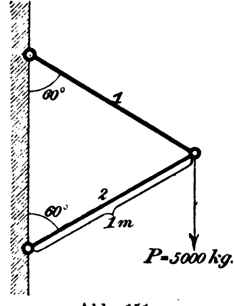


Abb. 151.

Lösung. Nach der Maxwell-Mohrschen Formel, Gl. (62), ist die Senkung x des Knotenpunktes

$$x = \frac{1}{P} \sum STr$$

und hier fällt das Spannungsbild S mit dem Spannungsbilde T zusammen und jede dieser beiden Spannungen ist für jeden Stab dem Absolutwerte nach gleich P oder gleich 5000 kg. Die Stabkonstante r ist für jeden Stab

$$r = \frac{l}{EF} = \frac{100\ \text{cm}}{2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 15\ \text{cm}^2} = 3{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{1}{5000} \cdot 2 \cdot 5000^2 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-6} = 3{,}33 \cdot 10^{-2}\ \text{cm} = 0{,}33\ \text{mm}.$$

Die Senkung beträgt also $^1/_3$ mm. — Es ist nützlich, für dieses einfache Beispiel zur Übung auch den Verschiebungsplan zu konstruieren. Dies ist in Abb. 152 geschehen. Von einem Pole O aus trägt man zunächst die Längenänderungen der Stäbe ab. Für jeden Stab ist die Längenänderung

$$\Delta l = 5000\ \text{kg} \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{kg}} = 16{,}67 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}$$

und zwar verlängert sich Stab 1 um diesen Betrag, während sich Stab 2 um ebensoviel verkürzt. In Abb. 152 sind diese Längenänderungen in hundertfacher Vergrößerung abgetragen und zwar Δl_1 von O aus nach rechts abwärts, weil die Verlängerung von Stab 1 für sich genommen eine Bewegung des freien Knotenpunktes nach dieser Richtung hin hervorbringt, während Δl_2 nach links abwärts aufzutragen ist. Hieran schließen sich die zum Ersatze der Kreisbögen dienenden Senkrechten und deren Schnittpunkt liefert den gesuchten Punkt des Verschiebungsplanes. Man erkennt nun auch, daß sich der freie Knotenpunkt ausschließlich in senkrechter Richtung verschiebt. Auch aus der Figur findet man, ohne erst nachmessen zu müssen, daß der Verschiebungsweg doppelt so groß ist, als die Längenänderung jedes der beiden Stäbe.

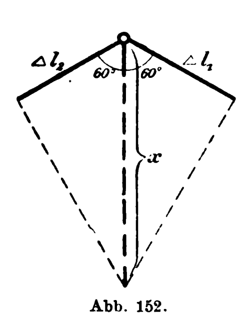


Abb. 152.

33. *Aufgabe. Sechs Stäbe sind zu einem Quadrate mit eingeschobenen Diagonalen (Abb. 153) verbunden und haben alle gleichen*

Querschnitt. An den Endknotenpunkten von 5 greifen zwei Lasten von der Größe P an; man soll die dadurch hervorgerufenen Stabspannungen berechnen.

Lösung. Wir betrachten Stab 6 als überzählig. Im Hauptnetze nimmt dann Stab 5 die Spannung P allein auf, während die übrigen Stäbe spannungslos sind. Dies folgt schon daraus, daß im statisch bestimmten Hauptnetze nur auf eine Art Gleichgewicht an allen Knotenpunkten hergestellt werden kann. Die eine, sofort als möglich erkannte Art der Lastübertragung, bei der nur Stab 5 in Spannung gerät, ist daher die richtige. Man kann sich davon auch noch durch die Überlegung überzeugen, daß nach Beseitigung des überzähligen Stabes 6 die Stäbe 1 und 2 allein an einem Knotenpunkte zusammenstoßen, an dem keine äußere Kraft angreift. Da diese Stäbe nicht in die gleiche Richtungslinie fallen, könnten Spannungen, die etwa in ihnen auftreten sollten, unmöglich im Gleichgewichte miteinander stehen. Beide Stäbe sind also, ebenso wie die Stäbe 3 und 4, für die sich dieselbe Betrachtung wiederholen läßt, unter der Voraussetzung, daß Stab 6 beseitigt ist, spannungslos. Man hat also

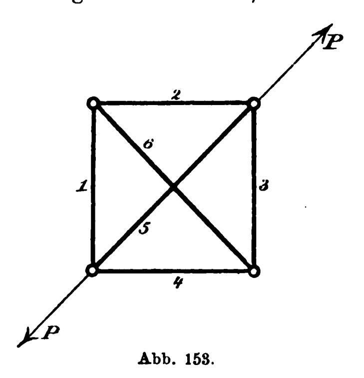


Abb. 153.

$$T_5 = +P \quad \text{und} \quad T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0.$$

Nun bringt man an den Endknotenpunkten des beseitigten Stabes Kräfte von der Lasteinheit an von solcher Richtung, wie sie einer in diesem Stabe auftretenden Zugspannung entsprechen. Die Spannungen im Hauptnetze, die diesem Belastungsfalle entsprechen, lassen sich durch Zeichnen eines Kräfteplanes ermitteln. Es ist aber gar nicht einmal nötig, den Kräfteplan wirklich auszuführen, da man bei der Einfachheit der Figur sofort vorauszusehen vermag, wie groß diese Spannungen ausfallen. Man hat nämlich (wenn wie gewöhnlich das negative Vorzeichen eine Druckspannung angibt)

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad u_5 = +1.$$

Hierbei ist daran zu erinnern, daß die Spannnng u des überzähligen Stabes stets gleich $+1$ zu setzen ist, also

$$u_6 = +1.$$

Die Stabkonstanten r sind für die vier Umfangsstäbe untereinander gleich; der gemeinsame Wert sei mit r ohne Zeiger bezeichnet. Für die Diagonalen sind die Stabkonstanten der größeren Länge wegen $\sqrt{2}$ mal so groß, also

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r \quad \text{und} \quad r_5 = r_6 = r\sqrt{2}.$$

Nun bleibt nur noch übrig, die aufgestellten Werte in die Gl. (67)

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}$$

einzuführeu. Zur Summe im Zähler trägt hier nur der Stab 5 ein Glied bei. Von den sechs Gliedern der Summe im Nenner sind jene vier, die sich auf die Umfangsstäbe beziehen, unter einander gleich und ebenso die beiden andern unter sich. Man hat daher

$$X = -\frac{u_5 r_5 T_5}{4 \cdot u_1{}^2 r_1 + 2 \cdot u_5{}^2 r_5} = -\frac{r\sqrt{2} \cdot P}{4 \cdot \frac{1}{2} r + 2 \cdot r\sqrt{2}} = -0{,}293\ P.$$

Der überzählige Stab erfährt demnach eine Druckspannung. Auch die Spannungen der übrigen Stäbe ergeben sich nun nach der Gleichung

$$S = T + uX,$$

also z. B. für den Stab 1

$$S_1 = 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-0{,}293\ P) = +0{,}207\ P.$$

Auch die drei übrigen Umfangsstäbe nehmen Zugspannungen von demselben Betrage auf. Der Stab 5 endlich erfährt die Spannung

$$S_5 = +P + (+1) \cdot (-0{,}293\ P) = +0{,}707\ P.$$

Anmerkung. Hier war vorausgesetzt, daß die Diagonalstäbe 5 und 6 an der Kreuzungsstelle übereinander weggehen, ohne miteinander verbunden zu sein. Aber auch dann, wenn man sie an dieser Stelle miteinander verbindet, treten dieselben Spannungen auf, wie vorher. Jede Diagonale besteht dann aus zwei Stäben und wir haben im ganzen acht Stäbe, zugleich aber auch einen Knotenpunkt mehr. Die notwendige Stabzahl für fünf Knotenpunkte beträgt sieben, demnach ist das Fachwerk immer noch einfach statisch unbestimmt. An Stelle des Stabes 6 nehmen wir jetzt einen der beiden Stäbe heraus, in die 6 durch den mittleren Knotenpunkt zerlegt ist. Die Kräftepläne T und u fallen nun gerade so aus wie vorher, abgesehen davon, daß im Kräfteplane u

die andere Hälfte von 6 ebenfalls mit der Spannung + 1 vorkommt. Bildet man hierauf die Summen, die in der Formel für X auftreten, so ändert sich an der im Zähler überhaupt nichts; bei der Summe im Nenner kommen zwar jetzt für jede Diagonale zwei Glieder vor, die aber zusammen ebensoviel ausmachen, als das eine Glied im vorigen Falle. In der Tat erhält man daher für X denselben Wert.

Übrigens gilt dies ganz allgemein für zwei sich kreuzende Stäbe, solange an der Kreuzungsstelle keine äußeren Kräfte angebracht werden. Nur wenn sich drei (oder noch mehr) Stäbe an derselben Stelle überkreuzen, wird durch ihre Verbindung der Spannungszustand im allgemeinen geändert.

34. Aufgabe. Zwölf Stäbe (vgl. Abb. 154) sind zu einem regelmäßigen Sechsecke mit einem im Mittelpunkte gelegenen Knotenpunkte vereinigt. Wie groß ist der Anteil der Last P, der von den in die gleiche Richtungslinie fallenden Stäben 7 und 10 aufgenommen wird, wenn alle Stäbe gleich untereinander sind?

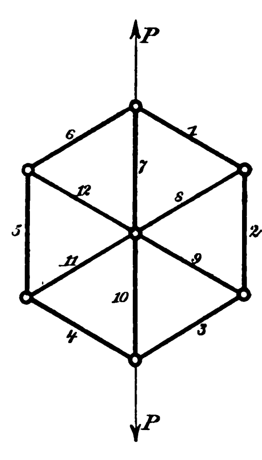


Abb. 154.

Lösung. Man denke sich etwa Stab 1 beseitigt. In dem dann verbleibenden statisch bestimmten Hauptnetze sind (ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe) nur die in die Lastrichtung fallenden Stäbe 7 und 10 mit der Spannung $+P$ beansprucht; alle übrigen T sind gleich Null. Bringt man hierauf längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes eine Zugspannung + 1 als Belastung des Hauptnetzes an, so erfahren alle Umfangsstäbe Spannungen + 1 und alle Radialstäbe Spannungen — 1. Der Kräfteplan u setzt sich nämlich, wie man leicht erkennt, aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammen. In der Formel

$$X = -\frac{\Sigma u r T}{\Sigma u^2 r}$$

kann zunächst in jedem Gliede von Zähler und Nenner der konstante Faktor r gestrichen werden. Die Summe im Zähler umfaßt nur zwei Glieder, die sich auf die Stäbe 7 und 10 beziehen und von denen jedes gleich $(-1)\cdot(+P) = -P$ zu setzen ist. In Σu^2 sind alle Glieder gleich und die Summe ist gleich 12. Man hat daher

$$X = -\frac{-2P}{12} = +\frac{P}{6}.$$

Für S_7 erhält man

$$S_7 = T_7 + u_7 X = + P + (-1) \cdot \left(+ \frac{P}{6}\right) = + \frac{5P}{6} \cdot$$

Die Spannung im Stabe 10 ist ebenso groß. Alle Umfangsstäbe haben eine Zugspannung von der Größe $\frac{P}{6}$ und die Radialstäbe 8, 9, 11, 12 eine Druckspannung von derselben Größe aufzunehmen.

Anmerkung. Wenn der mittlere Knotenpunkt fehlte, die Stäbe sich also an dieser Stelle ohne Verbindung überkreuzten, läge ein Ausnahmefachwerk vor, das trotz Erfüllung der Bedingung für die notwendige Stabzahl bei der angenommenen Belastung, die zu keinen unendlich großen Stabspannungen führen kann, statisch unbestimmt wäre. Die Stabspannungen würden aber dann ebenso groß ausfallen, als im vorigen Falle. Man erkennt dies, auch ohne nochmalige Durchführung der Rechnung nach der in § 53 gegebenen Anleitung, am einfachsten daraus, daß auch bei fester Verbindung in der Mitte die in dieselbe Diagonale fallenden Radialstäbe gleiche Spannungen haben. Man ändert daher nichts, wenn man die Verbindung nachträglich wieder aufhebt. — Natürlich gilt dies aber nur für den besonderen Belastungsfall, der hier vorausgesetzt war. Bei beliebiger Belastung verhält sich das steife, statisch unbestimmte Fachwerk mit mittlerem Knotenpunkte ganz anders als das Ausnahmefachwerk mit durchgehenden Diagonalen ohne Verbindung an der Kreuzungsstelle.

35. Aufgabe. Abb. 155 zeigt eine radartige Konstruktion, die ebenfalls ein Fachwerk mit einem überzähligen Stabe darstellt. Die Speichen sind in der Mitte miteinander verbunden und der Radkranz soll einen Kreis bilden. Der zwischen zwei aufeinander folgenden Speichen liegende Bogen des Radkranzes weicht nicht viel von der zugehörigen Sehne ab und die geringe Krümmung hindert nicht, diesen Teil als einen Stab aufzufassen, der die Enden der Speichen miteinander verbindet. Das Rad soll im mittleren Knotenpunkte mit P belastet sein. Man soll die Stabspannungen unter der Voraussetzung berechnen, daß eine Speiche lotrecht steht, so daß der Auflagerdruck P des Fußbodens in die Speichenrichtung fällt.

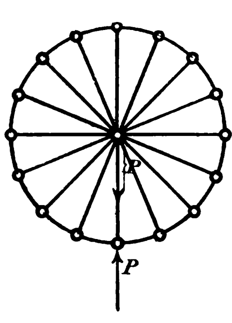


Abb. 155.

Lösung. Die Zahl der Speichen sei n, so daß zwei aufeinander folgende den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ miteinander bilden. Die Speichen seien alle gleich untereinander und ihre Stabkonstante sei mit r,

die Stabkonstante der Radkranzstäbe mit r' bezeichnet. Wir verfahren wie bei der vorigen Aufgabe, indem wir einen Stab des Radkranzes als überzählig betrachten. Dann erfährt nach dessen Beseitigung nur die lotrecht nach abwärts gehende Speiche eine Spannung $-P$. Eine Zugspannung von der Größe 1 im überzähligen Stabe hat ferner in allen Radkranzstäben die Spannung $u = +1$ zur Folge, während die Speichen dadurch sämtlich in eine Druckspannung von der Größe $\frac{2\pi}{n}$ versetzt werden. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Zahl der Speichen groß genug ist, um den zwischen ihnen liegenden Bogen mit der Sehne vertauschen zu dürfen. Für die Spannung im überzähligen Stabe erhält man nun

$$X = -\frac{\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \cdot r \cdot (-P)}{n \cdot \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 r + n \cdot r'} = -P \frac{2\pi}{4\pi^2 + n^2 \frac{r'}{r}}.$$

Auch alle übrigen Stäbe des Radkranzes erfahren eine Druckspannung von dieser Größe. Die Speichen erfahren mit Ausnahme der in die Lastrichtung fallenden eine Zugspannung von der Größe

$$P \frac{4\pi^2}{n\left(4\pi^2 + n^2 \frac{r'}{r}\right)}$$

und die in die Lastrichtung fallende eine Druckspannung von der Größe

$$P - P \frac{4\pi^2}{n\left(4\pi^2 + n^2 \frac{r'}{r}\right)}.$$

Bei dieser Lösung ist freilich, wie überall in der Theorie des Fachwerkes, der Biegungswiderstand der Stäbe vernachlässigt, während der Radkranz, wenn er einen verhältnismäßig steifen Querschnitt besitzt, wegen der in kurzen Abständen aufeinander folgenden Knotenpunkte, auch einen merklichen Biegungswiderstand aufweisen wird, durch den die Art der Lastübertragung erheblich geändert werden kann. Eine Behandlung der Aufgabe mit Berücksichtigung des Biegungswiderstandes des Radkranzes gehört in das Gebiet der Festigkeitslehre und kann daher hier nicht weiter verfolgt werden.

Anmerkung. Bringt man in der Mitte des Rades an Stelle des Knotenpunktes eine „Nabe“ von verhältnismäßig großem Durchmesser an, so ist diese als eine Scheibe aufzufassen, an die die Knotenpunkte des Radkranzes durch die Speichen und die Radkranzstäbe angeschlossen sind. Man findet in diesem Falle, daß gerade

die notwendige Stabzahl vorhanden ist, um einen unverschieblichen Anschluß zu bewirken. Zugleich liegt aber dann ein „Ausnahmefall“ vor, falls die Speichen immer noch in radialer Richtung gehen, denn die von einer Scheibe ausgehenden Stäbe dürfen sich, um eine steife Verbindung herzustellen, nicht alle in demselben Punkte schneiden. Man hilft sich dadurch, daß man die Speichen alle um einen gewissen Winkel gegen den Radius schräg stellt. Räder dieser Art werden häufig ausgeführt. Sofern man den Biegungswiderstand der Radkranzstäbe immer noch vernachlässigen darf, steht der Berechnung der Stabspannungen für jeden beliebigen Belastungsfall nach der Lehre vom statisch bestimmten Fachwerke kein Hindernis im Wege. — Häufig ordnet man auch — bei den Rädern der Fahrräder — die Speichen in zwei Kegelflächen an und erhält dann ein räumliches Fachwerk. Ferner werden auch oft in jeder Kegelfläche zwei Speichenscharen angeordnet, von denen die eine Schar gegen den Radius um denselben Winkel, aber in der entgegengesetzten Richtung gedreht ist, wie die andere. Durch diese Anordnung erreicht man, daß die Speichen alle nur auf Zug widerstandsfähig zu sein brauchen; die Speichen der beiden Scharen verhalten sich zueinander etwa wie die früher besprochenen Gegendiagonalen bei den Schwedlerschen Kuppeln. Freilich spielt auch in diesen Fällen der Biegungswiderstand des Radkranzes gewöhnlich eine so wichtige Rolle, daß die Behandlung nach den Lehren der Fachwerktheorie nicht ausreicht.

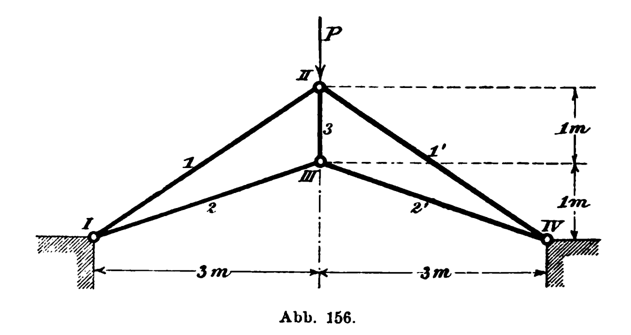


Abb. 156.

36. Aufgabe. Abb. 156 stellt einen — der Einfachheit wegen nur aus wenigen Stäben zusammengesetzten — Bogenträger dar, der in den Punkten I und IV fest aufgelagert ist. Man soll den Horizontalschub berechnen, der durch die am Knotenpunkte II angreifende Last P hervorgebracht wird, wenn die Stäbe die in der auf S. 403 folgenden Zusammenstellung angegebenen Querschnitte haben.

Erste Lösung. Das Fachwerk ist an sich statisch bestimmt; der Träger ist aber einfach statisch unbestimmt, weil ihm vier Auflagerbedingungen vorgeschrieben sind. Als überzählig betrachte man die Auflagerbedingung, die eine Verschiebung von IV in horizontaler Richtung verhindert. Die zugehörige Auflagerkraft, also der gesuchte Horizontalschub, bildet dann die statisch unbestimmte Größe X, die nach der Maxwell-Mohrschen Formel zu berechnen ist. Als „Hauptnetz“ ist der als Balken aufgelagerte

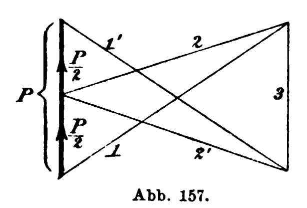


Abb. 157.

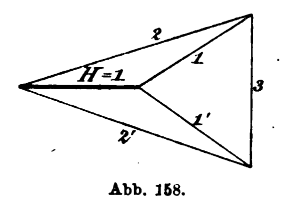


Abb. 158.

ganze Träger zu betrachten. Der Kräfteplan T für die Hauptnetzspannungen wird durch Abb. 157 angegeben. Abb. 158 zeigt den Kräfteplan u für die Spannungen, die im Hauptnetze durch einen von außen her als Belastung angebrachten Horizontalschub $H = 1$ hervorgerufen werden. Dies alles stellt man in der folgenden Tabelle zusammen. Dabei ist der Elastizitätsmodul, obschon es auf dessen Größe, sofern er nur überhaupt bei allen Stäben gleich ist, nicht ankommt, der Übersichtlichkeit wegen zu $2 \cdot 10^6$ atm angenommen. Die Längen l folgen aus den in die Abb. 156 eingeschriebenen Maßen; die Querschnitte sind willkürlich angenommen.

Tabelle.

Stab Nr.	l in cm	F in qcm	r in $\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	T	u	ruT	u^2r
1	360,6	25	$7,21 \cdot 10^{-6}$	$-1,803\,P$	$+1,202$	$-15,62$	10,41
2	316,2	15	10,54 „	$+1,581\,P$	$-2,108$	$-35,13$	46,84
3	100,0	10	5,00 „	$+1,000\,P$	$-1,333$	$-6,67$	8,89
1′	360,6	25	7,21 „	$-1,803\,P$	$+1,202$	$-15,62$	10,41
2′	316,2	15	10,54 „	$+1,581\,P$	$-2,108$	$-35,13$	46,84
					$\Sigma =$	$-108,17$	123,39

In der Spalte für ruT ist überall der Faktor $10^{-6} \cdot P$, in der Spalte für u^2r der Faktor 10^{-6} beizufügen. Nach der Formel erhält man jetzt

$$X = \frac{108,17 \cdot 10^{-6}\,P}{123,39 \cdot 10^{-6}} = 0,88\,P.$$

Zweite Lösung (mit Hülfe des Verschiebungsplanes). Man berechnet die r und u wie vorher und zeichnet den Verschiebungsplan unter der Voraussetzung, daß am Balkenträger eine horizontale Auflagerkraft von 1 kg als äußere Belastung an dem auf Rollen gelagerten Auflagerpunkte IV angreift. Für die Längenänderungen der Stäbe erhält man

$$\Delta l_1 = 7{,}21 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}202$$
$$= + 8{,}67 \cdot 10^{-6} \text{ cm};$$
$$\Delta l_2 = - 21{,}52 \cdot 10^{-6};$$
$$\Delta l_3 = - 6{,}67 \cdot 10^{-6}.$$

Der Verschiebungsplan ist in Abb. 159 in 25000 facher Vergrößerung gezeichnet. Die vom Pole nach II, III, IV gezogenen Strecken geben die Verschiebungen der zugehörigen Knotenpunkte unter der Voraussetzung an, daß Stab 2 seine Richtung beibehalten hätte. Hierauf wird eine Drehung des Trägers um Knotenpunkt I ausgeführt, durch die der Auflagerpunkt IV wieder auf seine Auflagerbahn zurückgebracht wird, so daß nur die Horizontalverschiebung bestehen bleibt. Im Verschiebungsplane wird der kleine Kreisbogen IV—IV′ durch eine gerade Linie ersetzt. Auch II und III verschieben sich hierbei nach II′ und III′. Die Verschiebungswege sind rechtwinklig zu den aus der Trägerfigur ersichtlichen Halbmessern und proportional zu diesen abzutragen, wobei die Länge des Verschiebungsweges IV—IV′ zum Vergleiche dient. Nachher hat man noch als Kontrolle für die Genauigkeit der Zeichnung, daß II′ und III′ lotrecht übereinander liegen müssen und daß ihr Abstand gleich Δl_3 sein muß.

Abb. 159.

Aus dem Verschiebungsplane entnimmt man, daß sich Knotenpunkt II bei dem vorausgesetzten Belastungsfalle um $103{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm in senkrechter Richtung verschiebt. Nach dem Maxwellschen Satze von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen erfährt Knotenpunkt IV eine ebenso große Verschiebung in horizontaler Richtung, wenn an dem Balkenträger die Last von 1 kg im Knotenpunkte II an-

gebracht wird. Für P kg ist die Verschiebung das Pfache. Um diese Verschiebung wieder rückgängig zu machen und hierdurch auf den Fall des Bogenträgers zu gelangen, müssen wir eine horizontale Auflagerkraft X an IV anbringen. Aus dem Verschiebungsplane erfahren wir aber ferner, daß sich Knotenpunkt IV um eine Strecke von $117,6 \cdot 10^{-6}$ cm in horizontaler Richtung verschiebt, wenn an ihm eine horizontale Kraft von 1 kg angebracht wird. X folgt daher aus der Gleichsetzung

$$X \cdot 117,6 \cdot 10^{-6} = P \cdot 103,8 \cdot 10^{-6} \quad \text{zu} \quad X = 0,88\, P.$$

Das Resultat stimmt mit dem vorher auf anderm Wege gefundenen überein, wobei jedoch zu bemerken ist, daß der Verschiebungsplan, aus dem die angegebenen Knotenpunktswege entnommen sind, doppelt so groß als hier in der Abbildung gezeichnet wurde, um genauere Resultate zu erlangen.

Nachtrag zu § 48.

Während dieser Abschnitt gedruckt wurde, hat Herr Prof. Keelhoff in Gent im Oktoberhefte 1902 der Annales des trav. publ. de Belgique unter dem Titel „Tracé graphique des déformations élastiques des systèmes triangulés“ ein von dem Williotschen abweichendes Verfahren für das Zeichnen eines Verschiebungsplanes beschrieben und empfohlen. Hinsichtlich der Genauigkeit vermag es sich mit dem Williotschen zwar nicht zu messen; da es aber einfacher ist und die Genauigkeit immerhin in vielen Fällen ausreichen wird, mag es hier noch angeführt werden.

Keelhoff multipliziert nämlich die Längenänderungen aller Stäbe mit einer passend gewählten Verhältniszahl, etwa mit 100. Dann weichen die um die vergrößerten Beträge geänderten Längen von den ursprünglichen Längen schon so merklich ab, daß man die ihnen entsprechende Trägergestalt durch einfaches Aneinanderreihen der Stabdreiecke mit genügender Genauigkeit auftragen kann. Hierbei erhält man alle Verschiebungen und Winkeländerungen ebenfalls angenähert in 100facher Vergrößerung, solange wenigstens als vorausgesetzt werden darf, daß die Knotenpunktsverschiebungen auch in der verzerrten Figur immer noch als klein gegen die Stablängen zu betrachten sind. Nun trifft dies freilich bei den von Keelhoff behandelten Beispielen keineswegs hinreichend zu und in der dadurch herbeigeführten Ungenauigkeit beruht die Schwäche des neuen Verfahrens. Es vermag daher das Williotsche Verfahren nicht zu ersetzen, wenn es auch für überschlägliche Berechnungen ganz brauchbar sein mag.

Siebenter Abschnitt.

Theorie der Gewölbe und der durchlaufenden Träger.

§ 55. Gleichgewichtsbedingungen für das Tonnengewölbe.

Die einfachste Gewölbeform, mit deren Stabilitätsuntersuchung man sich in der graphischen Statik vor allem zu befassen hat, ist das zylindrische oder Tonnengewölbe. Bei gewölbten Brücken kommt es allein in Frage und auch im Hochbaue spielt es eine wichtige Rolle, zumal da sich manche der verwickelteren Gewölbeformen, namentlich die Kreuzgewölbe, auf jene Grundform zurückführen lassen. Nur die Kuppelgewölbe und die ihnen verwandten Klostergewölbe erfordern eine grundsätzlich verschiedene Behandlung, worauf in der Folge noch kurz eingegangen werden soll. Bei den hier durchzuführenden Betrachtungen soll in erster Linie an das Gleichgewicht eines Brückengewölbes gedacht werden, obschon natürlich für die übrigen Verwendungsarten des Tonnengewölbes ganz Ähnliches gilt.

Von der Last, die das Gewölbe zu tragen hat, nehme ich an, daß sie in der Richtung der Gewölbeachse gleichförmig verteilt sei, während sie im Gewölbequerschnitte beliebig verteilt sein kann. Es ist dann gleichgültig, wie lang das Gewölbe in der Richtung der Gewölbeachse sich ausdehnt, da sich jeder zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegende Abschnitt unter denselben Bedingungen befindet, wie ein anderer. Es genügt daher im allgemeinen, einen einzigen Querschnitt zur Betrachtung auszuwählen; auf Ausnahmen, die

gelegentlich vorkommen können, werde ich späterhin noch aufmerksam machen.

Die von dem Gewölbe aufzunehmende Last besteht gewöhnlich aus einer Erdüberschüttung oder einer Übermauerung. Denkt man sich das Gewölbe, namentlich in dem zuletzt genannten Falle fortgenommen, so ist es nicht unmöglich, daß sich die Last trotzdem selbst noch trägt, da sich auch die Übermauerung selbst wie ein Gewölbe verhalten kann. Wenn nun auch bei den Fällen, die wir in erster Linie im Auge haben, also bei weit gespannten Brückengewölben, eine so große Tragfähigkeit der Übermauerung oder Überschüttung nicht anzunehmen ist, so vermag sie doch immerhin bis zu einem gewissen Grade eine Entlastung des Gewölbes herbeizuführen. Auf diesen günstigen Umstand nimmt man jedoch bei der Berechnung des Gewölbes keine Rücksicht; man nimmt vielmehr an, daß die Last ohne inneren Zusammenhang sei und keine horizontalen Kräfte übertrage, so daß jeder Teil der Rückenfläche des Gewölbes das senkrecht nach abwärts gerichtete Gewicht des gerade über ihm befindlichen Teiles der Belastung aufzunehmen habe. Dazu kommt dann noch das Eigengewicht des Gewölbes selbst.

Wenn die Last aus einer Übermauerung von demselben spezifischen Gewichte wie der Wölbbogen besteht, gibt demnach die Höhe der Übermauerung an jeder Stelle ohne weiteres ein Maß für die dort auftretende Belastung an. Im andern Falle, also etwa bei einer Erdüberschüttung, kann man sich diese durch eine gleich schwere Übermauerung von entsprechend geänderter Höhe ersetzt denken. Auch die beweglichen Lasten, die bei einem Brückengewölbe vorkommen, die aber in der Regel gegenüber der viel größeren Eigenlast keine große Rolle spielen, denkt man sich durch eine gleich schwere zusätzliche Übermauerung in entsprechender Verteilung ersetzt. Man erhält dann im Gewölbequerschnitte eine auf Mauerlasten zurückgeführte Fläche, deren obere Begrenzung die Belastungslinie heißt. Diese und die Gewölbeform seien gegeben; es handelt sich dann um die Entscheidung der Frage, ob das Gewölbe

unter den gegebenen Umständen im Gleichgewichte bleiben wird oder ob ein Einsturz zu befürchten ist.

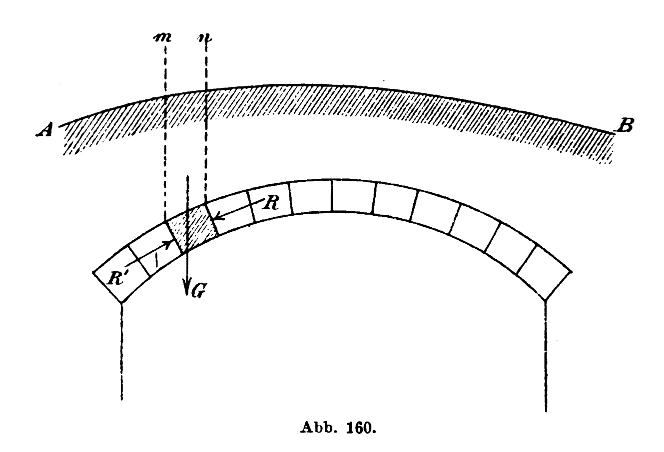


Abb. 160.

In Abb. 160 ist der Gewölbequerschnitt nebst der Belastungslinie AB gezeichnet. Man fasse einen einzelnen Wölbstein ins Auge, der in der Figur durch Schraffierung hervorgehoben ist. An diesem wirkt zunächst das Gewicht der zwischen den Linien m und n liegenden Lasten samt dem Eigengewichte des Wölbsteines. Dieses Gewicht G ist dem Inhalte der zwischen den Linien m und n und den beiden Wölbfugen liegenden Fläche proportional und geht durch den Schwerpunkt der Fläche; es ist daher als vollständig gegeben anzusehen. Außerdem greifen an dem Wölbsteine die in den beiden Fugen übertragenen Kräfte R und R_1 an. Diese verteilen sich zwar entweder über die ganze Fuge oder doch über einen Teil derselben; wir können sie uns aber zu den Resultierenden R und R_1 zusammengefaßt denken. Über Lage, Größe und Richtung der Fugendrücke R und R_1 ist zwar zunächst nichts bekannt. Offenbar könnten wir aber die andere sofort angeben, wenn eine von ihnen auf irgend eine Art bereits ermittelt wäre. Denn die drei Kräfte G, R und R_1 müssen sich, damit Gleichgewicht bestehe, in demselben Punkte schneiden und ihre geometrische Summe muß Null

sein. Die erste Bedingung liefert die Lage, die andere nach Zeichnen eines Kräftedreieckes Größe und Richtung von R_1, wenn R als bekannt angesehen wird.

Geht man nun zu einem benachbarten Wölbsteine über, so ist für diesen der eine Fugendruck sofort gegeben, da er sich nach dem Wechselwirkungsgesetze nur der Pfeilrichtung nach von dem Fugendrucke an dem jenseits der Fuge liegenden, vorher schon betrachteten Wölbsteine unterscheidet. Der andere Fugendruck kann daher wie vorher nach Lage, Größe und Richtung ermittelt werden. Dies läßt sich dann weiterhin in derselben Weise fortsetzen. Man erkennt daraus, daß alle Fugendrücke mit Hülfe dieser einfachen Kräftezerlegungen sofort gefunden werden können, sobald der Druck in einer einzigen Fuge bekannt ist.

Der hiernach allein noch fehlende Fugendruck in irgend einer Fuge, die zum Ausgange gewählt wird, läßt sich dagegen durch bloße Gleichgewichtsbetrachtungen nicht ermitteln. Das Gewölbe ist vielmehr eine statisch unbestimmte Konstruktion und zwar eine dreifach statisch unbestimmte, da drei — auf verschiedene Art zu wählende — Bestimmungsstücke erforderlich sind, um Lage, Größe und Richtung irgend eines Fugendruckes näher zu bezeichnen.

Falls das Gewölbe überhaupt stabil ist, sind sehr viele Gleichgewichtszustände statisch möglich. Jeder zulässigen, sonst aber beliebigen Wahl für den ersten Fugendruck entspricht ein anderer Gleichgewichtszustand. Zulässig ist dabei freilich nur eine solche Wahl, bei der überhaupt Gleichgewicht bestehen kann, worauf sofort noch näher einzugehen sein wird. Jedenfalls muß, wenn der Einsturz nicht erfolgen soll, mindestens eine Annahme für den ersten Fugendruck möglich sein, die das Gleichgewicht sichert. Ein Gewölbe, bei dem nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich wäre, sieht man aber nicht als hinreichend sicher an, umsomehr als jede Gewißheit darüber fehlt, daß dieser eine Gleichgewichtszustand dann auch wirklich zustande käme. Man verlangt vielmehr einen gewissen Überschuß an Standsicherheit, so daß innerhalb eines nicht zu

kleinen Bereiches verschiedene Gleichgewichtszustände statisch möglich sind.

Um die Frage zu beantworten, ob ein Gewölbe für eine beliebig getroffene Wahl des ersten Fugendruckes und nachdem alle übrigen, die dazu gehören, ermittelt sind, im Gleichgewichte bleibt oder nicht, müssen wir uns überlegen, auf welche Art der Einsturz des Gewölbes erfolgen kann. Hierbei ist nun vor allem zu betonen, daß bei der überwiegenden Mehrzahl der ja leider immer noch recht häufig vorkommenden Gewölbeeinstürze das Nachgeben der Pfeiler oder Widerlager die Veranlassung bildet. Es wird sich später zeigen, auf welche Weise man sich von dieser Einsturzgefahr Rechenschaft zu geben vermag. Vorerst soll aber, da es sich jetzt nur um die Stabilität des Gewölbes selbst handelt, von diesem Umstande abgesehen, also vorausgesetzt werden, daß die Widerlagsmauern hinreichend standfest sind.

Dann kommt ferner in Betracht, daß der Einsturz etwa durch ein Gleiten der Wölbsteine übereinander längs der Fugen eingeleitet werden könnte. Coulomb, der bekannte Physiker, der sich, soweit beglaubigte Nachrichten vorliegen*), zuerst mit der Frage des Gewölbegleichgewichtes beschäftigt hat, sah diese Einsturzgefahr als die wesentlichste an. Sie läßt sich aber durch einen geeigneten Fugenschnitt stets leicht vermeiden. Ein Gleiten der Wölbsteine übereinander kann nämlich offenbar nur dann eintreten, wenn der Fugendruck mit der Normalen zur Fuge einen Winkel einschließt, der den Reibungswinkel übersteigt. Der Reibungswinkel zwischen Stein und Stein ist sehr groß. Wenn ein weicher Mörtel dazwischen liegt, kann er freilich erheblich kleiner werden; aber auch dann ist er immer noch ausreichend, um ein Gleiten zu verhüten, wenn

*) Manche nehmen freilich an, daß sich schon die Baumeister der Gothik eine (von ihnen geheim gehaltene) zutreffende Anschauung über die Gleichgewichtsbedingungen der Gewölbe zurecht gelegt hätten, so z. B. Baurat Hasak in einem Vortrage, der in der Zeitschr. f. Arch. und Ingenieurwesen, Wochenausgabe, 1900, S. 246 auszugsweise abgedruckt ist.

die Fugenrichtungen einigermaßen zweckmäßig gewählt werden Tatsächlich ist daher die Gleitgefahr, wenn sie auch immerhin im Auge behalten werden muß, von viel geringerer Bedeutung, als man ursprünglich annahm.

Eine andere Einsturzmöglichkeit besteht darin, daß das Gewölbe durch Öffnen einiger Fugen (der sogenannten Bruchfugen) in mehrere Teile zerfällt, die sich um die Kanten der Bruchfugen abwechselnd nach entgegengesetzten Richtungen hin drehen. Wenn diese Bewegungen weit genug fortgesetzt werden, weichen einzelne Teile soweit nach oben hin aus, daß die andern Raum zum Herabstürzen erlangen. Hierbei ist zu beachten, daß die Zug- oder Haftfestigkeit des Mörtels, die vor dem Öffnen der Fugen überwunden werden muß, in vielen Fällen nur gering zu veranschlagen ist. Ein guter Zementmörtel hat zwar eine nicht zu unterschätzende Zugfestigkeit, sobald er genügend erhärtet ist. Man verläßt sich darauf aber nicht gern und fordert, daß das Gleichgewicht des Gewölbes auch schon ohne Zuhülfenahme der Zugfestigkeit des Mörtels genügend gesichert sei. Für diesen Fall läßt sich die Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen benachbarter Wölbsteine gegeneinander um eine Fugenkante leicht angeben. Der Angriffspunkt des Fugendruckes muß nämlich auf der Fuge selbst enthalten sein und darf nicht in deren Verlängerung fallen. Denn in die Verlängerung der Fuge könnte er offenbar nur dann fallen, wenn in der Fuge auch Zugkräfte übertragen würden.

Bei dieser Betrachtung ist jedoch noch keine Rücksicht auf die begrenzte Druckfestigkeit des Wölbmaterials genommen und diese ist es, die nun tatsächlich den Ausschlag gibt. Schon dann, wenn der Angriffspunkt des Fugendruckes in die Nähe einer Fugenkante fällt, steigt die Druckbeanspruchung an dieser Kante so erheblich, daß dort ein Zertrümmern des Wölbmateriales stattfindet. Nachdem dieses Absplittern der Kanten erfolgt ist, steht den vorher besprochenen Drehungen der einzelnen Wölbteile gegeneinander kein Hindernis mehr im Wege, obschon der Angriffspunkt des Fugendruckes noch

innerhalb der ursprünglichen Fugenlänge liegt. Man muß daher verlangen, daß der Fugendruck nicht nur an keiner Stelle über den Gewölbequerschnitt hinaustritt, sondern daß er sich auch den Begrenzungslinien des Gewölbes nirgends soweit nähert, daß die zulässige Druckbeanspruchung des Wölbmateriales überschritten wird. Als statisch möglich im vorher erörterten Sinne sind daher nur solche Gleichgewichtszustände des Gewölbes anzusehen, die dieser Forderung genügen und bei denen überdies an keiner Stelle ein Gleiten der Wölbsteine gegeneinander zu befürchten ist.

Die größte Kantenpressung, die zu einem gegebenen Fugendrucke gehört, kann unter der hier wie in andern Fällen üblichen Annahme eines linearen Spannungsverteilungsgesetzes leicht ermittelt werden. Der Fugendruck (oder seine zur Fugenrichtung senkrecht stehende Komponente, die sich aber von dem gesamten Fugendrucke unter den gegebenen Verhältnissen nur unerheblich unterscheiden kann) sei für die Länge $= 1$ des Gewölbes im Sinne der Achse, d. h. senkrecht zum Querschnitte gemessen, mit R, die Fugenlänge mit f und der Abstand des Druckmittelpunktes (oder Angriffspunktes von R) von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Dann ist die Kantenpressung σ

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6\,R u}{f^2} \qquad (82)$$

zu setzen. Dies ist nämlich die früher (im ersten Bande) abgeleitete Formel für die exzentrische Druckbelastung. Das erste Glied stellt die von dem zentrisch angebrachten Drucke herrührende, gleichförmig verteilte Spannung, das zweite Glied die zu dem Momente Ru gehörige zusätzliche Biegungsspannung dar, wobei zu beachten ist, daß das Widerstandsmoment der Fuge gleich $\frac{f^2}{6}$ zu setzen ist, da die Fuge ein Rechteck von den Seitenlängen f und 1 bildet. Das obere oder untere Vorzeichen des zweiten Gliedes ist zu wählen, jenachdem die dem Druckmittelpunkte benachbarte oder die jenseits der Mitte liegende Kante in Frage kommt. Die größte Kantenpressung entspricht natürlich dem positiven Vorzeichen.

Die Formel ist indessen nur solange gültig, als sich die ganze Fuge an der Lastübertragung beteiligt. Setzt man $u = \frac{f}{6}$, so sinkt der Druck an der jenseits liegenden Kante auf Null und wenn u noch größer wird, treten an dieser Kante Zugspannungen auf. Vermag der Mörtel Zugspannungen aufzunehmen, so ist die Formel zwar auch dann noch gültig. Im andern Falle tritt aber auf der Zugseite ein Aufklaffen der Fuge ein. Das Spannungsverteilungsdiagramm geht dann in ein Dreieck über, das sich nur über den unter Druck stehenden Teil der Fuge erstreckt und dessen Schwerpunkt auf der Richtungslinie von R liegt. Der Abstand von R bis zur Kante ist $\frac{f}{2} - u$, die an der Druckübertragung beteiligte Strecke der Fuge das Dreifache davon und die Kantenpressung wird doppelt so groß, als der Mittelwert des Druckes längs jener Strecke. Daher ist die vorige Gleichung für diesen Fall zu ersetzen durch

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3\left(\frac{f}{2} - u\right)}. \tag{83}$$

Was die Dimensionen der in diesen Gleichungen vorkommenden Größen anbelangt, so ist zunächst daran zu erinnern, daß R einen Fugendruck für die Längeneinheit der Gewölbelänge bedeutete, also die Dimension kg/cm oder kg/m hat. Häufig benutzt man aber anstatt dessen andere Einheiten. Es zeigte sich nämlich vorher schon, daß die Lasten des Gewölbes durch Flächen im Gewölbequerschnitte zur Darstellung gelangen. Diese Flächen lassen sich zwar, sobald es gewünscht wird, sofort auch auf die zugehörigen Gewichte umrechnen. Man kann aber auch dabei stehen bleiben und findet dann auch R in einem Flächeninhalte ausgedrückt. Setzt man es mit dieser Benennung in die Formeln ein, so erhält man σ als eine Länge. Diese Länge gibt die „Druckhöhe“ an. Es ist dies jene Übermauerungshöhe bei einem mit konstantem Querschnitte in die Höhe geführten Pfeiler, die unten dieselbe Druckbeanspruchung der Fuge bewirkt, wie das berechnete σ. Auch die zulässige Kantenpressung kann anstatt in atm in

einer solchen Druckhöhe angegeben werden und man erspart sich, wenn man dies von vornherein so einführt, später weitere Umrechnungen.

§ 56. Stützlinie und Drucklinie.

Eine gebrochene Linie, die die Druckmittelpunkte aller Fugen miteinander verbindet, wird als Stützlinie des Gewölbes bezeichnet. Da die Verteilung und die Zahl der Fugen offenbar zufällig und unwesentlich ist, kann man sich auch unendlich viele Fugen oder wenigstens willkürlich durch die Wölbsteine in der Fugenrichtung gezogene „Fugenschnitte“ vorstellen und zu jedem dieser Fugenschnitte den Druckmittelpunkt aufgesucht denken. Die Stützlinie geht dann in eine Kurve über. Nach dem, was wir vorher sahen, muß die Stützlinie überall in der Querschnittsfläche verlaufen und sie darf den Begrenzungslinien des Gewölbequerschnittes nicht zu nahe kommen, wenn sie einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen soll.

Eine zweite Kurve, die von der Stützlinie im allgemeinen etwas, wenn auch gewöhnlich nicht viel verschieden ist, wird von den Richtungslinien der zu allen Fugenschnitten gehörigen Fugendrücke als Tangenten eingehüllt. Sie wird als die Drucklinie des Gewölbes bezeichnet. Indessen werden die Bezeichnungen „Stützlinie“ und „Drucklinie“ häufig auch miteinander vertauscht, um so mehr als beide unter einer Annahme, die sofort näher zu besprechen ist, miteinander zusammenfallen.

Die Konstruktion der Stützlinie oder der Drucklinie macht nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen gar keine Schwierigkeiten, sobald Lage, Richtung und Größe irgend eines Fugendruckes willkürlich gewählt oder gegeben sind. Man sucht aber diese Aufgabe dadurch noch weiter zu vereinfachen, daß man die Richtungen der Fugenschnitte so legt, wie es dafür am bequemsten ist. Am schnellsten kommt man zum Ziele für lotrechte Fugenschnitte. In diesem Falle bildet die Stützlinie eine zu der gegebenen Belastungsfläche gehörige Seilkurve und jede Tangente an die Seilkurve gibt zugleich die Richtung

des zugehörigen Fugendruckes an, d. h. die Drucklinie fällt mit der Stützlinie zusammen.

Freilich dürfte man bei einem gemauerten Gewölbe die Fugen nicht wirklich in dieser Richtung ausführen, da sonst die Gefahr des Gleitens der Wölbsteine übereinander nahe gerückt würde. Bei einem Betongewölbe dagegen kommen Fugen im eigentlichen Sinne überhaupt nicht vor und es ist daher von vornherein gleichgültig, in welcher Richtung wir uns die Fugenschnitte bei ihm gelegt denken wollen. Aber auch bei gemauerten Gewölben steht es uns frei, uns trotz der anders gerichteten Mauerfugen auch noch Schnitte in lotrechter Richtung durch das Gewölbe gelegt zu denken, die wir als Fugenschnitte bezeichnen, und die in diesen Schnitten von der einen nach der andern Seite hinüber übertragenen Kräfte oder „Fugendrücke“ zu untersuchen.

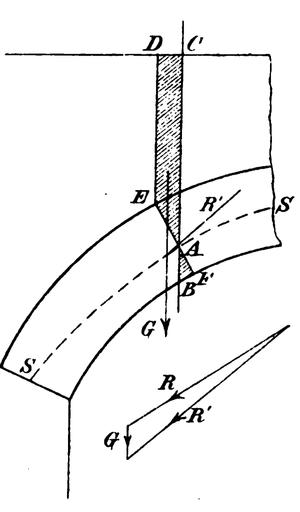


Abb. 161.

Außerdem ist man auch jederzeit leicht imstande, den Fugendruck für eine beliebig geneigte Fuge nachträglich anzugeben, sobald die Stütz- oder Drucklinie für senkrechte Fugenschnitte bereits bekannt ist. In Abb. 161 sei SS diese Stützlinie und EF die geneigte Fuge, für die der Fugendruck ermittelt werden soll. Man ziehe durch den Schnittpunkt A der Fuge EF mit der Stützlinie SS den senkrechten Fugenschnitt BC. Der zu diesem gehörige Fugendruck R ist aus dem zu dem Seilpolygone SS gehörigen Kräfteplane sofort zu entnehmen. Dann ziehe man von E aus die Lotrechte ED. Der Fugendruck R' für die geneigte Fuge EF muß dann mit R und dem zwischen den Linien DEF und BC liegenden Belastungsstreifen im Gleichgewichte stehen. Dieser Belastungsstreifen besteht aus dem Trapeze $ACDE$ mit senkrecht nach abwärts und dem kleinen Dreiecke ABF mit senkrecht nach

oben gekehrtem Gewichte (dies nach oben gerichtet, weil die Fläche ABF nicht hinzukommt, sondern wegfällt, wenn wir vom senkrechten Fugenschnitte zum geneigten übergehen). Die Richtungslinie der Resultierenden G beider Gewichte kann auch als die senkrechte Schwerlinie der verschränkten Figur $BCDEF$ angesehen werden, in der ABF negativ zu rechnen ist. Durch Aneinandertragen von R und G erhalten wir R' als dritte Seite in dem untenhin gezeichneten Kräftedreiecke. Eine Parallele zu R' durch den Schnittpunkt von R mit G in der Hauptfigur liefert den gesuchten Fugendruck.

Man erkennt aus dieser Konstruktion, daß die Stützlinie für die wirklich vorhandenen geneigten Fugen stets etwas höher liegen wird, als die ihr für senkrechte Fugenschnitte entsprechende. Der Unterschied ist aber so gering, daß man ihn unter den gewöhnlich vorliegenden Umständen meist ganz vernachlässigen kann. Daher begnügt man sich in der Regel damit, die Stützlinie für senkrechte Fugenschnitte einzuzeichnen und sie zugleich für die geneigten Fugen als gültig zu betrachten. Wenn man will, kann man jedoch die besprochene geringfügige Verbesserung jederzeit leicht vornehmen.

Um die Untersuchung für die Stütz- oder Drucklinien bei senkrechten Fugenschnitten analytisch durchzuführen, geht man von der Differentialgleichung der Seilkurve aus. Diese lautet

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q,$$

wenn q die Belastungsintensität an der Stelle mit der Abscisse x bedeutet, die durch die Höhe der Belastungsfläche an dieser Stelle dargestellt wird. H ist der Horizontalschub der Drucklinie oder des Gewölbes, d. h. die konstante Horizontalkomponente jedes Fugendruckes. Durch zweimalige Integration folgt daraus die endliche Gleichung der Kurve

$$y = -\frac{1}{H}\int dx\int q\,dx + C_1 x + C_2. \tag{84}$$

Unter C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten zu verstehen. Grenzbedingungen zu deren Bestimmung stehen nicht zur Verfügung, falls nicht willkürliche Annahmen etwa über einen

Fugendruck zu Hülfe genommen werden. Auch der Horizontalschub H läßt sich ohne solche Annahmen auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht ermitteln. In der Gleichung kommen daher drei zunächst willkürliche Konstanten vor. Dies steht in Übereinstimmung mit dem schon vorher gezogenen Schlusse, daß das Tonnengewölbe eine dreifach statisch unbestimmte Konstruktion bildet.

Diese Unbestimmtheit läßt sich freilich durch eine geeignete Konstruktion bis zu einem gewissen Grade heben. Durch Anordnung von Gelenken kann man (wenigstens nahezu) der Drucklinie Punkte vorschreiben, durch die sie gehen muß. Ordnet man drei Gelenke (eins im Scheitel und an jedem Kämpfer) an, so ist die Lage der Drucklinie dadurch völlig bestimmt. Solche Gewölbe hat man neuerdings häufig ausgeführt und bei weit gespannten Brückenbögen hat sich diese Konstruktion jetzt ganz allgemein eingebürgert.

Die Berechnung der Gewölbe mit drei Gelenken erfolgt im wesentlichen genau so, wie die der Bogenträger mit drei Gelenken. Die Gelenkdrücke findet man nach einem der damals besprochenen Verfahren (vgl. § 39) und hiermit kann auch die zugehörige Stützlinie ohne weiteres gezeichnet werden.

Freilich ist es nicht möglich, ein Gelenk so zu konstruieren, daß der Gelenkdruck genau durch einen vorgeschriebenen Punkt gehen müßte. Eine geringe Abweichung wird immer noch möglich sein; diese ist aber von entsprechend geringer Bedeutung. — Als ein Hauptvorzug der Gelenkanordnung ist zu betrachten, daß weder Temperaturänderungen, noch geringe Bewegungen der Widerlager, die etwa durch die Nachgiebigkeit des Fundamentes veranlaßt werden, eine wesentliche Änderung des Gleichgewichtszustandes, also der Lage der Stützlinie herbeizuführen vermögen, solange wenigstens als sich diese Änderungen gleichförmig der ganzen Länge der Wölbachse nach äußern.

Im Raume ist nämlich ein mit drei Gelenken ausgeführtes Gewölbe immer noch als eine statisch unbestimmte Konstruktion anzusehen. Es ist keineswegs

unbedingt nötig, daß sich jeder zwischen zwei Querschnitten gelegene Gewölbeabschnitt genau ebenso verhalte, wie jeder andere und wenn der Boden, auf den sich die Widerlager stützen, an verschiedenen Stellen verschieden nachgiebig ist, wenn sich ungleichförmige Wärmeänderungen geltend machen (wenn die nach Süden gelegene Seite z. B. wärmer wird, als die nach Norden gekehrte) oder wenn die Gelenke nicht genau gleichmäßig der ganzen Länge der Wölbachse nach ausgeführt sind, werden sich Unterschiede im Verhalten der einzelnen Wölbabschnitte trotz der Gelenke sofort einstellen. Nur dann, wenn man sicher sein kann, daß alle Ursachen, die eine Verschiedenheit der Bedingungen längs der Wölbachse herbeiführen könnten, hinreichend vermieden sind, so daß man sich in der Tat auf die Untersuchung innerhalb einer einzigen Querschnittsebene beschränken kann, ist die Konstruktion als eine — innerhalb der Ebene — statisch bestimmte anzusehen. Ich hielt es für nötig, dies hier zu betonen, weil bei der Beurteilung des Sicherheitsgrades eines solchen Gewölbes auf diese Umstände gebührend Rücksicht genommen werden muß, was nicht immer geschehen zu sein scheint.

Natürlich gelten diese Bemerkungen im übrigen auch für die schon in der Ebene statisch unbestimmten Gewölbe ohne Gelenke; sie sind aber hier der ohnehin schon bestehenden Unbestimmtheit wegen von geringerer Wichtigkeit als im andern Falle.

§ 57. Schiefe Projektion des Gewölbequerschnittes mit eingezeichneter Stützlinie.

Denkt man sich die Zeichnung eines Gewölbequerschnittes samt Belastungslinie, Stützlinie und deren Kräfteplan durch parallele Projektionsstrahlen auf irgend eine zur Zeichenebene nicht parallele Ebene projiziert, so stellt die erhaltene Projektion selbst wieder einen Gewölbequerschnitt dar. In diesem ist als Lastrichtung jene anzusehen, die sich als Projektion der Lastrichtung im ersten Falle ergibt. Auch die Projektion der Stützlinie bildet dann wieder eine Stützlinie für den neu

erhaltenen Gewölbequerschnitt. Dies folgt leicht daraus, daß sich der Schwerpunkt jedes Belastungsstreifens mit projiziert (vgl. Bd. I § 24).

Schneiden sich beide Ebenen in einer zur wagrechten Richtung in beiden Zeichnungen parallelen Geraden, so ist die Projektion wiederum symmetrisch in bezug auf die Lastrichtung gestaltet, wenn dies von der ersten Zeichnung zutraf. Im andern Falle erhält man aus dem symmetrischen Gewölbequerschnitte mit gleich hoch liegenden Kämpfern den Querschnitt eines sog. „einhüftigen" Gewölbes.

Von dieser Betrachtung kann man auf verschiedene Weise Gebrauch machen. Zunächst kann man sie zum Vergleiche von Wölbbögen mit verschiedenen Pfeilhöhen und im selben Verhältnisse geänderten Belastungshöhen bei gleicher Spannweite benutzen. Man findet dann z. B., daß beide Gewölbe unter diesen Umständen — wenn alle übrigen ungeändert bleiben — den gleichen Horizontalschub haben. Andere Schlüsse von ähnlicher Art liegen zu nahe, als daß sie im einzelnen aufgeführt zu werden brauchten.

Außerdem wird aber auch ein unter manchen Umständen sehr schätzenswertes Hülfsmittel für die genauere Konstruktion der Stützlinie dadurch an die Hand gegeben. Bei den weit gespannten flachen Brückenbögen von verhältnismäßig geringer Wölbstärke, die man in neuerer Zeit häufig (gewöhnlich unter Anordnung von Gelenken) ausführt, muß man nämlich, um die Stützlinie einigermaßen genau einzeichnen zu können, einen unbequem großen Maßstab anwenden. In diesem Falle gelangt man weit besser zum Ziele, wenn man die Zeichnung verzerrt ausführt, so daß man die Ordinaten in einem größeren Maßstabe, als die Abscissen, aufträgt. Man kann diese Zeichnung als eine schiefe Parallelprojektion jenes Wölbquerschnittes ansehen, für den man die Untersuchung durchzuführen hat. Die Stützlinie kann nun viel genauer eingetragen werden. Um nachher die Kantenpressung für irgend eine Fuge zu erhalten, muß man nur beachten, daß die Horizontalkomponente des zugehörigen Fugendruckes in einem andern Maßstabe auszu-

messen ist, als die Vertikalkomponente. In der Praxis scheint dieses einfache und bequeme Verfahren, das sich im übrigen ganz an die beim Auftragen der elastischen Linie eines Balkens in verzerrtem Maßstabe angewendete Methode anlehnt, bisher unbekannt geblieben zu sein.

§ 58. Ältere Ansichten über die wirklich auftretende Stützlinie.

Bei einem gelenklosen Gewölbe, wie es früher allein vorkam und auch jetzt noch, von den zuvor angeführten Fällen abgesehen, die Regel bildet, muß man sich auf irgend eine Art ein Urteil darüber zu verschaffen suchen, welcher von den statisch möglichen Gleichgewichtszuständen in Wirklichkeit zustande kommt.

Der erste, der sich hierüber eine bestimmte Ansicht bildete, war der englische Ingenieur Moseley, der im Jahre 1837 das sogenannte Prinzip des kleinsten Widerstandes aufstellte und in derselben Arbeit zugleich zuerst die Stützlinie als Hülfsmittel der Untersuchung einführte. Die Arbeit von Moseley wurde von Scheffler ins Deutsche übersetzt und von diesem eifrig vertreten. Die Moseleysche Theorie erlangte dadurch eine große Verbreitung und hat auch jetzt noch manche Anhänger. Es ist daher nötig, daß man sich mit ihr bekannt macht.

Zur Zeit Moseleys galten die Bausteine als starre Körper. Daß auch die Steine elastischer Formänderungen fähig sind, die durchaus mit denen der Metalle vor Überschreitung der Elastizitätsgrenze vergleichbar sind, hat man erst später gefunden. Sah man aber die Steine als starre Körper an und beachtete man, daß die Mechanik starrer Körper für sich allein nicht ausreicht, um eine Entscheidung zwischen den als statisch gleich möglich erkannten Gleichgewichtszuständen zu treffen, so mußte man zu dem Schlusse kommen, daß die Mechanik starrer Körper, so wie sie vorlag, noch nicht vollständig sein könne, sondern einer Ergänzung bedürfe. Denn offenbar kann unter den unendlich vielen statisch möglichen Gleichgewichtszuständen immer nur einer in Wirklichkeit auf-

treten und es muß daher ein Gesetz geben, nach dem sich dieser regelt. Diese — scheinbare — Lücke suchte nun Moseley durch das Prinzip des kleinsten Widerstandes auszufüllen. Tatsächlich besteht nämlich eine solche Lücke nicht, da die den Steinen zukommenden elastischen Eigenschaften schon vollständig ausreichen, um einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtszustand herbeizuführen, der von jenem, der nach dem Moseleyschen Satze folgen würde, im allgemeinen vollständig verschieden ist.

Da die Besprechung der Moseleyschen Ansicht nur noch einen historischen und allenfalls einen didaktischen Wert hat, indem sie vor einem allerdings nahe liegenden Fehlschlusse warnt, beschränke ich mich hier auf die Erörterung der wichtigsten Anwendung, die sie gefunden hat, nämlich auf die Entscheidung zwischen den verschiedenen möglichen Gleichgewichtszuständen eines Gewölbes. Das Gewölbe wird auf einem Lehrgerüste ausgeführt, das anfänglich die ganze Last allein aufnimmt. Wenn nachher das Gewölbe ausgerüstet, also seiner früheren Unterstützung beraubt wird, „sucht" es herabzufallen. Daran wird es nur durch die Unterstützung an den Widerlagern in Verbindung mit den passend angeordneten Fugenrichtungen verhindert. Denkt man sich die Ausrüstung allmählich vorgenommen, so daß ein allmählich wachsender Teil der Last auf das Gewölbe selbst entfällt, so wird auch der Horizontalschub des Gewölbes allmählich ansteigen. Moseley schloß nun, daß dieses Anwachsen gerade nur so lange andauere, bis der Horizontalschub groß genug geworden sei, um das Gewölbe zu befähigen, die Last allein aufzunehmen. Hiernach würde nach Beendigung des Ausrüstens die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes (der Horizontalschub ist in diesem Falle der kleinste „Widerstand" nach der Moseleyschen Auffassung) aufgetreten sein und diese würde nach Moseley auch weiterhin bestehen bleiben.

Die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes ist natürlich, wie bei allen Seilkurven, jene, die die möglichst große Pfeilhöhe hat. Bei den gewöhnlich — wenigstens damals gewöhnlich —

vorkommenden Gewölbequerschnitten geht sie durch den tiefsten Punkt jeder Kämpferfuge und den höchsten Punkt der Scheitelfuge. Jedenfalls berührt oder trifft sie aber sowohl die obere als die untere Begrenzungslinie des Gewölbequerschnittes.

Als man darauf aufmerksam wurde, daß bei dieser Drucklinie die Kantenpressung an den bezeichneten Stellen, sofern man auf die Zugfestigkeit des Mörtels nicht rechnen darf, unendlich groß würde, änderte man — unter Beibehaltung derselben Schlußweise im übrigen — die Betrachtung dahin ab, daß die Drucklinie von jenen Punkten gerade nur soweit abrücke, als es die Rücksicht auf die Festigkeit des Materiales erfordere. In dieser Form wird die Moseley-Schefflersche Theorie heute noch vielfach als richtig angesehen. Man nimmt also an, daß unter allen „Gleichgewichtsdrucklinien“ in dem früher besprochenen Sinne die am steilsten verlaufende und daher dem kleinsten Horizontalschube entsprechende die richtige sei.

Freilich ist nun keineswegs einzusehen, weshalb dieser Vorgang des Abrückens der Stützlinie von den zunächst am meisten gefährdeten Kanten gerade nur solange andauern soll, als es der Festigkeit oder gar der schätzungsweise als „zulässig“ angesehenen Beanspruchung des Materiales entspricht. Wenn man sich zu dieser Änderung der ursprünglichen Betrachtung, die zu einer unendlich großen Kantenpressung führte, einmal entschloß, hätte man weiter gehen, nämlich auf die Gründe eingehen müssen, die dieses Abrücken bedingen. Man mußte dann zu der Einsicht gelangen, daß es die elastische Nachgiebigkeit des Materiales ist, die zu der Abänderung des ursprünglich in Aussicht genommenen Gleichgewichtszustandes führt und daß daher die elastischen Eigenschaften den entscheidenden und ausreichenden Bestimmungsgrund für die Ausbildung des endgültigen Gleichgewichtszustandes abgeben.

Auf die Betrachtung dieser Formänderungen ging später Culmann näher ein. Dabei vernachlässigte er aber immer noch die elastische Nachgiebigkeit der Wölbsteine und achtete nur auf die Zusammendrückbarkeit des bald nach der Ausrüstung noch als ziemlich weich angesehenen Mörtels in den Fugen.

Er schloß, daß die Drucklinie des kleinsten Horizontalschubes, von der er zunächst ausging, zu einer sehr starken Zusammendrückung und zu einem Ausweichen des Mörtels an den meist beanspruchten Stellen führen müsse. Sobald der Mörtel an diesen Stellen nachgibt, kommen auch die andern Stellen der Fuge zur Lastübertragung und die Drucklinie rückt weiter ins Innere des Gewölbequerschnittes. Indem er sich diesen Vorgang in derselben Weise weiter fortgesetzt dachte, gelangte er zu der Ansicht, daß sich schließlich der günstigste Gleichgewichtszustand einstelle, nämlich jener, bei dem die Kantenpressung an den gefährdetsten Stellen den möglichst kleinen Wert annehme. Diese Culmannsche Theorie der günstigsten Drucklinie zählte lange Zeit hindurch die meisten Anhänger. Sie unterscheidet sich in ihren Ergebnissen übrigens auch nur wenig von der heute meist als zutreffend angesehenen, die von der Betrachtung des Gewölbes als eines elastischen Bogens ausgeht und die im nächsten Paragraphen näher besprochen werden soll.

Vorher sei indessen noch darauf hingewiesen, daß bei der Culmannschen Betrachtung — ebenso wie bei der nachher folgenden — vollkommen unverrückbare Widerlager vorausgesetzt wurden. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, daß ein merkliches Nachgeben der Widerlager wieder eine Annäherung der Stützlinie an jene des kleinsten Horizontalschubes bewirkt, denn ein starkes Nachgeben müßte, wie aus rein geometrischen Gründen folgt, zu einem Öffnen der Fugen (im Scheitel nach innen, am Kämpfer nach außen hin) und damit zu einem Abrücken des Druckmittelpunktes nach der entgegengesetzten Kante hin führen. Wenn die Widerlagsmauern sehr stark, das Gewölbe selbst im Vergleiche dazu sehr schwach zusammendrückbar wären, würde die Culmannsche Betrachtung ebenfalls zu dem Schlusse führen, daß sich die Stützlinie nicht viel von der des kleinsten Horizontalschubes unterscheiden könne. Bei einer sorgfältig durchdachten und gut ausgeführten Konstruktion liegt aber zu einem so verschiedenen Verhalten der Widerlagsmauern und des Wölbbogens kein Grund vor. Gewöhnlich können die Widerlager einfach als Fortsetzungen

des Gewölbes bis zum Fundamente hin angesehen werden und was hier zunächst von dem Wölbbogen selbst gesagt wird, läßt sich dann sofort auch auf die aus ihm und den Widerlagsmauern bestehende ganze Konstruktion sinngemäß übertragen.

§ 59. **Die Elastizitätstheorie des Tonnengewölbes.**

Die Mauersteine gehorchen zwar nicht genau dem Hookeschen Gesetze von der Verhältnisgleichheit der elastischen Formänderungen mit den Spannungen, ebensowenig der Zementbeton, aus dem man in neuerer Zeit häufig große Gewölbe herstellt. Immerhin sind bis zu den als zulässig angesehenen und daher in Aussicht zu nehmenden Spannungen die Abweichungen nicht sehr erheblich. Man darf es daher als eine recht gute Annäherung an das wirkliche Verhalten betrachten, wenn man die Theorie der Gewölbe auf die allgemeinen Lehrsätze der gewöhnlichen Elastizitätstheorie stützt. In der Tat haben auch Versuche, die vor einigen Jahren von dem Österreichischen Ing.- und Arch.-Vereine in großem Maßstabe veranlaßt wurden, eine befriedigende Übereinstimmung zwischen dem tatsächlich beobachteten und dem auf Grund der Elastizitätstheorie berechneten Verhalten der Gewölbe ergeben.

Um nicht zu weitläufig werden zu müssen, beziehe ich mich hier auf die im dritten Bande auseinander gesetzten Lehren und zwar werde ich mich dabei des Castiglianoschen Satzes bedienen, wonach die statisch unbestimmten Größen einer Konstruktion solche Werte annehmen, die die Formänderungsarbeit zu einem Minimum machen. Es wird sich also vor allem darum handeln, einen Ausdruck für die elastische Formänderungsarbeit A aufzustellen, die in dem elastischen Bogen, als den wir das Gewölbe ansehen dürfen, infolge der in ihm auftretenden Spannungen und Formänderungen aufgespeichert ist. Dabei mag in erster Linie angenommen werden, daß die Widerlager als vollkommen starr und unbeweglich angesehen werden dürfen, so daß auf sie keine Formänderungsarbeit entfällt. Dagegen steht es späterhin auch frei, dieselbe Betrachtung auf die ganze Konstruktion mit Einschluß der Widerlagsmauern auszudehnen,

wobei diese als Fortsetzungen des Gewölbes bis zur Fundamentsohle hin anzusehen sind.

Für irgend einen normal zur Wölbmittellinie gezogenen Fugenschnitt sei der Fugendruck mit R, der Abstand des Druckmittelpunktes von der Fugenmitte mit u bezeichnet. Die Formänderungsarbeit dA in einem Gewölbeelemente, das zum Bogenelemente ds der Wölbmittellinie gehört, setzt sich dann aus zwei Gliedern zusammen, von denen das erste dem zentrisch angebracht gedachten Drucke R, das andere dem Biegungsmomente $M = Ru$ entspricht. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die ganze Fuge an der Druckübertragung beteiligt sei. Bei jenen Gewölben, für die man genauere Rechnungen dieser Art durchführt und auf deren Grund die Gestalt und Stärke des Gewölbes bemißt, trifft dies auch stets zu. Für dA hat man dann nach den Lehren des dritten Bandes

$$dA = \frac{R^2}{2EF} ds + \frac{M^2}{2E\Theta} ds.$$

Hierin bedeutet F die Fugenfläche, die auch gleich der Fugenlänge f gesetzt werden kann, da die senkrecht zum Gewölbequerschnitte stehende Länge der Fuge gleich der Längeneinheit ist. Unter Θ ist das Trägheitsmoment der Fugenfläche oder $\frac{f^3}{12}$ und unter E der Elastizitätsmodul des Wölbmateriales zu verstehen. Im ganzen wird daher die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12 M^2}{f^3}\right) ds, \tag{85}$$

wobei sich das Integral auf die ganze Bogenlänge (gegebenen Falles mit Einschluß der Widerlager) zu erstrecken hat.

Die Werte von R und M sind an jeder Stelle von der Stützlinie abhängig, die man ins Auge faßt. Für jede Stützlinie läßt sich A berechnen und der Castiglianosche Satz lehrt, daß jene Stützlinie wirklich zur Geltung kommt, für die A zu einem Minimum wird. Wir wissen ferner, daß jede Stützlinie von drei Bestimmungsstücken abhängig ist, also z. B. von Größe, Lage und Richtung irgend eines Fugendruckes. Denkt man sich diese Bestimmungsstücke auf irgend eine Art aus-

gewählt, so können alle R und M in ihnen ausgedrückt werden. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit A läßt sich dann vollständig auswerten, bis auf die drei zunächst willkürlich bleibenden Bestimmungsstücke, die als die statisch unbestimmten Größen des Problems anzusehen sind. Man differentiiert nun A partiell nach jeder dieser drei Größen und setzt die Differentialquotienten gleich Null. Damit erhält man drei Gleichungen, deren Auflösung die drei statisch unbestimmten Größen liefert, womit der zu erwartende Gleichgewichtszustand des Gewölbes vollständig bekannt wird.

Hiermit ist das Verfahren im allgemeinen umschrieben. Auf die ausführliche Ausrechnung brauche ich mich hier nicht einzulassen; es genügt vielmehr, im Anschlusse an das Vorausgehende die Ableitung eines wenigstens näherungsweise zutreffenden Satzes zu geben, der von Winkler aufgestellt wurde und der einen raschen Überblick darüber gestattet, welche Stützlinie ungefähr zu erwarten ist.

Das erste Glied in dem Ausdrucke für A ändert sich nämlich von einer Stützlinie zur andern verhältnismäßig nur wenig. Für alle Stützlinien, die hierbei überhaupt in Frage kommen können, weichen die zu gegebenen Fugen gehörigen Fugendrücke R nicht allzuviel voneinander ab. Anders ist es dagegen mit dem zweiten Gliede, da die Abstände u der Druckmittelpunkte von den Fugenmitten und hiermit die Momente M bei verschiedenen Stützlinien sehr verschieden ausfallen. Dabei ist das zweite Glied, wie man aus dem Ausdrucke $M = Ru$ erkennt, der Größe nach im allgemeinen durchaus mit dem ersten vergleichbar. Nur bei jenen Stützlinien, die etwa überall sehr nahe an der Mittellinie verlaufen, wird das zweite Glied klein gegenüber dem ersten. Sehen wir aber von diesem Falle vorläufig ab, so wird A besonders dadurch verkleinert werden können, daß man das stark veränderliche zweite Glied möglichst klein macht, während man das wenig veränderliche erste Glied für eine erste Annäherung unbeachtet lassen kann. Bei der als wahrscheinlich in Aussicht zu nehmenden Stützlinie wird daher der Ausdruck

$$\int \frac{M^2}{f^3} ds$$

zu einem Minimum werden.

Anstatt $M = Ru$ zu setzen, wie es vorher geschehen war, kann man sich von der Fugenmitte aus eine Strecke z in lotrechter Richtung bis zur Richtungslinie von R gezogen denken und R im Endpunkte von z in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegen. Die horizontale Komponente ist der konstante Horizontalschub H des Gewölbes und dessen Moment ist gleich Hz, während das Moment der Vertikalkomponente in bezug auf den Fugenmittelpunkt verschwindet Man hat daher auch $M = Hz$ und der Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll, geht über in

$$H^2 \int \frac{z^2}{f^3} ds.$$

Auch der Horizontalschub H zeigt bei den verschiedenen Stützlinien, die miteinander zu vergleichen sind, keine großen Abweichungen, während der zweite Faktor des Produktes stark veränderlich ist. Nimmt man überdies an, daß die Wölbstärke f konstant sei, so wird demnach ungefähr jene Stützlinie zustande kommen, für die

$$\int z^2 ds$$

den möglichst kleinen Wert annimmt. Dieser Ausdruck hat aber eine einfache Bedeutung: er stellt die Summe der Quadrate der in lotrechter Richtung gemessenen Abweichungen zwischen Bogenmittellinie und Stützlinie dar und kann geradezu als ein Maß für die gesamte Abweichung zwischen beiden Linien betrachtet werden. Wir können demnach mit Winkler den Satz aussprechen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen jene Stützlinie nahezu die richtige ist, die sich der Bogenmittellinie so eng als möglich anschließt.

Gewöhnlich nimmt man freilich die Wölbstärke f nicht konstant an, sondern macht sie im Scheitel am kleinsten und läßt sie von da aus nach den Kämpfern hin etwas zunehmen, weil auch der Fugendruck R in dieser Richtung hin zunimmt.

Bezeichnet man die Horizontalprojektion des Bogenelementes ds mit dx, so nimmt für gleiche dx auch ds vom Scheitel nach den Kämpfern hin zu. Für den Fall, daß sich f^3 gerade proportional mit $\frac{ds}{dx}$ ändert, daß also

$$f^3 = f_0^3 \frac{ds}{dx}$$

ist, wenn f_0 die Scheitelstärke bezeichnet, erhält man für den Ausdruck, der zu einem Minimum werden soll,

$$\frac{H^2}{f_0^3}\int z^2 dx,$$

d. h., da H nicht merklich veränderlich und f_0 konstant ist, muß

$$\int z^2 dx$$

möglichst klein werden und auch dieses Resultat kann ähnlich gedeutet werden, wie das vorhergehende.

Wird die Mittellinie des Bogens so gewählt, daß sie selbst mit einem zur Belastungsfläche gehörigen Seilpolygone zusammenfällt, also eine der statisch möglichen Stützlinien darstellt, so kann sich nach den vorausgehenden Betrachtungen die wahre Stützlinie nicht viel von der Mittellinie entfernen. Für die Mittellinie selbst als Stützlinie wird nämlich $\int z^2 ds$ oder auch $\int z^2 dx$ zu Null und daher zu einem Minimum, da sich beide Integrale aus lauter positiven Gliedern zusammensetzen und daher niemals negativ werden können. Man darf daraus nun freilich nicht schließen, daß die wahre Stützlinie unter den bezeichneten Umständen genau mit der Mittellinie zusammenfiele. Bei den in nächster Nähe der Mittellinie verlaufenden Stützlinien wird nämlich das zweite Glied in dem Ausdrucke für die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\frac{R^2}{f} + \frac{12 M^2}{f^3}\right) ds$$

überhaupt sehr klein und es kommt dann wesentlich auf die, wenn auch an sich nicht sehr erheblichen, Änderungen des alsdann viel größeren ersten Gliedes an. Man kann auch leicht

sagen, in welchem Sinne eine Abweichung der wahren Stützlinie von der Mittellinie in diesem Falle zu erwarten ist. Je steiler nämlich die Stützlinie verläuft, um so kleiner wird der Horizontalschub H und mit ihm auch jedes R. Die Abweichung wird also nach der Richtung der Drucklinie des kleinsten Horizontalschubes hin erfolgen. Sehr groß kann aber diese Abweichung andererseits niemals werden, weil sich sonst sofort ein starkes Anwachsen des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für A herausstellen müßte, das weit mehr ausmachte, als die Verkleinerung, deren das erste Glied fähig ist.

Diese Betrachtung liefert das für die praktische Beurteilung des Gewölbegleichgewichtes sehr wertvolle Resultat, daß die elastischen Formänderungen des Gewölbes infolge der Belastung die Stützlinie so verschieben, daß sie sich ziemlich eng an die Mittellinie anschließt, so weit dies durch die Gestalt des Gewölbes ermöglicht ist. Zugleich lehrt sie, daß es vorteilhaft ist, die Gestalt der Wölbmittellinie, deren Wahl dem Konstrukteur häufig frei steht, so zu bestimmen, daß sie mit einer Seilkurve für die Belastungsfläche zusammenfällt.

§ 60. Vereinfachte Berechnung der Gewölbe.

Die genauere Berechnung der Gewölbe auf Grund der Elastizitätstheorie, die vorher nur in allgemeinen Umrissen beschrieben wurde, macht ziemlich viel Mühe und lohnt sich nur bei besonders großen und wichtigen Ausführungen.*) Da man aber bei diesen jetzt meist Gelenke einschaltet, wird sie auch hier in der Regel entbehrlich. Bei kleineren Ausführungen macht man das Gewölbe lieber etwas stärker, als eigentlich nötig wäre und behilft sich dafür bei der Stabilitätsunter-

*) Eine sehr brauchbare Darstellung der Elastizitätstheorie der Gewölbe hat neuerdings Prof. Landsberg in der Zeitschr. des Vereins Deutsch. Ingen. 1901, S. 1765 gegeben. Die genauere Berechnung wird dadurch erheblich erleichtert, macht aber immer noch ziemlich viel Mühe.

suchung mit einer vereinfachten Berechnung. Man kann es auf Grund der zahlreichen Erfahrungen, die in dieser Hinsicht vorliegen, als verbürgt betrachten, daß ein Gewölbe, das den üblichen Vorschriften genügt, hinreichend sicher ist.

Wenn ein Gewölbequerschnitt samt Belastungsfläche gegeben ist, zeichnet man zunächst eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der beiden Kämpferfugen geht. Hierauf überzeugt man sich, ob diese willkürlich gewählte Stützlinie nicht nur überall innerhalb des Gewölbequerschnittes verläuft, sondern ob sie sich auch keiner Kante um mehr als bis auf ein Drittel der betreffenden Fugenlänge nähert. Dies sieht man nämlich als nötig an, teils um einen gewissen Überschuß an Sicherheit zu erlangen, teils um eine Zugbeanspruchung des Mörtels und ein bei dessen Versagen zu befürchtendes Aufklaffen der Fuge zu verhüten. Hierauf berechnet man nach den früher gegebenen Formeln die größte auftretende Kantenpressung und vergleicht sie mit der als zulässig zu betrachtenden Druckbeanspruchung des Materiales. Wird diese nirgends überschritten und ist die vorher genannte Bedingung erfüllt, so betrachtet man das Gewölbe an sich als vollkommen sicher.

Ergibt sich bei dieser Berechnung, daß die Kantenpressung überall erheblich kleiner bleibt, als die zulässige Materialbeanspruchung, so schließt man, daß das Gewölbe unnötig stark ist und hält eine Verkleinerung der Wölbstärke für angezeigt. Findet man umgekehrt, daß die zuerst gezeichnete Stützlinie nicht überall innerhalb des mittleren Fugendrittels verläuft, so kann man, namentlich für den Fall einer unsymmetrischen Belastung, zunächst versuchen, ob sich die Stützlinie durch eine Änderung in der Annahme der Druckmittelpunkte in Scheitel- und Kämpferfugen so verschieben läßt, daß sie nachher überall innerhalb des mittleren Drittels bleibt. Läßt sich dies erreichen und wird die Kantenpressung für die neu gezeichnete Stützlinie nicht zu groß, so ist das Gewölbe immer noch als hinreichend sicher für die gegebene Belastung anzusehen. Im andern Falle muß man entweder die zuerst in

Aussicht genommene Gewölbeform entsprechend abändern oder die Wölbstärken vergrößern, bis den gegebenen Vorschriften genügt ist.

Hiermit ist die Untersuchung aber noch nicht abgeschlossen. Man muß nun auch noch die Druckübertragung in den Pfeilern oder Widerlagsmauern verfolgen, am einfachsten, indem man die Stützlinien in diese hinein fortführt (durch Zusammensetzung des Kämpferdruckes des Gewölbes mit den Mauergewichten des Widerlagers). Auf diese Weise gelangt man entweder unten zu ausgedehnten Mauermassen, deren Standsicherheit ohne weiteres feststeht, oder zur Fundamentsohle. Der Druck auf die Fundamentsohle wird ebenfalls berechnet und mit der zulässigen Belastung des Baugrundes, die gewöhnlich durch baupolizeiliche Bestimmungen vorgeschrieben ist, verglichen.

Außerdem ist noch auf die verschiedenen Belastungsarten zu achten, die bei dem fertigen Bauwerke vorkommen können. Man hat den Nachweis zu führen, daß für jede Belastungsweise, die als möglich in Aussicht zu nehmen ist, die vorher besprochenen Bedingungen erfüllt sind. Freilich ist, wie ich schon früher bemerkte, die Verkehrslast gewöhnlich nicht sehr erheblich gegenüber der Eigenlast des Gewölbes und seiner Übermauerung oder Überschüttung. Daher genügt es in der Regel, außer der größten Belastung, die das Gewölbe zu tragen hat, nur noch jenen Belastungsfall ins Auge zu fassen, bei dem die eine Gewölbehälfte möglichst viel, die andere möglichst wenig belastet ist.

Einige Beispiele für die Ausführung der Berechnung findet man unter den Aufgaben.

§ 61. Die Kuppelgewölbe.

Die Kuppel unterscheidet sich in ihrem statischen Verhalten von dem Tonnengewölbe wesentlich dadurch, daß außer den Fugenpressungen in den Lagerfugen, deren Angriffspunkte im Gewölbequerschnitte in ihrer Aufeinanderfolge die Stützlinie bilden, auch noch Fugenpressungen in den Meridianschnitten

vorkommen. Früher suchte man zwar die Theorie der Kuppelgewölbe dadurch auf die Theorie der Tonnengewölbe zurückzuführen, daß man einen zwischen zwei unendlich benachbarten Meridianschnitten liegenden Kuppelsektor mit einem Abschnitte eines Tonnengewölbes verglich. Man nahm hierbei keine Rücksicht auf die Fugenpressungen in den Meridianschnitten (oder in den „Stoßfugen"), setzte dagegen voraus, daß im Scheitel ein Horizontalschub auftrete, wie bei einem Tonnengewölbe. Dies war aber, wie Moseley zuerst zeigte, irrig. Endet nämlich zunächst das Kuppelgewölbe oben in einen Nabelring, so fehlt dem Kuppelsektor am oberen Ende überhaupt jede Stützung und er müßte notwendig herabfallen, wenn er für sich allein ausgeführt wäre. Man erkennt hieraus schon, daß die Fugenpressungen in den Meridianschnitten zwischen den benachbarten Kuppelsektoren, im Gegensatze zum Tonnengewölbe eine sehr wesentliche Rolle spielen und zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes durchaus unentbehrlich sind.

Aber auch wenn das Kuppelgewölbe oben geschlossen ist, kann kein Horizontalschub am oberen Ende des Kuppelsektors auftreten. Der Kuppelsektor endet nämlich im Scheitel in einer Kante oder, wie wir auch sagen können, in einer Fläche, deren Inhalt gleich Null ist. Da unendlich große spezifische Spannungen nicht übertragen werden können, wird mit dem Flächeninhalte Null auch der in dieser Fläche übertragene Druck zu Null. Auf die Übertragung eines Horizontalschubes im Scheitel des Kuppelsektors, der dessen Gleichgewicht in ähnlicher Weise wie bei einem Tonnengewölbe aufrecht erhalten könnte, ist daher in keinem Falle zu rechnen.

Dagegen setzen sich die in je zwei entsprechenden Flächenteilen beider Meridianschnitte übertragenen Stoßfugendrücke zu einer horizontalen Resultierenden zusammen, die der Symmetrie wegen in die Mittelebene des Kuppelsektors fällt. Diese horizontal nach außen hin gehenden Resultierenden treten hier an die Stelle des Horizontalschubes im Scheitel. Dabei besteht aber gegenüber dem Tonnengewölbe immer noch der Unterschied, daß sich diese Resultierenden über die ganze Mittelebene

des Kuppelsektors nach einem zunächst unbekannten Gesetze verteilen und nicht im Scheitel vereinigt sind.

Hieraus folgt auch, daß die Stützlinie beim Kuppelgewölbe keineswegs ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors bildet. Vielmehr ist jede beliebig im Gewölbequerschnitte gezogene Linie als Stützlinie statisch möglich, falls nur die in den Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen (oder Stoßfugendrücke) passend dazu gewählt werden. Das Gleichgewicht im Kuppelgewölbe ist daher unendlichfach statisch unbestimmt.

Natürlich gilt auch hier, wie bei den Tonnengewölben, wenn man auf die elastischen Eigenschaften des Wölbmateriales Rücksicht nimmt, der Satz, daß jener Gleichgewichtszustand in Wirklichkeit zu erwarten ist, für den die Formänderungsarbeit zu einem Minimum wird. Dies wird nahezu jener sein, bei dem sich die Stützlinie so eng als möglich an die Mittellinie des Gewölbequerschnittes anschließt. Nun kann sich die Stützlinie hier bei jeder Gestalt des Gewölbequerschnittes mit der Mittellinie decken. Man nimmt also bei der Ausführung der Berechnung zunächst die Stützlinie als zusammenfallend mit der Mittellinie an und bestimmt die aus dieser Annahme folgenden Spannungen in den Meridianschnitten, die man sich der Gewölbedicke nach ebenfalls gleichförmig verteilt zu denken hat. Hierbei stellt sich nun bei den gewöhnlich ausgeführten Kuppelformen heraus, daß in den Meridianschnitten im oberen Teile Druckspannungen, weiter unten hin dagegen Zugspannungen zu übertragen wären, um den zunächst in Aussicht genommenen Gleichgewichtszustand zu verwirklichen.

Der Mörtel kann aber größere Zugspannungen nicht übertragen und in der Tat hat man auch bei vielen der berühmtesten Kuppelbauten die Erfahrung gemacht, daß sich in den unteren Teilen der Kuppel Risse einstellten, die in der Richtung der Stoßfugen (also der Meridianschnitte) verlaufen. Um diesem Übelstande abzuhelfen, hat man gewöhnlich nachträglich eiserne Reifen um die unteren Teile der Kuppel gelegt, die diese ähnlich

zusammenhalten, wie die Reifen ein Faß. Man erreichte dadurch, daß nun in der Tat in den Meridianschnitten Zugspannungen übertragen werden konnten, zwar nicht mehr im Mauerwerke selbst, sondern in den eisernen Reifen, die dafür eintraten.

Will man, daß das Gleichgewicht der Kuppel auch ohne eine Verstärkung durch Eisenringe gesichert sei, so muß man von jener Stelle ab, wo sonst die Zugspannungen einsetzen würden, die Stützlinie nach abwärts ohne Heranziehung der Ringspannungen fortsetzen. Im unteren Teile ist dann die Stützlinie wieder ein Seilpolygon zu den Lasten des Kuppelsektors. Sie ist ferner auch in die Widerlagsmauern der Kuppel hinein fortzusetzen. Entspricht die in dieser Weise ermittelte Stützlinie überall denselben Forderungen, wie sie schon beim Tonnengewölbe erhoben wurden, so kann das Gleichgewicht der Konstruktion auch ohne Zuhülfenahme einer Verstärkung durch Eisenringe als gesichert gelten.

Bei allen diesen Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß die Kuppel einen Rotationskörper bilde und daß auch die Lasten, die sie zu tragen bestimmt ist, symmetrisch um die Rotationsachse herum verteilt seien. Für andere Belatungsfälle, etwa für den, daß die eine Hälfte der Kuppel stärker belastet ist, als die andere, hat man bisher, soweit mir bekannt ist, keine Theorie aufgestellt. Diese müßte auch jedenfalls viel verwickelter und schwieriger sein, als für den Fall der symmetrischen Belastung.

In Abb. 162 ist die vorher besprochene Konstruktion für eine oben geschlossene Kuppel durchgeführt, die nur ihr eigenes Gewicht zu tragen bestimmt ist. Der Kuppelquerschnitt wurde durch Fugen, die rechtwinklig zur Mittellinie gezogen sind und deren längs der Mittellinie gemessenen Abstände gleich groß gewählt wurden, in acht Abschnitte eingeteilt. Die zu diesen Abschnitten gehörigen Gewichte im Kuppelsektor verhalten sich zueinander wie die Produkte aus den mittleren Wölbstärken und den Entfernungen der Schwerpunkte von der Kuppelachse. Das dem Abschnitte 5 entsprechende Gewicht

wurde im Kräfteplane durch die mittlere Wölbstärke dieses Abschnittes dargestellt. Um die Gewichte der übrigen Abschnitte im gleichen Maßstabe auftragen zu können, mußten

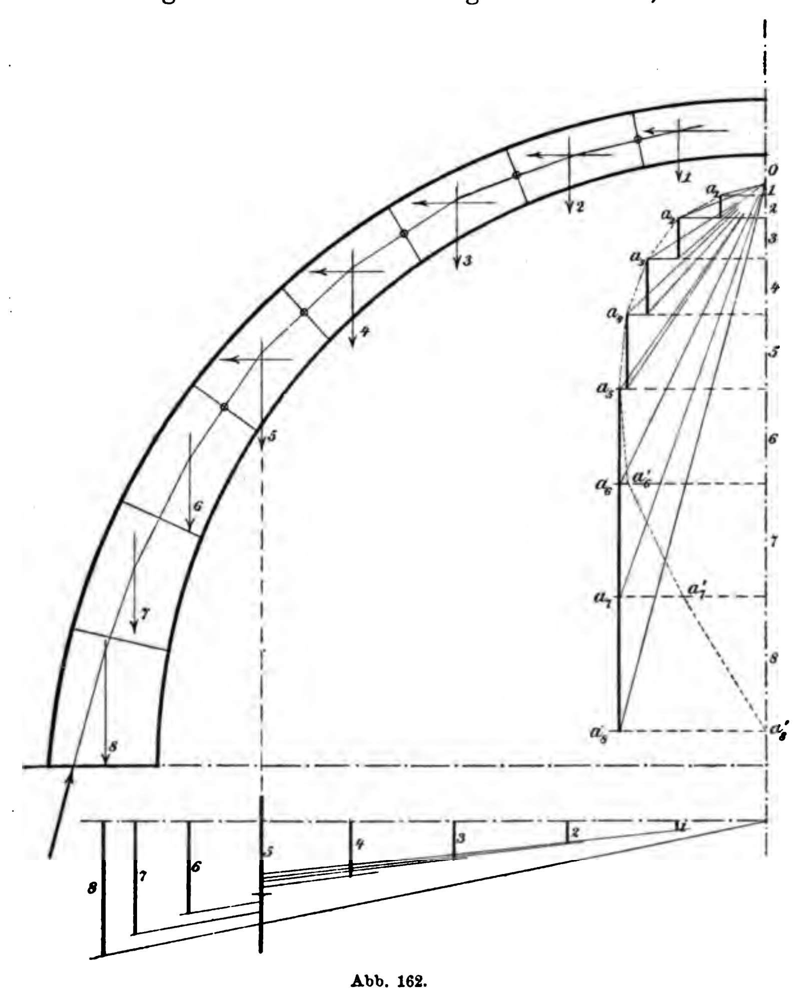


Abb. 162.

deren mittlere Wölbstärken im Verhältnisse der Schwerpunktsabstände zum Schwerpunktsabstande des fünften Abschnittes verkleinert oder vergrößert werden. Dies ist im unteren Teile

der Figur, der keiner weiteren Erläuterung bedarf, ausgeführt worden.

Die Linien 1, 2 u. s. f. im Kuppelquerschnitte sind durch die Schwerpunkte der betreffenden Abschnitte des Kuppelsektors zu ziehen, die etwas weiter nach außen hin liegen, als die Schwerpunkte der zugehörigen Abschnitte des Kuppelquerschnittes. Indessen macht sich der Unterschied nur bei den oberen Abschnitten stärker bemerklich; bei den tiefer liegenden ist er unerheblich.

Im oberen Teile soll die Stützlinie mit der Mittellinie zusammenfallen. Ferner kann angenommen werden, daß sich die Ringspannungen innerhalb jedes Abschnittes gleichförmig über die Fläche verteilen. Die in der Mittelebene des Kuppelsektors liegende Resultierende der in den beiden Meridianschnitten übertragenen Ringspannungen ist daher durch den Schwerpunkt des zugehörigen Querschnittsteiles horizontal nach außen hin zu ziehen. Der Schnittpunkt dieser Resultierenden für den obersten Abschnitt mit der Richtungslinie des Gewichtes 1 ist mit der Mitte der nächsten Lagerfuge zu verbinden. Die Verbindungslinie gibt die Richtung des zugehörigen Fugendruckes an. Da das Gewicht 1 bekannt ist, liefert das Dreieck, dessen Hypotenuse Oa_1 und dessen vertikale Kathete 1 ist, im Kräfteplane sofort die Größe des Fugendruckes und die Resultierende aus den Ringspannungen.

Dann geht man zum Abschnitte 2 über, setzt dessen Gewicht mit dem von oben kommenden Lagerfugendrucke zusammen, ermittelt den Schnittpunkt der Resultierenden mit der Resultierenden der Ringspannungen für diesen Abschnitt (in der Abbildung gehen die Richtungslinien der drei Kräfte zufällig fast genau durch einen Punkt) und verbindet den Schnittpunkt mit der nächstfolgenden Fugenmitte. Dadurch werden die Richtungen aller am Abschnitte 2 angreifenden Kräfte bekannt. Auch die Größen der beiden bis dahin noch unbekannten folgen ohne weiteres aus dem Kräfteplane. Der Fugendruck auf die untere Fuge wird durch die Strecke Oa_2, die Resultierende aus den Ringspannungen durch die horizontale Kom-

ponente der Strecke $a_1 a_2$ angegeben. In derselben Weise setzt man die Konstruktion weiter nach unten hin fort.

Wenn man zum fünften Abschnitte gelangt ist, bemerkt man, daß die Resultierende aus den Ringspannungen, die durch den horizontalen Abstand von a_4 und a_5 im Kräfteplane dargestellt wird, nur noch sehr klein ist. Beim sechsten Abschnitte würde diese Resultierende negativ (nach innen zu gerichtet) werden, d. h. es müßten Zugspannungen in den Meridianschnitten auftreten, wenn man die Stützlinie hier immer noch mit der Mittellinie zusammenfallen lassen wollte. Wir nehmen daher an, daß im sechsten, siebenten und achten Abschnitte überhaupt keine Ringspannungen mehr auftreten und setzen nur jedesmal den von oben her kommenden Fugendruck mit dem Gewichte des Abschnittes zusammen. Hierdurch erhält man den unteren Teil der Stützlinie, auf dessen Gestalt es vorwiegend ankommt.

Sitzt die Kuppel auf einer Mauertrommel, so ist die Stützlinie in diese hinein fortzusetzen, indem man den von der Kuppel herrührenden Fugendruck mit dem Gewichte des Trommelsektors zusammensetzt. Zu dessen Darstellung im Kräfteplane ist natürlich von derselben Konstruktion Gebrauch zu machen, die schon bei den Kuppelabschnitten verwendet wurde. Ringspannungen sind in der Mauertrommel außer Ansatz zu lassen.

Will man ferner durch Umlegen von eisernen Reifen vermeiden, daß die Trommel durch einen Horizontalschub der Kuppel beansprucht wird, so ist die Größe der Kräfte, die von den Eisenreifen aufzunehmen sind, ebenfalls aus dem Kräfteplane zu entnehmen. Man setzt dann die Stützlinie auch im unteren Teile längs der Mittellinie fort, wozu die Punkte a_6, a_7' und a_8' im Kräfteplane gehören. Die horizontalen Komponenten der Strecken $a_5 a_6'$, $a_6' a_7'$ und $a_7' a_8'$ geben nach einer sofort vorzunehmenden einfachen Umrechnung die von den Eisenreifen aufzunehmenden Ringspannungen an.

Für diese Umrechnung nehme man an, daß der Winkel zwischen den beiden Meridianebenen, die den betrachteten

Kuppelsektor begrenzen, $d\alpha$ sei. Die Länge eines Abschnittes der Mittellinie zwischen zwei aufeinander folgenden Fugen in der natürlichen Größe gemessen sei l, der Schwerpunktsabstand des fünften Abschnittes von der Kuppelachse s, der Maßstab der Zeichnung $\frac{1}{n}$ und das Gewicht der Raumeinheit des Mauerwerkes γ. Dann sind die Gewichte im Kräfteplane so aufgetragen, daß die Längeneinheit ein Mauervolumen $nlsd\alpha$ und daher eine Kraft von der Größe $nls\gamma d\alpha$ vorstellt. Nun gibt die Strecke a_7a_7' die Resultierende der zum siebenten Abschnitte gehörigen Ringspannungen in diesem Maßstabe an. Die Ringspannungen selbst stehen senkrecht zu den beiden Meridianebenen, die den Kuppelsektor begrenzen und bilden einen Winkel miteinander, der um $d\alpha$ von einem gestreckten abweicht. Ihre Resultierende ist gleich der Größe von einer von ihnen, multipliziert mit $d\alpha$. Umgekehrt wird daher die in einem Teile des Meridianschnittes übertragene Ringspannung aus jener Resultierenden durch Streichen des Faktors $d\alpha$ gefunden. Hiernach bedeutet die Längeneinheit der Strecke a_7a_7' im Kräfteplane eine von den Eisenreifen aufzunehmende Ringspannung von der Größe $nls\gamma$. Wäre also z. B. a_7a_7' gleich 1 cm oder 0,01 m, der Maßstab der Zeichnung $1:n$ gleich $1:100$, $l=2$ m, $s=9$ m und das Gewicht von 1 m³ Mauerwerk gleich 2000 kg, so würde die Ringspannung im siebenten Abschnitte gleich $100 \cdot 0{,}01 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2000$ oder gleich 36000 kg zu setzen sein. — Ähnlich ist auch bei allen andern Umrechnungen zu verfahren, z. B. wenn man die Kantenpressungen in einer Fuge ermitteln will. Der zunächst einzuführende Faktor $d\alpha$ hebt sich dann jedesmal wieder heraus.

Bei diesem Beispiele wurde vorausgesetzt, daß die Kuppel nur ihr eigenes Gewicht zu tragen habe. Kommt noch eine Belastungsfläche hinzu, so erhöhen sich die Gewichte der einzelnen Abschnitte entsprechend, während das Verfahren im Übrigen genau so beizubehalten ist.

Auch dann übrigens, wenn die Kuppel tatsächlich nur ihre Eigenlast aufnehmen soll, tut man, wie Autenrieth in

einer Besprechung des vorher geschilderten Verfahrens ganz zutreffend hervorgehoben hat, besser daran, sie unter der Voraussetzung zu berechnen, daß ihr überdies noch eine passend gewählte fremde Last (in symmetrischer Verteilung um die Kuppelachse) aufgebürdet sei. Im andern Falle würde nämlich jeder Maßstab für die Bemessung der erforderlichen Wölbstärke fehlen. Macht man nämlich die Kuppel schwächer (namentlich in ihrem oberen Teile), so vermindern sich die Lasten in demselben Maße wie die Fugenflächen und die Beanspruchung des Materiales bleibt dieselbe. Mit Rücksicht auf zufällige Umstände, die eine andere Art der Belastung herbeiführen könnten, ist aber die Kuppel mit größerer Wölbstärke trotzdem als sicherer zu betrachten, als die mit schwächerer Wölbstärke. Man trägt dem am besten durch Annahme einer etwa gleichförmig verteilten zufälligen Belastung Rechnung. Dann ergibt sich, wie groß die Wölbstärke etwa im Scheitel zu wählen ist, damit die Druckbeanspruchung des Materiales nicht zu groß ausfällt. — Die Beanspruchung im Scheitel ergibt sich übrigens aus der horizontalen Komponente von Oa_1 in derselben Weise wie vorher, da im Scheitel nur die Spannungen in den Meridianschnitten in Frage kommen.

Schließlich bemerke ich noch, daß auch Temperaturschwankungen von erheblichem Einflusse auf das Verhalten der Kuppel sein können. Sie werden sich, unter der Voraussetzung, daß sich die Temperatur der ganzen Kuppel gleichmäßig ändert, zunächst vorwiegend darin äußern, daß die Stelle, von der ab die Stützlinie nicht mehr mit der Mittellinie zusammenfällt, etwas hinauf- oder hinabrückt. Namentlich bei der Berechnung von eisernen Reifen, die etwa um den unteren Teil der Kuppel gelegt werden sollen, ist auf die Temperaturschwankungen Rücksicht zu nehmen, da der Ausdehnungskoeffizient des Eisens von dem des Mauerwerkes verschieden ist. Hier ist aber auf diese Dinge nicht weiter Rücksicht zu nehmen, da es sich für uns nur darum handeln kann, die Hauptgrundlagen der Theorie auseinander zu setzen.

§ 62. Die graphische Berechnung der durchlaufenden Träger.

Früher bildete die Theorie der durchlaufenden oder kontinuierlichen Träger eines der wichtigsten und mit besonderer Ausführlichkeit bearbeiteten Kapitel der technischen Mechanik. Heute hat sie an Bedeutung verloren, teils weil man von der Ausführung durchlaufender Träger wegen der Schwierigkeit, die Höhenlagen der Stützpunkte genau einzuhalten und wegen des Einflusses ungleicher Temperaturänderungen mehr abgekommen ist, teils weil die in größerem Maßstabe ausgeführten durchlaufenden Träger als Fachwerkbalken konstruiert und als solche berechnet werden. Immerhin verdient aber die Theorie der durchlaufenden vollwandigen Träger in ihren Grundzügen auch heute noch große Beachtung, da man immer noch häufig genug Gelegenheit hat, von ihr Gebrauch zu machen.

Die analytische Berechnung der durchlaufenden Träger bespreche ich in der Festigkeitslehre; ich verweise wegen ihr auf den dritten Band dieses Werkes. Hier handelt es sich im wesentlichen nur um die von Mohr gelehrte graphische Methode, die sich auf den Umstand stützt, daß die elastische Linie eines Balkens mit Hülfe eines Seilpolygones gefunden werden kann. Im nächsten Paragraphen wird sich dann noch die Clapeyronsche Gleichung der drei Momente daran schließen, die am besten an dieser Stelle ihren Platz findet.

Zunächst möge es sich um den in Abb. 163 dargestellten Fall handeln. Ein Balken sei in drei Punkten A, B, C unterstützt. Die eine Öffnung AB soll eine irgendwie verteilte Belastung — etwa eine gleichförmig verteilte, wie in der Abbildung angenommen ist —, tragen, während die andere Öffnung unbelastet sein soll. Es wird verlangt, die Momentenfläche zu konstruieren, ferner auch, was damit eng zusammenhängt, die Auflagerkräfte auf den drei Stützen und die Scherkräfte V, die zu den einzelnen Querschnitten gehören, anzugeben.

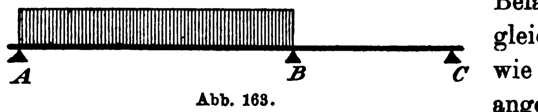


Abb. 163.

Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, solange man den Träger als starr ansieht. Man bedenke, daß es überhaupt nicht möglich ist, die drei Stützpunkte A, B, C absolut genau in einer geraden Linie anzuordnen. Wäre nun der Träger genau geradlinig und starr, so könnte er nur auf zwei der drei nicht genau in einer Geraden angeordneten Stützpunkte aufruhen. Selbst wenn etwa der mittlere Stützpunkt nur um den millionten Teil eines Millimeters tiefer läge, als die Verbindungslinie der äußeren Stützpunkte, die ebenfalls als unverrückbar angesehen werden, könnte der Träger nur auf den äußeren Punkten aufruhen und die mittlere Stütze wäre als nicht vorhanden zu betrachten. Umgekehrt wäre es, wenn B etwas höher läge, als die Verbindungslinie AC. Es hinge also ganz von unvorhersehbaren Zufälligkeiten ab, wie sich die Last auf die einzelnen Stützen verteilte und eine Berechnung wäre unmöglich.

Anders ist es aber, wenn man auf die elastischen Formänderungen des Trägers achtet. Unter dem Einflusse der Belastung erfährt der Träger elastische Einsenkungen, die zwar an sich gering, aber doch genau verfolgbar sind. Jetzt macht es nur wenig aus, wenn der Punkt B um eine so kleine Strecke, wie vorher vorausgesetzt war, tiefer oder höher liegt, als die Verbindungslinie AC. Liegt B etwas tiefer, so legt sich der Balken nach einer geringfügigen Durchbiegung sofort auf B auf. Es ist jetzt nur nötig, daß die unvermeidlichen Ungenauigkeiten in der Höhenlage der Stützpunkte klein gegen die Ordinaten der elastischen Linie sind, um die aus diesen Zufälligkeiten hervorgehende Ungewißheit unschädlich zu machen. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist freilich eine zuverlässige Berechnung des durchlaufenden Trägers immer noch unmöglich und gerade dieser Umstand hat wesentlich dazu beigetragen, daß man sich von der Ausführung durchlaufender Träger, die früher viel üblicher war, wieder abgewendet hat. Es liegt nämlich in der Tat oft genug die Befürchtung vor, daß die Ungenauigkeit der Ausführung bei der Höhenlage der Stützpunkte von derselben Größenordnung werden kann, wie die elastischen Einsenkungen des Trägers.

Jetzt nehme ich aber an, daß diese Ungenauigkeiten klein genug seien, um sie vernachlässigen zu können. Das Verhalten des Trägers wird dann eindeutig durch die Bedingung bestimmt, daß die elastische Linie stets durch die drei Auflagerpunkte A, B, C gehen muß.

Hierbei ist übrigens zu beachten, daß die Auflagerpunkte gegen jede Bewegung in senkrechter Richtung, also auch gegen ein Abheben von den Stützen festgehalten sein müssen. Wäre dies nicht der Fall, so würde sich bei dem in Abb. 163 angegebenen Belastungsfalle der Endpunkt C von der Stütze abheben und man hätte dann nur noch einen Träger über einer Öffnung AB vor sich, an dessen elastische Linie sich der unbelastete und daher geradlinig bleibende Teil BC als eine Endtangente im Punkte B anschlösse. Hier wird dagegen vorausgesetzt, daß der Punkt C festgehalten sei. Zugleich erkennt man, daß hierzu ein negativer Auflagerdruck — oder ein „Auflagerzug" — im Punkte C übertragen werden muß.

Ihrer allgemeinen Gestalt nach kann die zu dem Belastungsfalle in Abb. 163 gehörige Momentenfläche ohne Schwierigkeit angegeben werden. Man bedenke nämlich, daß die Stütze C auch entfernt werden kann, wenn man dafür nur eine senkrecht nach abwärts gerichtete Kraft an dem Trägerende anbringt, die so bemessen wird, daß sich der Punkt C nicht in senkrechter Richtung — weder nach oben, noch nach unten hin — verschiebt. Der dann nur noch auf den Stützen A und B aufliegende Träger hat außer den gegebenen Lasten der Spannweite AB noch die der Größe nach vorläufig unbekannte Last an dem vorkragenden Ende C aufzunehmen. Das Biegungsmoment setzt sich daher an jeder Stelle aus zwei Teilen zusammen, von denen der eine von den gegebenen Lasten, der andere von der Einzellast im Punkte C herrührt.

Der erste Teil wird mit Hülfe eines Seilpolygons, durch das man die gegebenen Lasten verbindet, nach den Lehren des zweiten Abschnittes leicht gefunden. Ist die Belastung gleichförmig über die Spannweite AB verteilt, so bildet dieser Teil der Momentenfläche einen Parabelabschnitt; aber auch

bei anderer Lastverteilung kann er immer leicht ermittelt werden. Jedenfalls ist das hierzu gehörige Moment innerhalb der Öffnung AB überall positiv (nämlich so gerichtet, daß es eine Biegung des Balkens hervorruft, bei der sich die Hohlseite der elastischen Linie nach oben hin kehrt), während es an den Stützen A und B und auf der Strecke BC gleich Null ist.

Der von der Einzellast im Punkte C herrührende zweite Teil des Biegungsmomentes ist im Gegensatze hierzu längs des ganzen Balkens AC negativ; nur an den Enden A und C wird er zu Null. Die zugehörige Momentenfläche wird, wie gleichfalls aus den Lehren des zweiten Abschnittes hervorgeht, ein Dreieck, dessen Ecken auf den drei Auflagervertikalen liegen.

Setzen wir nun beide Teile zusammen, so erhalten wir im ganzen eine Momentenfläche von der in Abb. 164 angegebenen Gestalt. Die von den gegebenen Lasten herrührende positive Momentenfläche sowohl, als das Dreieck ADC der negativen Momente sind dabei der besseren Vergleichbarkeit wegen von der Balkenachse aus nach oben hin abgetragen. Innerhalb der Strecke AB kommt nur der Unterschied zwischen den positiven und den negativen Beiträgen zum Biegungsmomente in Betracht. Im Punkte E, wo sich die beiden Linien überschneiden, ist das Biegungsmoment Null, links von der durch E gezogenen Vertikalen überwiegt der positive, rechts davon der negative Beitrag. Die hiernach verbleibenden Flächen sind durch Schraffierung hervorgehoben und zwar die zu positiven Momenten gehörigen durch vertikale, die zu negativen gehörigen durch horizontale Schraffierung. Für jeden Punkt der Balkenachse wird demnach das zugehörige Biegungsmoment nach Größe und Vorzeichen durch den Abschnitt angegeben, der von einer durch diesen Punkt gezogenen Lotrechten in die schraffierten Flächen hineinfällt.

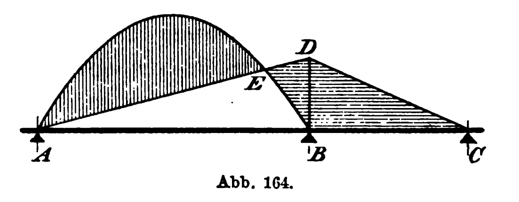


Abb. 164.

Um die Figur genau im Maßstabe zeichnen zu können, fehlt uns nur noch die Höhe BD des Dreieckes ADC, also das Biegungsmoment über der Mittelstütze. Dieses soll nun aus der Bedingung ermittelt werden, daß die elastische Linie durch die drei vorgeschriebenen Punkte A, B, C gehen muß.

Wir erinnern uns, daß die elastische Linie ein Seilpolygon bildet, dessen Belastungsfläche die Momentenfläche ist. Es ist dabei nicht nötig, den Horizontalzug dieses Seilpolygons nach der dafür früher aufgestellten Formel zu wählen, denn wenn er anders angenommen wird, erhalten wir die elastische Linie nur in entsprechender Verzerrung. Das Maß der Verzerrung ist aber hier gleichgültig, denn an der Bedingung, daß die Ordinaten an den drei Punkten A, B, C zu Null werden müssen, wird dadurch nichts geändert.

Wir wollen ferner von der Seilkurve, die zu der Belastungsfläche in Abb. 164 gehört, nur die Tangenten an den drei Punkten A, B, C ins Auge fassen, da dies für unsere Zwecke schon genügt. Die Seilspannungen bei A und B müssen mit den Lasten, die dazwischen liegen und ebenso die bei B und C mit den zwischen ihnen liegenden Lasten im Gleichgewichte stehen. Auf dieser Bemerkung beruht die Lösung der Aufgabe.

Über BC bildet die Belastungsfläche ein Dreieck. Die Resultierende der durch sie dargestellten Lasten geht durch den Schwerpunkt des Dreieckes und die vertikale Schwerlinie kann sofort angegeben werden, wenn man auch von der Höhe des Dreieckes noch nichts weiß; sie muß nämlich jedenfalls von B aus ein Drittel der Länge von BC auf BC abschneiden. Auf dieser der Lage nach bekannten Schwerlinie müssen sich die Tangenten der elastischen Linie in den Punkten B und C schneiden.

Über AB denken wir uns die Belastungsfläche wieder in die beiden Anteile zerlegt, aus denen sie vorher zusammengesetzt wurde. Der negative, durch das Dreieck ABD dargestellte Anteil liefert wieder eine nach oben gekehrte Resultierende, die durch den Schwerpunkt des Dreieckes geht, also ein Drittel der Spannweite AB von B aus auf AB abschneidet.

Auch der positive Anteil kann durch eine Resultierende ersetzt werden, die durch den Schwerpunkt der betreffenden Fläche geht und nach abwärts gerichtet ist. Da als Beispiel eine gleichförmige Belastung der Öffnung AB angenommen wurde, geht die Schwerlinie dieses Teiles der Belastungsfläche für die elastische Linie hier durch die Mitte; aber auch in jedem andern Falle könnte diese Schwerlinie leicht gefunden werden.

Die durch die Punkte A und B gehenden Seilspannungen müssen im Gleichgewichte mit den beiden soeben angeführten Lasten stehen. Dabei ist zu beachten, daß die Richtungslinien beider Lasten bekannt sind, während man nur von der senkrecht nach abwärts gerichteten Last, die durch den Schwerpunkt des positiven Anteils der Momentenfläche geht, von vornherein die Größe kennt. Auch die Größe der nach oben gehenden Last zwischen B und C ist vorläufig unbekannt.

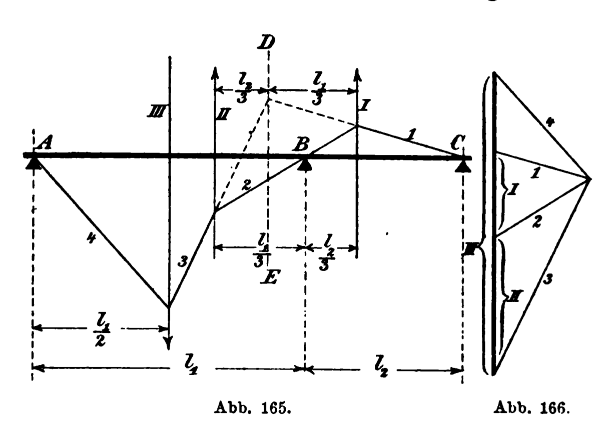


Abb. 165. Abb. 166.

Dies hindert jedoch nicht, das zu den der Lage nach bekannten Lasten I, II, III gehörige Seilpolygon 1, 2, 3, 4 in Abb. 165 sofort auszuführen. Man ziehe von C aus den Seilstrahl I in beliebiger Richtung. Diese Linie kann als die Tangente an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene Seilkurve im Punkte C aufgefaßt werden. Der Seilstrahl 2, der die Tangente an dieselbe Seilknrve im Punkte B darstellt, schneidet sich mit 1 auf der gegebenen Richtungslinie I und

folgt hieraus sofort. Um die Seilspannung 2 ferner mit der Last II zusammenzusetzen, beachten wir, daß sich 1 und 3 jedenfalls auf der Resultierenden der dazwischen liegenden Lasten I und II schneiden müssen. Wenn uns nun auch diese beiden Lasten der Größe nach vorläufig nicht bekannt sind, so kennen wir doch ihr Verhältnis. Denn I stellt das senkrecht nach oben gehende Gewicht des Dreieckes BCD in Abb. 164 und II das von ABD dar und die beiden Dreiecksflächen verhalten sich zueinander wie ihre Grundlinien AB und BC oder wie die beiden mit l_1 und l_2 in Abb. 165 bezeichneten Spannweiten. Die Resultierende der beiden parallelen und gleich gerichteten Kräfte I und II liegt zwischen beiden und teilt den Abstand zwischen ihnen im umgekehrten Verhältnisse zu den Größen beider Kräfte. Tragen wir daher $\frac{l_1}{3}$ von I aus nach links oder $\frac{l_2}{3}$ von II aus nach rechts hin ab, so erhalten wir die Richtungslinie DE der Resultierenden aus I und II. Wir brauchen jetzt nur 1 bis zum Schnittpunkte mit DE zu verlängern, um den durch diesen Punkt gehenden Seilstrahl 3 zu erhalten. Der Seilstrahl 4 endlich schneidet sich mit 3 auf der Richtungslinie von III und geht durch den Punkt A.

Von den vier Seilstrahlen des soeben konstruierten Seilpolygons haben nur 1, 2 und 4 eine unmittelbare Beziehung zur elastischen Linie des Balkens, indem sie deren Tangenten in den Punkten C, B, A unter der Voraussetzung einer entsprechend gewählten Verzerrung darstellen. Der Seilstrahl 3 ist nur zur Ermöglichung der Konstruktion dazwischen geschoben und hat mit der elastischen Linie unmittelbar nichts zu tun.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, können wir nachträglich auch den ihm zugehörigen Kräfteplan in Abb. 166 zeichnen. Hierbei ist zu beachten, daß III auch der Größe nach gegeben ist, indem es den von vornherein bekannten positiven Anteil der Momentenfläche in Abb. 164 darstellt. Die Strecken I und II, die man durch Ziehen der Parallelen

zu den Seilstrahlen in Abb. 165 erhält, geben die Inhalte der Dreiecke BCD und ABD in Abb. 164 im gleichen Maßstabe an. Man braucht hierbei nur auf das Verhältnis der Strecken II und III im Kräfteplane, der in ganz willkürlichem Maßstabe gezeichnet sein kann, zu achten. Da der positive Anteil der Momentenfläche in Abb. 164 und das Dreieck ABD zur gleichen Grundlinie AB gehören, liefert das aus Abb. 166 entnommene Verhältnis II : III unmittelbar das Verhältnis der durchschnittlichen Höhen beider Flächen. Trägt die Öffnung AB des durchlaufenden Trägers eine gleichförmig verteilte Last, so ist der positive Anteil der Momentenfläche ein Parabelsegment, dessen durchschnittliche Höhe $\frac{2}{3}$ der größten Höhe ausmacht. Bezeichnen wir daher die Pfeilhöhe dieser Parabel mit f, so ist die Höhe BD des Dreieckes ABD gleich $\frac{4}{3}f \cdot \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}}$. Nachdem BD auf diese Weise ermittelt ist, kann Abb. 164 sofort im richtigen Maßstabe aufgetragen werden. Außerdem können, nachdem die Momentenfläche bekannt ist, auch die zugehörigen Auflagerkräfte oder die Scherkräfte für gegebene Querschnitte unter Zuhülfenahme des zur Momentenfläche als Seilpolygon gehörigen Kräfteplanes leicht in von früher her bekannter Weise gefunden werden. Die zunächst gestellte Aufgabe ist hiermit als gelöst zu betrachten.

Hat der Träger in beiden Spannweiten gegebene Lasten aufzunehmen, so ermittelt man zuerst die Momentenfläche unter der Voraussetzung, daß nur eine Spannweite belastet, die andere unbelastet sei, wiederholt dann das Verfahren für den Fall, daß die zweite Öffnung belastet und die erste unbelastet ist und addiert beide Momentenflächen zueinander. Die dem gegebenen Belastungsfalle entsprechende Momentenfläche setzt sich daher aus zwei positiven Anteilen zusammen, von denen zu jeder Spannweite einer gehört und die ebenso groß und ebenso gestaltet sind, als wenn diese Spannweite durch einen einfachen Träger überdeckt wäre, der die zugehörigen Lasten aufzunehmen hätte, sowie aus einem negativen Anteile, der wiederum ein Dreieck ADC, wie in Abb. 164 bildet, dessen Höhe BD jedoch

gleich der Summe der Höhen ist, die zur Belastung der linken und der rechten Öffnung für sich genommen gehören.

Für einen über drei oder noch mehr Öffnungen durchlaufenden Träger läßt sich dieselbe Konstruktion ohne wesentliche Änderung gleichfalls durchführen, solange nur eine der beiden Endöffnungen belastet ist. Es ist daher nicht nötig, hierfür ein besonderes Beispiel vorzuführen. Dagegen muß noch ein Hülfsverfahren dazu treten, wenn eine der Mittelöffnungen belastet ist. In Abb. 167 ist ein über drei Öffnungen durchgehender Träger gezeichnet, dessen Mittelöffnung BC eine gleichförmig verteilte Belastung aufnehmen soll, während die beiden Endöffnungen als unbelastet vorausgesetzt werden. An Stelle der gleichförmig verteilten kann übrigens auch eine irgendwie anders angeordnete Belastung der Mittelöffnung treten, ohne daß sich darum die Betrachtung zu ändern brauchte.

Man denke sich die beiden Stützen A und D entfernt und die Auflagerkräfte durch passend gewählte Lasten ersetzt, die so zu bestimmen sind, daß die Punkte A und D keine Bewegung in vertikaler Richtung ausführen. Wenn diese Kräfte von vornherein bekannt wären, könnte man die Momentenfläche mit Hülfe eines Seilpolygons sofort konstruieren. Jedenfalls kennt man aber aus dieser Überlegung bereits die allgemeine Gestalt der Momentenfläche. Die Lasten an den Enden A und D des auf B und C gestützten Trägers bringen nämlich überall negative Momente hervor, die durch das Viereck $AEFD$ in Abb. 168 dargestellt werden. Dazu kommen die positiven, durch das Parabelsegment über BC dargestellten Momente, die durch die gegebenen Lasten in der Öffnung BC unmittelbar hervorgerufen werden. Beide Momentenflächen überschneiden sich wieder und die Unterschiede zwischen ihnen, die durch Schraffierung hervorgehoben sind, geben, wie im früheren Falle, die im ganzen auftretenden Biegungsmomente an. Um Abb. 168 richtig auftragen zu können, bleiben nur die Höhen BE und FC, d. h. die Momente über den Mittelstützen zu ermitteln.

Dies geschieht wieder auf Grund der Erwägung, daß die elastische Linie, die als Seilpolygon zur Momentenfläche als

Belastungsfläche konstruiert werden kann, durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehen muß. Wir achten nur auf die durch diese Punkte gehenden Seilspannungen der in beliebiger Verzerrung gezeichneten Seilkurve, von denen wir wissen, daß sie mit den zwischen ihnen liegenden Lasten, die wir in geeigneter Weise zusammenfassen, im Gleichgewichte

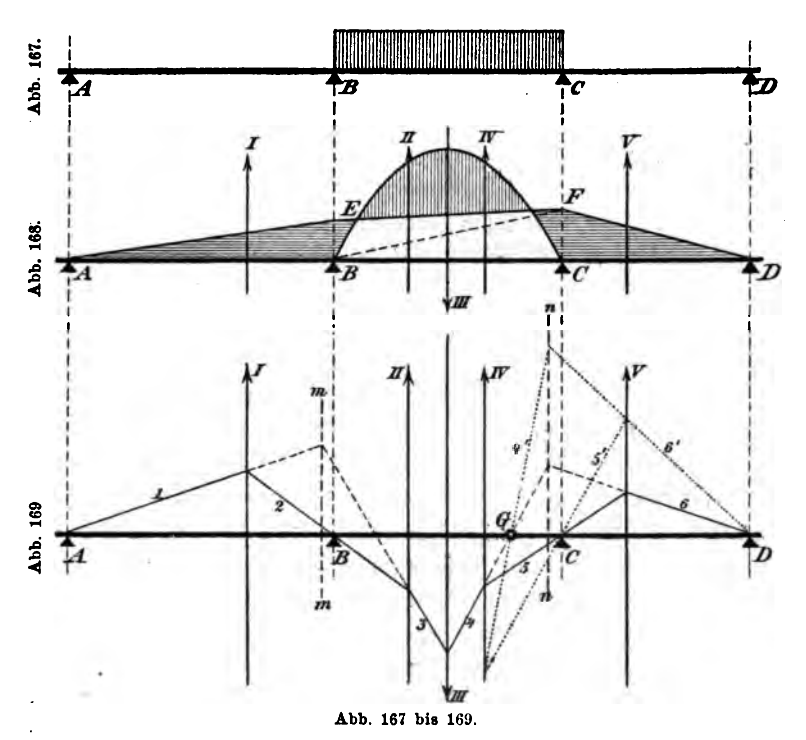


Abb. 167 bis 169.

stehen müssen. Diese Lasten für das „zweite" Seilpolygon sind in Abb. 168 eingetragen. In den beiden Endöffnungen kommt nur je eine Last in Frage, die durch den Schwerpunkt des zugehörigen Belastungsdreieckes geht. In der Mittelöffnung geht III durch den Schwerpunkt des Parabelsegmentes; diese Last ist von allen allein ihrer Größe nach sofort bekannt, da sie durch die Fläche des Parabelsegmentes dargestellt wird. Das Trapez $BEFC$ vom negativen Anteile der Momenten-

fläche zerlegen wir durch die Diagonale BF in zwei Dreiecke und führen die nach oben gekehrten Lasten dieser Dreiecke gesondert ein. Wir erreichen dadurch, daß auch die Richtungslinien II und IV, die durch die Schwerpunkte der Dreiecke gehen, sofort angegeben werden können, wenn man auch die Inhalte der Dreiecke noch nicht kennt. Ebenso muß man übrigens auch verfahren, wenn eine Endöffnung belastet ist.

Wir tragen jetzt die hiermit ermittelten Richtungslinien der Lasten von I bis V in Abb. 169, die nichts mehr enthält, was noch als unbekannt anzusehen wäre, von neuem ein. Zugleich ziehen wir die Linie mm als Richtungslinie der Resultierenden von I und II, die ebenso wie im früheren Falle gefunden wird, da sich auch jetzt die Lasten I und II oder die Dreieckflächen AEB und BEF in Abb. 168 wie die Spannweiten AB und BC zueinander verhalten müssen. Ebenso kann die Linie nn als Richtungslinie der Resultierenden aus IV und V gefunden werden, indem man den Abstand zwischen IV und V im umgekehrten Verhältnisse der Spannweiten BC und CD teilt, d. h. indem man den Abstand von C bis V von IV aus nach rechts hin aufträgt.

Wir zeichnen ferner das durch die vorgeschriebenen Punkte A, B, C, D gehende Seilpolygon zu diesen Lasten, indem wir die Seilspannung 1 in beliebiger Richtung — entsprechend der beliebig zu wählenden Verzerrung der elastischen Linie — eintragen. Auf 1 folgen 2 und 3 sofort, da sich 1 und 3 auf mm schneiden müssen, während 2 durch B gehen muß. Die Fortsetzung 4, 5, 6 macht indessen zunächst einige Schwierigkeiten, da man vorerst nicht wissen kann, in welcher Richtung 4 weiter zu führen ist.

Man bedenke jedoch, daß die Richtungslinien von 4, 5, 6 ein Dreieck miteinander bilden müssen, das sechs vorgeschriebene Bedingungen zu erfüllen hat, wodurch es ausreichend gekennzeichnet wird. Die Seiten müssen nämlich durch drei vorgeschriebene Punkte gehen (4 durch den Schnittpunkt von 3 mit III, 5 durch C und 6 durch D) und die Ecken müssen auf drei gegebenen Geraden liegen, die parallel zueinander sind,

nämlich auf den Geraden IV, *nn* und V. Das Dreieck kann daher nach einem schon oft benutzten Verfahren ermittelt werden.

Wir zeichnen zuerst irgend ein Dreieck, das nur fünf der aufgezählten Bedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Linie 6′ in beliebiger Richtung durch *D* und reihen daran in leicht ersichtlicher Weise die Seiten 4′ und 5′. Das Dreieck 4′5′6′ erfüllt nur die eine Bedingung nicht, daß 4′ durch den Endpunkt von 3 gehen sollte. Denkt man sich das Dreieck 4′5′6′ veränderlich, so daß es stets dieselben fünf Bedingungen erfüllt, so muß sich die Seite 4′ ebenfalls um einen festen Punkt drehen. Dieser Punkt *G* muß auf der Balkenachse liegen, da eines der Dreiecke 4′5′6′ mit allen Punkten und Seiten auf die Balkenachse fällt. Punkt *G* ist daher als Schnittpunkt von 4′ mit der Balkenachse bekannt.

Auch das gesuchte Dreieck 4 5 6 bildet eines der Dreiecke 4′5′6′ und wir wissen jetzt, daß 4 durch den Punkt *G* zu ziehen ist. Nachdem dies geschehen ist, macht auch die Fortsetzung 5, 6 keine Schwierigkeiten mehr.

Von den Seilpolygonseiten 1 bis 6 sind 1, 2, 5, 6 Tangenten an die in entsprechender Verzerrung aufgetragene elastische Linie in den Auflagerpunkten, während die dazwischen eingeschobenen Seiten 3 und 4 in keiner unmittelbaren Beziehung zur elastischen Linie stehen.

Nachdem das Seilpolygon gefunden ist, kann man dazu, wie im früheren Falle, nachträglich den Kräfteplan zeichnen. Da die Last III ihrer Größe nach bekannt ist, folgen daraus auch die Größen der übrigen Lasten. — Hiermit findet man die Inhalte der Dreiecksflächen I, II, IV, V in Abb. 168, so daß dem richtigen Auftragen von Abb. 168 kein Hindernis mehr im Wege steht. — Auch für den Fall, daß mehrere Öffnungen belastet sind, kann man so verfahren, wie es schon vorher bei dem einfacheren Falle des über zwei Öffnungen durchlaufenden Trägers auseinandergesetzt worden ist.

§ 63. Gleichung von Clapeyron.

Wenn jede Öffnung des durchlaufenden Trägers nur eine gleichförmig verteilte Belastung trägt, die aber bei den einzelnen Öffnungen verschieden groß sein darf (und bei einigen daher auch gleich Null sein kann), erhält man die Biegungsmomente über den Stützen, die man zum Auftragen der Momentenfläche nötig hat, auch sehr einfach auf analytischem Wege, mit Hilfe der von Clapeyron aufgestellten „Gleichung der drei Momente“.

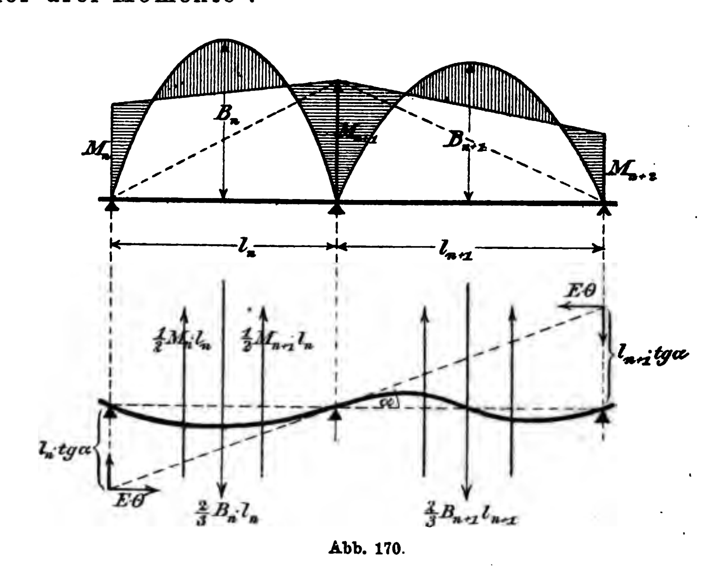


Abb. 170.

Die Zahl der Öffnungen kann jetzt beliebig groß sein. Wir denken uns zwei aufeinander folgende Öffnungen, die wir als die $n$te und die $(n+1)$te bezeichnen, herausgegriffen. Die positiven Anteile der Momentenflächen bestehen wieder aus Parabelabschnitten, die negativen aus Trapezen. Abb. 170 gibt den zu den beiden Öffnungen gehörigen Teil der Momentenfläche an. Die Pfeilhöhen der Parabeln sind mit B_n und B_{n+1} bezeichnet. Trägt die $n$te Öffnung eine Belastung q_n für die Längeneinheit, so hat man für das Biegungsmoment B_n, das

in der Mitte dieser Öffnung entstehen würde, wenn diese durch einen einfachen Träger überdeckt wäre,

$$B_n = \frac{q_n l_n^2}{8} \quad \text{und ebenso} \quad B_{n+1} = \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{8}. \tag{86}$$

Die Momente M_n, M_{n+1} und M_{n+2} über den drei Stützen sind dagegen vorläufig unbekannt.

Im unteren Teile von Abb. 170 ist der zu den beiden Öffnungen gehörige Abschnitt der elastischen Linie des Balkens gezeichnet. Wir wissen, daß die elastische Linie als ein Seilpolygon aufgefaßt werden kann, dessen Belastungsfläche durch die Momentenfläche gebildet wird. Wie schon früher, ersetzen wir die zu jeder Öffnung gehörigen Lasten durch drei Resultierende von bekannter Lage. In der $n$ten Öffnung erhalten wir die durch die Mitte der Spannweite nach abwärts gehende Belastung $\frac{2}{3} B_n l_n$, indem der Inhalt der Parabel gleich Zweidrittel von dem Produkte aus Grundlinie und Höhe ist. Freilich ist B_n nicht eigentlich selbst die Höhe der Parabel, sondern das Biegungsmoment, das aus der Ordinate der Momentenfläche durch Multiplikation mit dem Horizontalzuge H_{I} des ersten Seilpolygons gefunden wird. Wir können uns aber alle Lasten mit dem konstanten Faktor H_{I} multipliziert denken, falls wir dann nur auch den Horizontalzug H_{II} des zweiten Seilpolygons, der nach Gl. 27 (S. 107)

$$H_{\mathrm{II}} = \frac{E\Theta}{H_{\mathrm{I}}}$$

ist, mit H_{I} multiplizieren, ihn also gleich $E\Theta$ setzen. — Das Trapez mit den Seiten M_n und M_{n+1} zerlegen wir in zwei Dreiecke, deren Lasten mit $\frac{1}{2} M_n l_n$ und $\frac{1}{2} M_{n+1} l_n$ anzusetzen sind. Beide gehen nach oben hin und teilen die Spannweite l_n in drei gleiche Teile. Ebenso verfahren wir in der zweiten Öffnung.

Die durch die $n$te und die $(n+1)$te Stütze gehenden Seilspannungen müssen mit den drei zuvor aufgeführten Lasten im Gleichgewichte stehen. Wir schreiben dafür eine Momenten-

gleichung in bezug auf den $n$ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Die durch diesen Stützpunkt gehende Seilspannung fällt aus der Momentengleichung fort. Der Winkel, den die durch den $(n+1)$ten Stützpunkt gehende Seilspannung mit der Horizontalen bildet, sei mit α bezeichnet. Wir verlegen den Angriffspunkt dieser Seilspannung auf die durch die $n$te Stütze gehende Auflagervertikale und zerlegen sie dort in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Die vertikale Komponente geht durch den Momentenpunkt und tritt daher nicht in die Momentengleichung ein. Die horizontale Komponente ist der vorher schon zu $E\Theta$ festgestellte Horizontalzug des zweiten Seilpolygons. Dessen Moment ist gleich $-E\Theta l_n \operatorname{tg}\alpha$. Die Momente der drei Lasten lassen sich ebenfalls sofort anschreiben und im ganzen erhält man daher

$$-E\Theta l_n \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} M_n l_n \cdot \frac{l_n}{3} + \frac{2}{3} B_n l_n \cdot \frac{l_n}{2} - \frac{1}{2} M_{n+1} l_n \cdot \frac{2\,l_n}{3} = 0.$$

Eine Momentengleichung von derselben Form schreiben wir ferner auch für die $(n+1)$te Öffnung und zwar in bezug auf den $(n+2)$ten Stützpunkt als Momentenpunkt an. Auch hier wird wieder die durch den $(n+1)$ten Stützpunkt gehende Seilspannung zum Schnitte mit der durch den Momentenpunkt gehenden Vertikalen gebracht und dort in zwei Komponenten zerlegt, von denen nur die Horizontalkomponente $E\Theta$ in die Momentengleichung eintritt. Die Gleichung lautet

$$-E\Theta l_{n+1} \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{3} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} - \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2}$$
$$+ \frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{2\,l_{n+1}}{3} = 0.$$

Wir wollen beide Gleichungen, nachdem die in ihnen vorkommenden Faktoren l_n bezw. l_{n+1} weggehoben sind und mit 6 multipliziert ist, noch einmal untereinander schreiben. Sie lauten dann

$$\left.\begin{aligned} &-6\,E\Theta \operatorname{tg}\alpha - M_n l_n + 2\,B_n l_n - 2\,M_{n+1} l_n = 0, \\ &-6\,E\Theta \operatorname{tg}\alpha + M_{n+2} l_{n+1} - 2\,B_{n+1} l_{n+1} \\ &\qquad\qquad + 2\,M_{n+1} l_{n+1} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Subtrahiert man sie voneinander, so heben sich die mit dem unbekannten Winkel α behafteten Glieder gegeneinander fort und nachdem man die Glieder passend geordnet hat, erhält man die Clapeyronsche Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} M_n l_n + 2\,M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} \\ = 2\,(B_n l_n + B_{n+1} l_{n+1}). \end{array}\right\} \qquad (88)$$

Zwischen je drei aufeinander folgenden Stützenmomenten M_n, M_{n+1} und M_{n+2} besteht eine Gleichung von dieser Form, in der alle übrigen Größen bekannt sind, da man für die B die dafür vorher schon aufgestellten Werte einsetzen kann. Schreibt man alle diese Gleichungen für je zwei aufeinander folgende Öffnungen an, so erhält man ebenso viele Gleichungen als unbekannte Stützenmomente. Diese lassen sich daher durch Auflösen der Gleichungen ermitteln, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Bei einem Träger, der über nur zwei Öffnungen durchgeht, sind z. B. die Momente M_n und M_{n+2} an den Enden gleich Null zu setzen und die Gleichung der drei Momente enthält nur noch das unbekannte Moment M_{n+1} über der Mittelstütze, das daraus sofort gefunden werden kann. Bei einem Träger über drei Öffnungen sind nur die Momente über der zweiten und der dritten Stütze unbekannt und die Gleichung kann zweimal angeschrieben werden, einmal für die erste und zweite und das nächste Mal für die zweite und dritte Öffnung. Bezeichnet man allgemein die Zahl der Öffnungen mit m, so ist die Zahl der unbekannten Stützenmomente gleich $(m-1)$ und ebenso viele Gleichungen lassen sich auch nach der Clapeyronschen Formel ansetzen.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Enden frei aufliegen. Sollten diese eingespannt sein, so sind die zugehörigen Stützenmomente freilich nicht gleich Null zu setzen und man hat zwei Unbekannte mehr, als Gleichungen vorhanden sind. Dafür kann man aber in diesem Falle auch noch zwei neue Gleichungen angeben. Man nehme z. B. an, daß die $(n+1)$te Öffnung in Abb. 170 die letzte und der Träger über der Endstütze

$(n + 2)$ eingespannt sei. Dann muß auch die zugehörige Endtangente der elastischen Linie horizontal gerichtet sein. Schreibt man daher nun noch eine Momentengleichung für den $(n + 1)$ten Stützpunkt an, so hebt sich das Moment der letzten Seilspannung fort und man erhält unter dieser Voraussetzung

$$-\frac{1}{2} M_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{3} + \frac{2}{3} B_{n+1} l_{n+1} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} M_{n+2} l_{n+1} \cdot \frac{2 l_{n+1}}{3} = 0,$$

oder nach Wegheben der gemeinsamen Faktoren u. s. f.

$$M_{n+1} + 2 M_{n+2} = 2 B_{n+1} \qquad (89)$$

und eine Gleichung von derselben Form gilt auch für die erste Öffnung, wenn der Träger auch über der ersten Stütze eingespannt ist, nämlich

$$M_2 + 2 M_1 = 2 B_1. \qquad (90)$$

Die Clapeyronschen Gleichungen reichen daher in Verbindung mit diesen beiden auch bei eingespannten Enden aus, um alle unbekannten Stützenmomente zu berechnen. Sobald aber diese bekannt sind und die Momentenfläche mit ihrer Hilfe aufgetragen ist, kann man daraus auch alle übrigen Fragen, wie über die Größen der Auflagerkräfte u. s. f. ohne weiteres beantworten. Man muß sich hierzu nur erinnern, daß die Momentenfläche ein Seilpolygon zu den gegebenen Lasten und den zugehörigen Auflagerkräften bildet. Der Kräfteplan zu diesem Seilpolygone kann nachträglich gezeichnet werden und er liefert dann die Größen der Auflagerkräfte. — Außerdem lassen sich auch die Scherkräfte V an jeder Stelle aus der Momentenfläche mit Hilfe der Gleichung $V = \frac{dM}{dx}$ ableiten.

Aufgaben.

37. Aufgabe. Für ein symmetrisch gestaltetes und symmetrisch belastetes Gewölbe soll eine Drucklinie eingezeichnet werden, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge geht.

Lösung. Die Hälfte des Gewölbequerschnittes ist in Abb. 171[a]

gezeichnet; AB sei die Belastungslinie und BC die Symmetrieachse. Man ziehe durch den Anfangspunkt F der inneren Wölblinie einen lotrechten Fugenschnitt DE und teile die zwischen DE und BC liegende Belastungsfläche in eine Anzahl lotrechter Streifen von gleicher Breite. In der Abbildung sind sechs Belastungsstreifen gewählt, eine Zahl, die schon ausreicht, um die einzelnen Streifen näherungsweise als unendlich schmal betrachten zu können und die andererseits auch noch nicht so groß ist, daß dadurch die

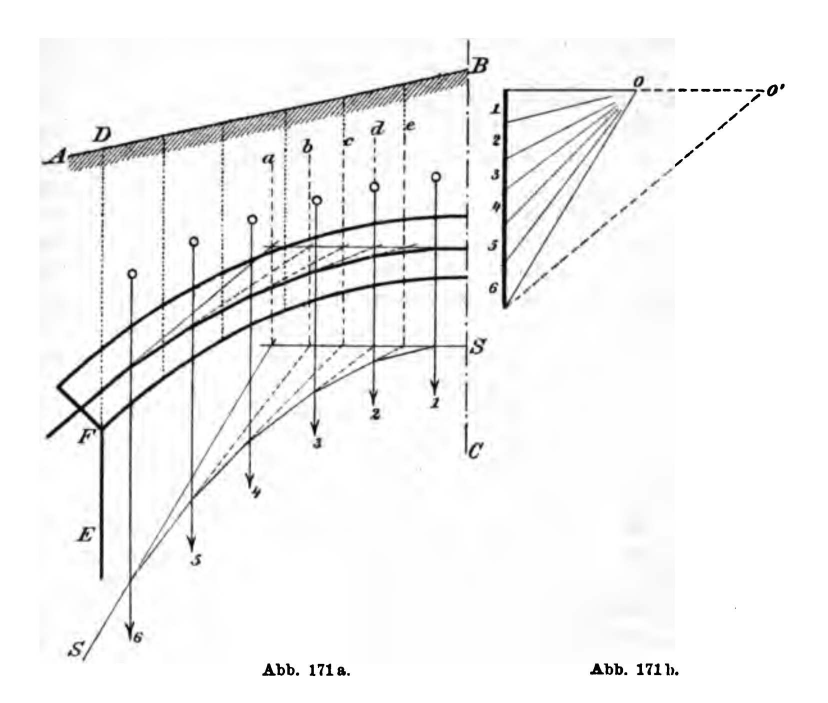


Abb. 171 a. Abb. 171 b.

Ausführung der Zeichnung erschwert würde. Die einzelnen Streifen können genau genug als Trapeze betrachtet werden, deren Schwerpunkte aufgesucht und durch kleine Kreise hervorgehoben wurden. Die durch diese Schwerpunkte gehenden Lasten 1, 2 u. s. f. sind wegen der gleichen Breite der Streifen den mittleren Höhen proportional. Im Kräfteplane, Abb. 171^b, wurden die Lasten durch $^1/_6$ der mittleren Streifenhöhe dargestellt. Hierauf wählt man einen Pol O beliebig und vereinigt die gegebenen Lasten durch das im unteren Teile von Abb. 171^a gezeichnete Seileck SS. Durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen geht die Schwerlinie a der

ganzen Belastungsfläche. Außerdem ermittelt man auch noch die Schnittpunkte der übrigen Seilstrahlen mit dem horizontalen Anfangsstrahle und zieht durch sie die Lotrechten *b*, *c*, *d*, *e*. Man kann diese Linien als Schwerlinien jener Teile der Belastungsfläche ansehen, die vom Scheitel bis zum fünften, vierten, dritten oder zweiten Belastungsstreifen reichen.

Nach diesen Vorbereitungen kann man leicht jede gewünschte Drucklinie in den Gewölbequerschnitt eintragen. Zunächst beachte man, daß wegen der vollständigen Symmetrie des Gewölbes und seiner Belastung auch die Drucklinie symmetrisch sein muß, daß also der Druck in der Scheitelfuge jedenfalls horizontal gerichtet ist. Da in der Aufgabe verlangt wird, die Drucklinie durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen zu führen, ziehen wir eine Horizontale durch die Mitte der Scheitelfuge, suchen deren Schnitt mit der Schwerlinie *a* auf und verbinden den Schnittpunkt mit der Mitte der Kämpferfuge. Die Verbindungslinie gibt die Richtungslinie des Kämpferdruckes an, da sich diese Kraft mit dem Drucke in der Scheitelfuge und dem Gewichte der Gewölbehälfte im Gleichgewichte halten und daher mit ihnen in demselben Punkte treffen muß. Zieht man zu dieser Linie eine Parallele im Kräfteplane durch den Endpunkt der Last 6, so erhält man den Pol O' des neuen, zur gesuchten Drucklinie gehörigen Kräfteplanes.

Anstatt aber die Drucklinie durch Ziehen von Parallelen zu den Polstrahlen im Kräfteplane zu konstruieren, ist es bequemer, darauf zu achten, daß sich jeder andere Seilstrahl der Drucklinie mit dem horizontalen Seilstrahle auf einer der Linien *a*, *b*, *c*, *d*, *e* schneiden muß. Dies folgt sowohl aus dem in § 11 bewiesenen Satze über die zu denselben Lasten, aber zu verschiedenen Polen im Kräfteplane gehörigen Seilecke, als auch daraus, daß jene Linien als Schwerlinien der zwischen der Scheitelfuge und den übrigen Fugenschnitten gelegenen Teile der Belastungsfläche angesehen werden können.

Um nachträglich aus dem Kräfteplane auf die Größe des Fugendruckes und die dadurch hervorgebrachte Kantenpressung zu schließen, beachte man, daß jede Strecke im Kräfteplane zunächst einen Flächeninhalt angibt, nämlich ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Breite jedes Belastungsstreifens und dessen Höhe gleich dem Sechsfachen der betreffenden Strecke ist. Dieser Fläche entspricht ein Mauervolumen und diesem ein Gewicht. — Um z. B. die Materialbeanspruchung in der Scheitelfuge, über die sich der Druck gleichförmig verteilt, zu finden, multipliziere man den Polabstand von O' bis zur Lastlinie mit dem Verhältnisse der sechsfachen Breite eines Belastungsstreifens zur Fugenlänge im Scheitel.

Die dadurch gefundene Strecke gibt sofort die Druckhöhe an, die, wenn man will, nach der dafür in § 55 gegebenen Anleitung auch noch in Atmosphären umgerechnet werden kann.

38. Aufgabe. Nach welchem Gesetze muß die innere Wölblinie gestaltet sein, wenn die Belastungsfläche nach oben durch eine horizontale Gerade begrenzt wird und eine Stützlinie möglich sein soll, die mit der inneren Wölblinie zusammenfällt?

Lösung. In bezug auf ein durch den Bogenanfang in horizontaler und vertikaler Richtung gelegtes Koordinatensystem seien die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Wölblinie x und y, die Höhe der Belastungslinie über dem Koordinatenursprunge a, die Spannweite l und die als gegeben zu betrachtende Pfeilhöhe des Bogens f. Die Höhe der Belastungsfläche bei der Abscisse x ist dann gleich $a - y$ zu setzen und die Differentialgleichung der Wölblinie lautet, da sie mit einer Stützlinie zusammenfallen soll,

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = y - a.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$y = a + A e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + B e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}.$$

Die Integrationskonstanten A und B folgen aus den Grenzbedingungen, nach denen $y = 0$ für $x = 0$ und $y = f$ für $x = \frac{l}{2}$ werden muß. Dazu kommt zur Bestimmung des gleichfalls unbekannten Horizontalschubes H die Bedingung, daß im Scheitel, also für $x = \frac{l}{2}$ der Differentialquotient von y zu Null werden muß. Die drei Gleichungen lassen sich nach den Unbekannten A, B und H ohne Schwierigkeit auflösen und durch Einsetzen der gefundenen Werte erhält man für y

$$y = a - \frac{a-f}{2} \left\{ \left(\frac{a + \sqrt{2af - f^2}}{a - f} \right)^{\frac{2x-l}{l}} + \left(\frac{a + \sqrt{2af - f^2}}{a - f} \right)^{\frac{l-2x}{l}} \right\},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Anmerkung. Eine mit der inneren Wölblinie zusammenfallende Stützlinie kommt zwar in Wirklichkeit gar nicht in Betracht. Gestaltet man aber nachher auch die äußere Wölblinie so, daß sie mit einer möglichen Stützlinie zusammenfällt, so steht der ganze Gewölbequerschnitt für den Verlauf von Stützlinien offen und auch die Bogenmittellinie wird sehr nahe mit einer möglichen Stützlinie zusammenfallen. Die hiernach bestimmte Gewölbeform

ist daher als eine der günstigsten zu betrachten. — Im übrigen ist es, namentlich bei beliebig gegebenen Belastungslinien, zweckmäßiger, die günstigste Gewölbeform graphisch durch Probieren, als durch eine solche Rechnung zu bestimmen. Man nimmt zu diesem Zwecke zuerst irgend eine Bogenform an, konstruiert die zugehörige Stützlinie und ändert die Bogenform dem Verlaufe dieser Stützlinie entsprechend ab. Wiederholt man dies noch einmal, so erhält man die Bogenform in so genauem Anschlusse an die gestellte Bedingung, als irgend wünschenswert oder nötig ist.

39. Aufgabe. Auf einen Pfeiler stützen sich von beiden Seiten her Gewölbe in ungleicher Höhe (Abb. 172); man soll die Stabilität des Pfeilers untersuchen.

Lösung. Der rechts angreifende Bogen ist halbkreisförmig angenommen. In einem solchen Falle ist der untere Teil des Bogens nicht mehr zum Gewölbe, sondern schon als Bestandteil des Widerlagers zu rechnen. Jedenfalls muß nämlich der Pfeiler den vom Gewölbe kommenden Horizontalschub aufnehmen. Dies kann aber nicht oder wenigstens nicht ausschließlich durch die horizontale Kämpferfuge geschehen, sondern die unteren Teile des Gewölberückens, die vom Pfeilermauerwerke gegen eine horizontale Verschiebung gestützt sind, müssen sich daran wesentlich mit beteiligen. Die bei der Behandlung der Gewölbe vorangestellte Annahme, daß auf den Wölbrücken nur Lasten in lotrechter Richtung einwirkten, ist demnach im unteren Teile des halbkreisförmigen Bogens sicher nicht mehr erfüllt, d. h. dieser Teil ist bei der Untersuchung des Gewölbes nach den dafür früher gegebenen Lehren ganz auszuschließen und dafür als Bestandteil des Widerlagers zu behandeln.

Nun fragt sich freilich, wie weit man diesen unteren Teil rechnen soll. In der Abbildung ist der Fugenschnitt xx gezogen und angenommen, daß der rechts davon liegende Teil als Gewölbe, der links davon liegende als Widerlager anzusehen sei. Man könnte aber xx ganz gut auch etwas mehr nach links oder mehr nach rechts rücken. Im allgemeinen empfiehlt es sich in solchen zweifelhaften Fällen, die beiden äußersten Lagen, die man schätzungsweise noch für annehmbar halten kann, in Aussicht zu nehmen und die Betrachtung für die beiden extremen Fälle gesondert durchzuführen. Dabei muß nicht gerade verlangt werden, daß das Gleichgewicht auch für beide extreme Fälle noch hinreichend gesichert sei; man weiß vielmehr umgekehrt, daß Gewölbeeinstürze nur dann zu erfolgen pflegen, wenn überhaupt auf keine Art mehr Gleichgewicht zustande kommen kann. Immerhin wird man sich nicht damit beruhigen, nachgewiesen zu haben, daß das Gewölbe gerade

noch an der Grenze des Gleichgewichtes steht, sondern man wird noch einen gewissen Spielraum für die Gleichgewichtszustände verlangen, die keinen Einsturz befürchten lassen. Hierüber wird man

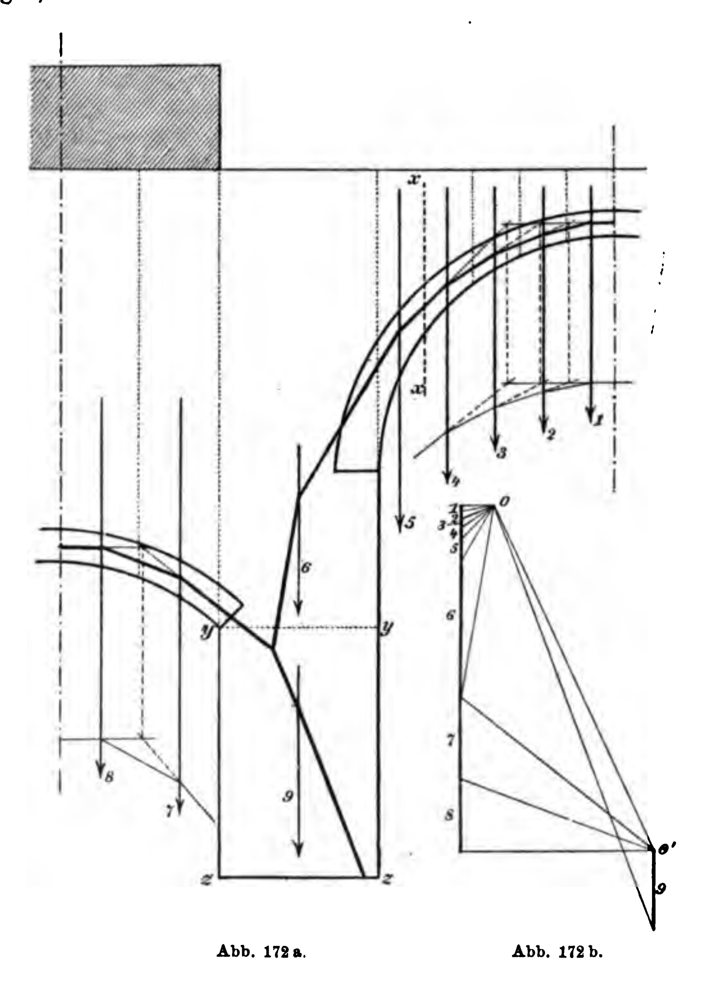


Abb. 172 a. Abb. 172 b.

sich am besten dadurch einen Überblick verschaffen, daß man die äußersten Fälle in Betracht zieht. In Abb. 172 ist indessen nur für eine mittlere Lage des Schnittes xx die Konstruktion durchgeführt; für andere Annahmen von xx wäre sie in derselben Weise zu wiederholen.

Für den rechts von xx liegenden Teil des Bogens zeichnet man nun eine Stützlinie, die durch die Mitten der Scheitelfuge und der Fuge xx geht. Dies wird genau so durchgeführt, wie in Aufg. 37 und bedarf hier keiner weiteren Besprechung. Den zum Schnitte xx gehörigen Fugendruck setzt man dann mit dem Gewichte des links von xx gehörigen Abschnittes 5 und die daraus hervorgehende Resultierende weiterhin mit dem Pfeilergewichte 6 zusammen, das bis zum Kämpfer des unteren Bogens, also bis zu dem mit yy bezeichneten horizontalen Fugenschnitte gerechnet ist.

Hierauf zeichnet man auch die zum unteren Bogen gehörige Drucklinie, die durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfuge gelegt wird. Im Kräfteplane Abb, 172^b kann O' als der zu dieser Drucklinie gehörende Pol angesehen werden. Die für die erste Zusammensetzung der Lasten dienenden Seilpolygone wurden übrigens mit Hülfe von Kräfteplänen konstruiert, die in die Abbildung nicht mit aufgenommen sind. — Vereinigt man die vom oberen Bogen und dem Pfeilergewichte 6 her stammende Kraft mit dem Kämpferdrucke des unteren Bogens, so erhält man den im Kräfteplane durch die Strecke OO' dargestellten resultierenden Fugendruck für den Fugenschnitt yy. Dieser ist dann ferner noch mit dem zwischen yy und zz liegenden Pfeilergewichte 9 vereinigt, womit der Druck auf den Pfeilerfuß gefunden wird. — Wenn man will, kann man zwischen yy und zz auch noch einige andere horizontale Fugenschnitte einschalten und die zugehörigen resultierenden Fugendrücke in derselben Weise konstruieren. Man erhält dann den Verlauf der Stützlinie im Pfeiler noch etwas genauer. Die Berechnung der Kantenpressung in der Fuge zz kann nach den früher gegebenen Anleitungen nun auch noch leicht ausgeführt werden.

In Abb. 172 ist angenommen, daß die Belastungslinie der bleibenden Last nach oben durch eine horizontale Gerade begrenzt sei, daß aber auch eine über dem linken Bogen stehende verhältnismäßig große bewegliche Last hinzukomme, die ebenfalls in einer Übermauerungshöhe ausgedrückt ist. Diese könnte ebenso gut auch über dem rechten Bogen stehen und die Untersuchung wäre für diesen Belastungsfall zu wiederholen. Dabei zeigt sich indessen, daß der hier betrachtete Fall der gefährlichere für den Bestand des Pfeilers ist.

Schließlich bemerke ich noch, daß außer den durch die Mitten von Scheitel- und Kämpferfugen gezogenen Stützlinien natürlich auch noch andere möglich sind und darunter solche, die dem Bestande des Pfeilers günstiger sind, als jene. Es ist daher selbst dann, wenn für keine Lage der vorher eingeschätzten Linie xx Gleichgewicht des Pfeilers ohne Überschreitung der zulässigen Kanten-

pressung möglich ist, immer noch keineswegs zu erwarten, daß der Pfeiler nun auch wirklich einstürzen wird. Zu erwarten ist weit eher, daß nach geringen Bewegungen des Pfeilers ein anderer Gleichgewichtszustand in den Wölbbögen zustande kommt, der für die Beanspruchung des Pfeilers günstiger ist. Erst dann, wenn es auch durch solche Veränderungen in den Lagen der Stützlinien in den Gewölben nicht möglich sein sollte, einen mit der Festigkeit des Materiales verträglichen Gleichgewichtszustand herzustellen, wäre ein Einsturz ohne Zweifel zu erwarten. Billigerweise ist aber zu verlangen, daß der Pfeiler stark genug konstruiert sei, um der Beanspruchung gewachsen zu sein, die durch den zunächst in Aussicht zu nehmenden Gleichgewichtszustand der Wölbbögen hervorgerufen wird, so daß ein merkliches Ausweichen des Pfeilers zur Herbeiführung eines für ihn günstigeren Gleichgewichtszustandes nicht zu erwarten ist.

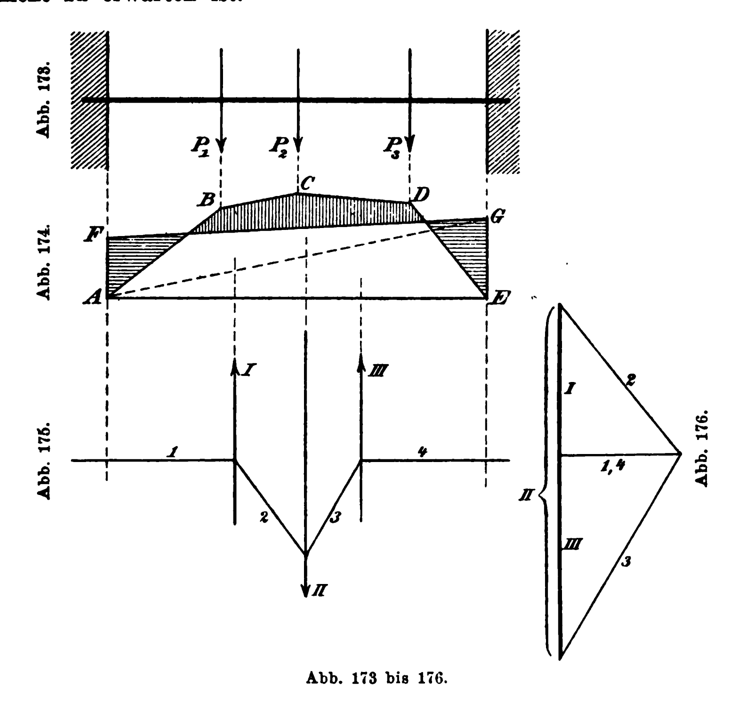


Abb. 173 bis 176.

40. Aufgabe. Ein Träger ist auf beiden Seiten eingespannt und trägt die in Abb. 173 angegebenen Lasten. Man soll die Gestalt der Momentenfläche nach der in § 62 besprochenen Methode ermitteln.

Lösung. Die Momentenfläche wird jedenfalls aus einem Seilpolygone $ABCDE$ in Abb. 174 gebildet, das zu den gegebenen Lasten sofort gezeichnet werden kann, dessen Schlußlinie FG aber vorläufig unbekannt ist, da deren Lage von den Auflagerkräften und Einspannmomenten abhängig ist. Die Endtangenten 1 und 4 der elastischen Linie in Abb. 175 müssen beide horizontal sein und auf dieselbe Gerade fallen. Zwischen den Seilspannungen 1 und 4 des zweiten Seilpolygons liegen die aus der Momentenfläche hervorgehenden Lasten I, II, III. Man ermittelt die Schwerlinie und den Inhalt des positiven Anteils $ABCDE$ der Momentenfläche und kennt damit die Last II nach Lage und Größe. Von der Lastlinie I weiß man, daß sie eine Schwerlinie des Dreieckes AFG bildet und daher um ein Drittel der Spannweite vom linken Auflager entfernt ist. Die zum Dreiecke AGE gehörige Lastlinie ist um ebenso viel vom rechten Auflager entfernt. Man zieht die Seilspannung 2 in Abb. 175 in beliebiger Richtung (entsprechend der willkürlichen Verzerrung der elastischen Linie) und schiebt 3 dazwischen. Hierauf kann der zu dem Seilpolygone gehörige Kräfteplan in Abb. 176 konstruiert werden, indem man die der Größe nach bekannte Last II in einem passend gewählten Maßstabe abträgt und Parallelen zu den Seilstrahlen zieht. Dadurch findet man die Größen der Lasten I und III in demselben Maßstabe, d. h. die Flächen der Dreiecke AFG und AGE in Abb. 174. Hiermit kennt man auch die Höhen AF und GE dieser Dreiecke, d. h. die beiden Einspannmomente des Balkens und die Verbindungslinie FG liefert die gesuchte Schlußlinie, womit die Aufgabe gelöst ist.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Seite

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q, \qquad (2)\ 79$$

Differentialgleichung der Seilkurve, H Horizontalzug, q Belastung auf die Längeneinheit bezogen.

$$Hy = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}, \qquad (4)\ 81$$

Gleichung der Seilkurve für gleichförmige Lastverteilung.

$$f = \frac{ql^2}{8H} = \frac{Ql}{8H}, \qquad (5)\ 81$$

f Pfeil der Seilkurve, l Spannweite, Q gesamte (gleichförmig verteilte) Last.

$$b = l + \frac{q^2l^3}{24H^2} = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}, \qquad (7)\ \text{u.}\ (8)\ 82$$

Näherungsformel für die Bogenlänge b des Parabelbogens.

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma\frac{ds}{dx}, \qquad (9)\ 85$$

Differentialgleichung der Kettenlinie, γ Belastung für die Längeneinheit.

$$s = \frac{H}{\gamma}\sinh\frac{\gamma x}{H}, \qquad (14)\ 87$$

Formel für die Bogenlänge s der Kettenlinie, vom Scheitel bis zu einem Punkte mit der Abscisse x.

$$y = a\cosh\frac{x}{a}, \qquad (17)\ 88$$

Gleichung der Kettenlinie, a deren Parameter.

Seite

$$S = \gamma y, \qquad (18)\ 88$$

S Seilspannung der Kettenlinie an einem Punkte mit der Ordinate y.

$$\Theta = F \cdot F', \qquad (20)\ 102$$

Θ Trägheitsmoment einer Querschnittsfläche vom Inhalte F. Die Fläche F' wird von einer Seilkurve und ihren beiden Endtangenten eingeschlossen.

$$H_{\text{II}} = \frac{E\Theta}{H_{\text{I}}}, \qquad (27)\ 107$$

H_{II} Horizontalzug der Seilkurve, die die elastische Linie eines Balkenträgers angibt, wenn die Momentenfläche als Belastungsfläche gewählt wird, E Elastizitätsmodul, Θ Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes und H_{I} Horizontalzug des ersten Seilpolygons, das die Momentenfläche darstellt.

$$m = 2n - 3, \qquad (33)\ 195$$

m Zahl der Stäbe für das statisch bestimmte ebene Fachwerk von n Knotenpunkten.

$$X = -\frac{T_e}{u_e}, \qquad (36)\ 218$$

X Spannung eines Stabes in einer Grundfigur (Methode von Henneberg), T_e Spannung im Ersatzstabe unter den gegebenen Lasten, u_e' Spannung infolge eines Zuges von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des beseitigten Stabes.

$$m = 3n - 6, \qquad (54)\ 271$$

m Zahl der notwendigen Stäbe im räumlichen statisch bestimmten Fachwerke von n Knotenpunkten.

$$m = n + f - 2, \qquad (58)\ 277$$

Satz von Euler, m Zahl der Kanten, n Zahl der Ecken, f Zahl der Flächen in einem einfach zusammenhängenden Polyedermantel.

$$r = \frac{l}{EF}, \qquad (59)\ 338$$

r Stabkonstante, die zu einem Stabe von der Länge l und dem Querschnitte F gehört, E Elastizitätsmodul;

$$\Delta l = rS, \qquad (60)\ 338$$

Δl elastische Längenänderung des Stabes unter der Spannung S.

Seite

$$x = \frac{1}{P}\sum T\Delta l = \frac{1}{P}\sum rST, \qquad (62)$$ 342

Maxwell-Mohrsche Formel für die elastische Verschiebung x eines Knotenpunktes im Sinne der Lastrichtung von P; S Stabspannungen, die zu den wirklich vorhandenen Lasten gehören, T die Spannungen, die durch die willkürlich hinzugedachte Last P hervorgebracht würden.

$$X = -\frac{\Sigma urT}{\Sigma u^2 r}, \qquad (67)$$ 364

Maxwell-Mohrsche Formel für die Spannung X im überzähligen Stabe eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes, T Spannungen, die im „Hauptnetze“ (nach Fortnahme des überzähligen Stabes) durch die gegebenen Lasten hervorgebracht würden, u Spannungen im Hauptnetze infolge einer längs der Richtungslinie des überzähligen Stabes angebrachten Zugspannung von der Lasteinheit, r Stabkonstanten. Die Summen sind über den überzähligen mit zu erstrecken.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\Sigma urT\cdot\Sigma v^2 r - \Sigma vrT\cdot\Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r\cdot\Sigma v^2 r};\\ Y &= \frac{\Sigma vrT\cdot\Sigma u^2 r - \Sigma urT\cdot\Sigma uvr}{(\Sigma uvr)^2 - \Sigma u^2 r\cdot\Sigma v^2 r},\end{aligned}\right\} \qquad (71)$$ 368

dasselbe für den Fall des zweifach statisch unbestimmten Fachwerkes, X, Y die Spannungen in den beiden überzähligen Stäben, v die Spannungen im Hauptnetze für eine Zugspannung von der Lasteinheit längs der Richtungslinie des zweiten überzähligen Stabes.

$$X = -\frac{\eta l_k t}{\Sigma u^2 r}, \qquad (72)$$ 372

X Spannung im überzähligen Stabe (k) eines einfach statisch unbestimmten Fachwerkes, wenn die Temperatur des überzähligen Stabes um t^0 erhöht wird, η Ausdehnungskoeffizient.

$$\sigma = \frac{R}{f} \pm \frac{6Ru}{f^2}, \qquad (82)$$ 412

Formel für die Kantenpressung σ im Gewölbe, die durch den im Abstande u von der Fugenmitte angreifenden Fugendruck R (für die Längeneinheit) hervorgebracht wird, wenn sich

Seite

die Spannungsverteilung über die ganze Fuge von der Länge f erstreckt;

$$\sigma = 2 \cdot \frac{R}{3\left(\frac{f}{2} - u\right)}, \qquad (83) \quad 413$$

dasselbe für den Fall, daß sich die Fuge auf der andern Seite öffnet.

$$y = -\frac{1}{H}\int dx \int q dx + C_1 x + C_2, \qquad (84) \quad 416$$

Gleichung der Stützlinie eines Gewölbes für lotrechte Fugenschnitte, H Horizontalschub, C_1 und C_2 unbestimmte Integrationskonstanten, q Belastungsintensität (Last für die Längeneinheit) an der Stelle x.

$$A = \frac{1}{2E}\int \left(\frac{R^2}{f} + \frac{12 M^2}{f^3}\right) ds, \qquad (85) \quad 425$$

A Formänderungsarbeit im Wölbbogen, R Fugendruck, E Elastizitätsmodul, M Moment des Fugendruckes für die Fugenmitte, f Fugenlänge.

$$\left.\begin{aligned} M_n l_n + 2 M_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} \\ = 2(B_n l_n + B_{n+1} l_{n+1}); \end{aligned}\right\} \qquad (88) \quad 455$$

Gleichung der drei Momente für den durchlaufenden Balken (Clapeyron); M_n, M_{n+1}, M_{n+2} die unbekannten Momente über drei aufeinander folgenden Stützen, B_n und B_{n+1} die von den zugehörigen, gleichförmig verteilten Lasten in den Mitten beider Öffnungen unter der Voraussetzung getrennter Überdeckung der einzelnen Öffnungen hervorgerufenen Biegungsmomente, l_n und l_{n+1} die Spannweiten der beiden Öffnungen.

$$M_{n+1} + 2 M_{n+2} = 2 B_{n+1} \qquad (89) \quad 456$$

und

$$M_2 + 2 M_1 = 2 B_1, \qquad (90) \quad 456$$

Gleichungen für die beiden Trägerenden, die den Clapeyronschen Gleichungen (88) hinzutreten, wenn der Träger an den Enden eingespannt ist; $n + 2$ letzte Stütze, sonst dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Falle.

Sachverzeichnis.

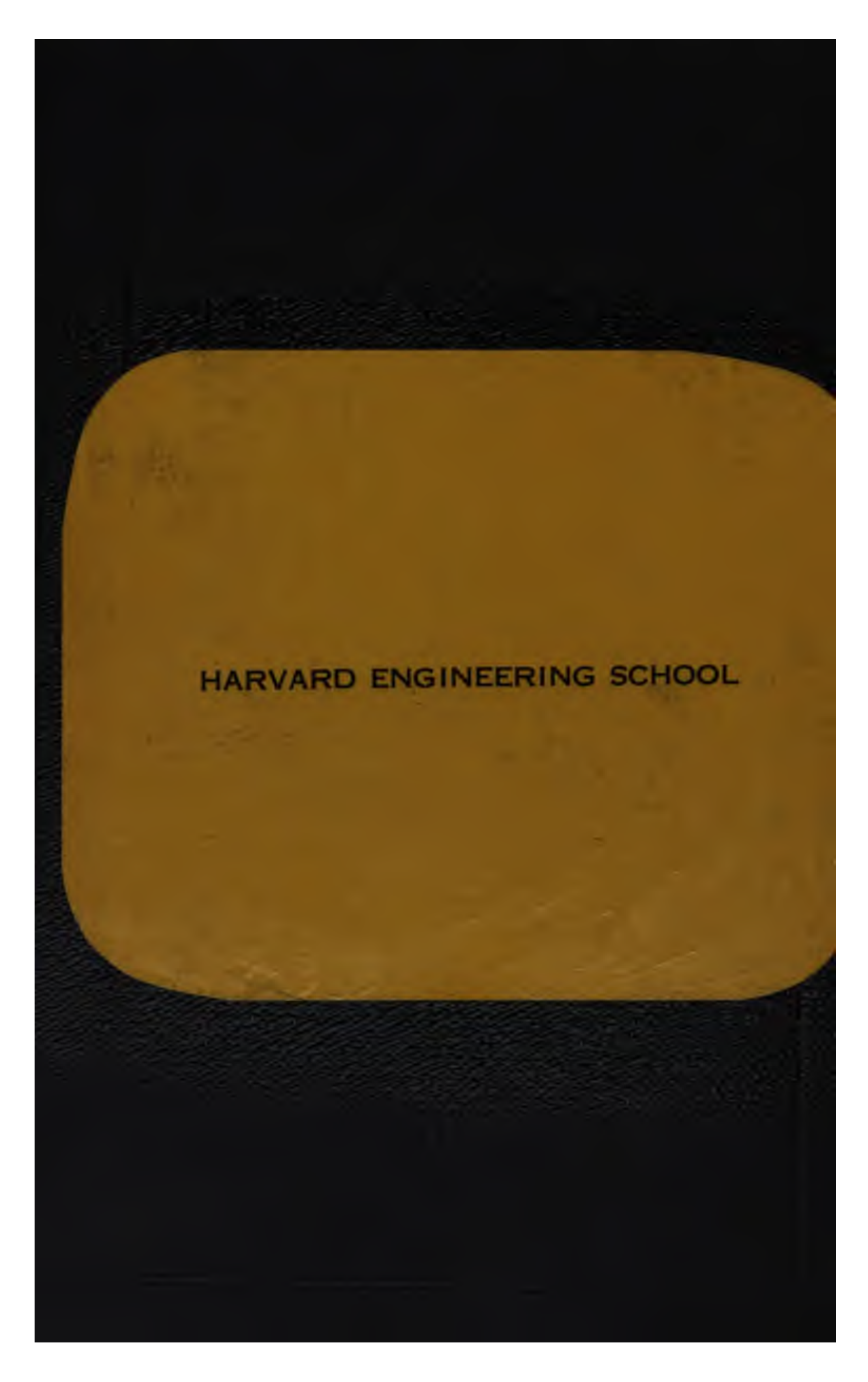
Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

LIBRARY
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
HARVARD UNIVERSITY

Please sign your name and address on this card, and deposit in box provided.

This book may be kept

ONE WEEK


HARVARD ENGINEERING SCHOOL